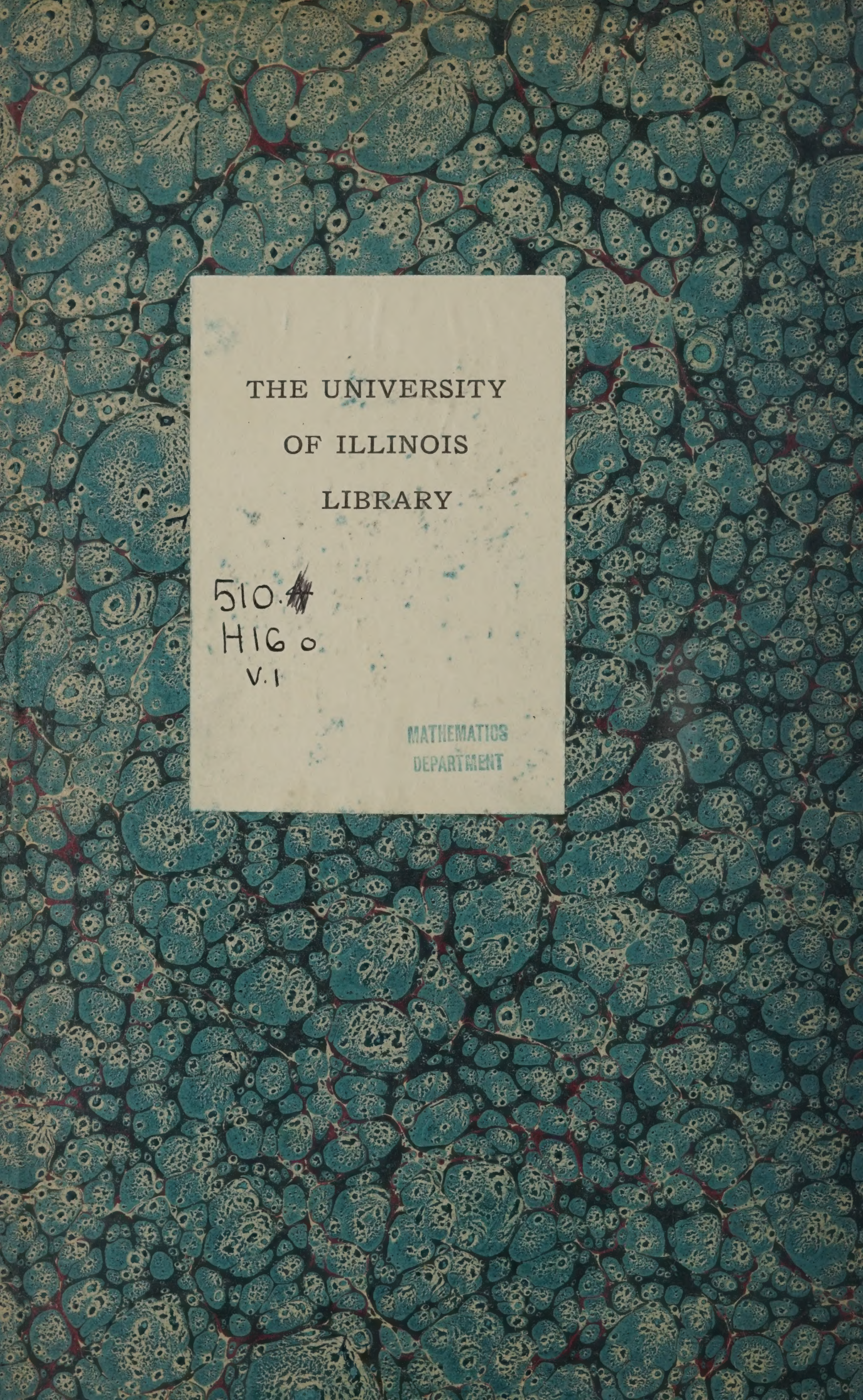
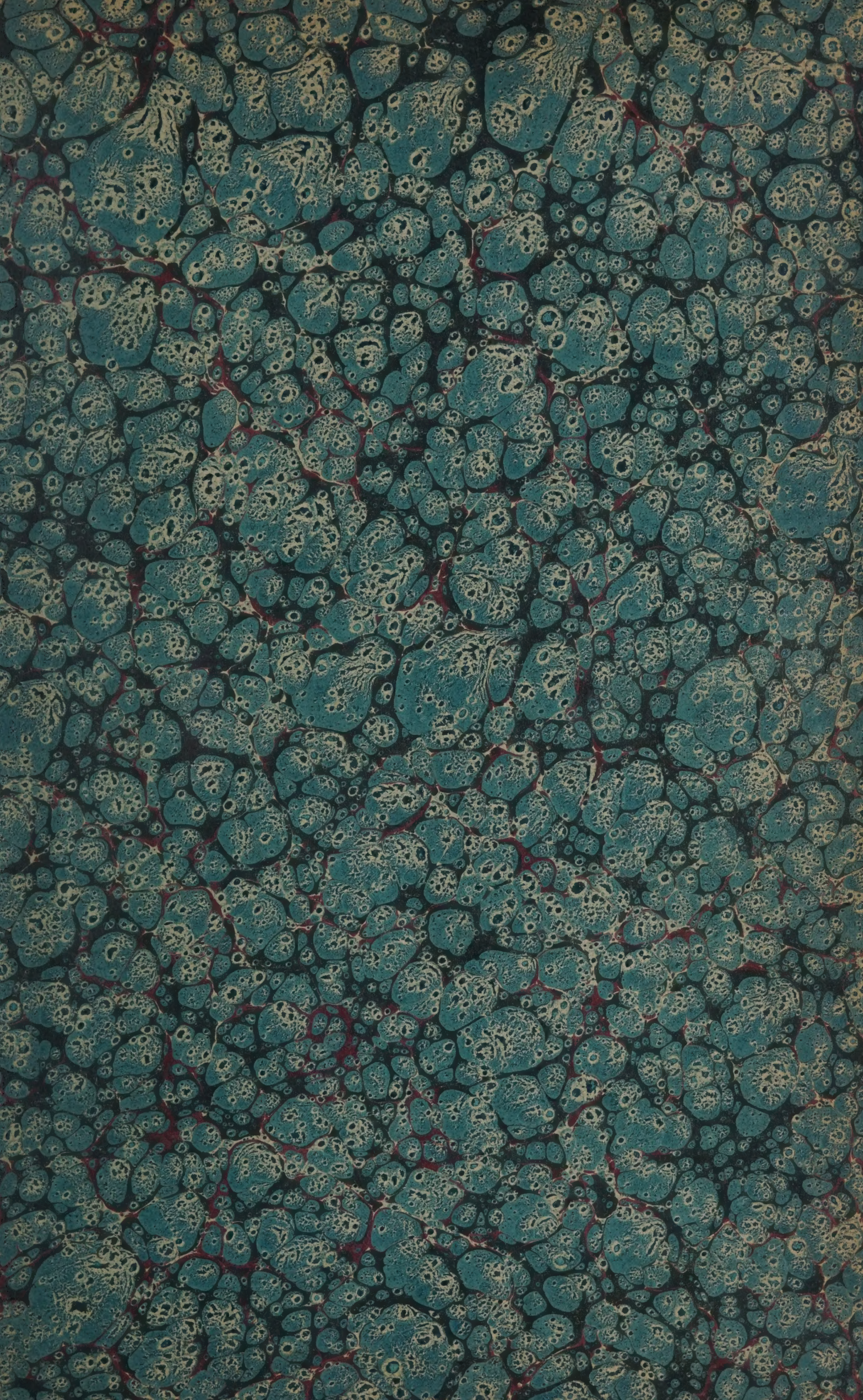



THE UNIVERSITY
OF ILLINOIS
LIBRARY
510.4
H16o
V.1
MATHEMATICS
DEPARTMENT



fo 20
+55

9173

ŒUVRES

DE

G.-H. HALPHEN

DU MÊME AUTEUR.

TRAITÉ DES FONCTIONS ELLIPTIQUES ET DE LEURS APPLICATIONS.

I[re] PARTIE : *Théorie des fonctions elliptiques et de leurs développements en séries.* Un vol. in-8 de VIII-492 p.; 1886............ 15 fr.

II[e] PARTIE : *Applications à la mécanique, à la physique, à la géodésie, à la géométrie et au calcul intégral.* Un vol. in-8 de IV-659 p.; 1888.. 20 fr.

III[e] PARTIE : *Fragments.* (*Quelques applications à l'algèbre et en particulier à l'équation du 5[e] degré. Quelques applications à la théorie des nombres. Questions diverses.*) Publié par les soins de la Section de géométrie de l'Académie des Sciences. Un vol. in-8 de XVI-272 p.; 1891. .... 8 fr. 50 c.

ŒUVRES

DE

G.-H. HALPHEN

PUBLIÉES PAR LES SOINS

DE

C. JORDAN, H. POINCARÉ, É. PICARD,

AVEC LA COLLABORATION

DE

E. VESSIOT.

TOME I.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS,

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1916

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation
réservés pour tous pays.

510
H16o
V.1

INTRODUCTION.

Mme Georges Halphen, ayant résolu de rassembler les œuvres de son mari, a bien voulu nous charger, avec le regretté Henri Poincaré, de surveiller cette publication. Nous avons été heureux, en cette circonstance, d'avoir le concours de M. Vessiot qui, avec M. Charles Halphen, a procédé avec soin à la révision du texte et à la correction des épreuves.

Les géomètres remercieront Mme Halphen de son heureuse initiative. Voici vingt-cinq ans que Halphen a été enlevé à la Science française dans tout l'éclat de son talent. Rien n'a vieilli dans ses écrits, d'une admirable perfection, et dont toutes les parties sont des œuvres d'art dignes d'être proposées comme modèles à tous ceux qui cultivent les sciences mathématiques.

CAMILLE JORDAN, ÉMILE PICARD.

353187

Mathematics 5 bk 6 St 435 v.1

NOTICE SUR LA VIE ET LES TRAVAUX

DE GEORGES-HENRI HALPHEN

MEMBRE DE LA SECTION DE GÉOMÉTRIE;

PAR

M. ÉMILE PICARD.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 110, p. 489 (10 mars 1890).
Paris, 1890.

Il semble qu'on puisse aujourd'hui distinguer, chez les mathématiciens, deux tendances d'esprit différentes. Les uns se préoccupent principalement d'élargir le champ des notions connues; sans se soucier toujours des difficultés qu'ils laissent derrière eux, ils ne craignent pas d'aller en avant et recherchent de nouveaux sujets d'étude. Les autres préfèrent rester, pour l'approfondir davantage, dans le domaine de notions mieux élaborées ; ils veulent en épuiser les conséquences, et s'efforcent de mettre en évidence dans la solution de chaque question les véritables éléments dont elle dépend. Ces deux directions de la pensée mathématique s'observent dans les différentes branches de la Science ; on peut dire toutefois, d'une manière générale, que la première tendance se rencontre le plus souvent dans les travaux qui touchent au Calcul intégral et à la théorie des fonctions ; les travaux d'Algèbre moderne et de Géométrie analytique relèvent surtout de la seconde. C'est à celle-ci que se

rattache principalement l'œuvre d'Halphen : ce profond mathématicien fut avant tout un algébriste. Les problèmes difficiles d'Algèbre et de Géométrie énumérative, par lesquels il débuta dans la Science, et où une solution n'a de prix que si elle est complète et définitive, l'habituèrent à creuser à fond les questions qu'il étudiait. On retrouve dans tous ses écrits le souci constant de ne rien laisser d'inachevé. Mettant à profit, avec un art consommé, le secours que peuvent se prêter les diverses parties des Mathématiques, il a su pousser jusqu'à leur dernier terme les solutions des problèmes qu'il s'est posés. Son œuvre, si parfaite, laissera dans la Science une trace durable.

Georges-Henri Halphen naquit à Rouen le 30 octobre 1844 ; il entra à l'École Polytechnique en 1862 et, à sa sortie en 1866 de l'École d'Application de Metz, fut envoyé comme lieutenant d'Artillerie à Auxonne d'abord et ensuite à Strasbourg. Le premier travail mathématique que nous ayons à mentionner date de 1869. Il est relatif à la recherche du nombre des droites communes à deux congruences. Halphen avait trouvé sa voie ; nous allons le voir bientôt attaquer successivement, et avec plein succès, les problèmes les plus difficiles relatifs à la théorie géométrique de l'élimination et à la théorie des courbes algébriques. Travaillant en silence, il s'était initié, pendant les années précédentes, aux méthodes de l'Algèbre et de la Géométrie modernes. Dès cette époque, il était en possession de résultats de la plus haute importance, concernant les courbes gauches algébriques et les communiquait très succinctement à l'Académie dans les premiers mois de 1870. Nous reparlerons de ce beau Mémoire, que d'autres productions d'Halphen égalent peut-être, mais certainement ne dépassent pas. Maintenant c'est sur un autre terrain que le lieutenant d'artillerie va déployer son énergie et montrer sa valeur. Il était à Besançon au mois de juillet 1870 ; après s'être occupé activement de l'armement de cette place, il arriva à Paris, très souffrant encore d'une chute de cheval qu'il venait de faire. Malgré l'avis de son médecin, il partit peu de jours après pour Mézières ; employé d'abord à la défense de cette ville, il eut la

chance de la quitter avant son investissement complet, et alla retrouver au nord l'armée du général Faidherbe. Là il prit part à la bataille de Pont-Noyelles, où il fut fait chevalier de la Légion d'honneur, puis aux batailles de Bapaume et de Saint-Quentin. Il était nommé capitaine à la fin de cette campagne, dans laquelle il s'était signalé par des actions d'éclat, qui lui valurent l'honneur d'une citation dans le récit du général Faidherbe sur les opérations de l'armée du Nord.

En 1872, Halphen se fixe à Paris, où il devient répétiteur à l'École Polytechnique et reprend ses études scientifiques. De tous les travaux de cette partie de sa vie, ceux qui lui ont coûté le plus d'efforts sont relatifs à la théorie célèbre des caractéristiques. A la suite des recherches de M. de Jonquières et de Chasles, l'étude des systèmes algébriques de coniques, dépendant d'un paramètre arbitraire, préoccupait vivement les géomètres. Chasles avait, par induction, trouvé une loi générale faisant connaître le nombre des coniques satisfaisant à une condition donnée. Ce nombre se composait d'une somme de deux termes, chacun de ceux-ci étant un produit de deux facteurs, dont l'un dépendait seulement du système et l'autre de la condition. Halphen, en même temps que plusieurs autres géomètres éminents, s'efforça de démontrer la loi de Chasles. Il crut même en avoir trouvé une démonstration; mais, bientôt après, s'apercevant d'une erreur dans ses raisonnements, il fut conduit à soupçonner que la loi était inexacte, et reprit l'étude de la question. Après de longues recherches, il eut la satisfaction d'arriver à la solution complète par une méthode dont on ne peut trop louer l'originalité. On peut faire correspondre uniformément les coniques d'un système aux points d'une courbe algébrique convenable; de même, on fera correspondre à la condition donnée une autre courbe algébrique. C'est la considération de ces deux lignes qui conduit Halphen au résultat cherché. En particulier, pour que l'énoncé de Chasles soit exact, il faut et il suffit que l'une d'elles ne passe pas à l'origine des coordonnées. Il en sera toujours ainsi, si le système de coniques ne

présente que des singularités ordinaires, c'est-à-dire des singularités qui existent nécessairement dans l'ensemble d'un système ou de son corrélatif. Cette distinction entre les singularités ordinaires ou nécessaires et les singularités extraordinaires avait été pour Halphen, au début de ces études, un trait de lumière. Elle lui était bien familière dans une autre théorie, dont il s'occupait en même temps, celle des courbes algébriques, à laquelle il consacra de nombreux Mémoires.

Les points singuliers jouent dans l'étude des courbes algébriques un rôle considérable. Les principes pour la discussion d'une telle courbe dans le voisinage d'un point avaient été établis définitivement par Puiseux. D'autre part, Riemann, dans sa théorie des fonctions abéliennes, avait introduit la notion capitale du genre des courbes algébriques, et partagé celles-ci en différentes classes, deux courbes étant de la même classe quand elles se correspondent uniformément. L'illustre géomètre, qui aimait les grands horizons, avait peu insisté sur plus d'un point difficile, en particulier sur ce qui concerne les singularités élevées. Halphen donne une formule générale, applicable à tous les cas, pour la détermination du genre d'une courbe algébrique ; puis, passant à l'étude des courbes d'une même classe, il approfondit une proposition remarquable donnée par M. Nœther, d'après laquelle on peut trouver dans toute classe des courbes n'ayant que des singularités ordinaires. Le savant géomètre allemand employait pour cette transformation une succession de substitutions quadratiques ; Halphen veut trouver une transformée ayant avec la courbe initiale des rapports géométriques simples : il y réussit de deux manières différentes. Dans une première solution, il établit que toute courbe plane algébrique est la perspective d'une courbe gauche n'ayant qu'un point singulier, et telle qu'en ce point toutes les branches aient des tangentes distinctes ; faisant alors la perspective de cette courbe gauche d'un point de vue arbitraire, il obtient la transformée cherchée. La seconde solution se rattache à l'étude d'une série de courbes analogues aux développées, dans laquelle apparaissent dans tout leur éclat la science profonde et le remarquable talent

de notre auteur. Prenant une conique arbitraire dans le plan de la courbe à transformer, il considère en chaque point de celle-ci sa tangente et la polaire du point par rapport à la conique ; le lieu de l'intersection de ces deux droites donne une transformée uniforme de la courbe. Halphen établit qu'après avoir répété un nombre fini de fois cette transformation, on arrivera à une courbe n'ayant plus que des points singuliers ordinaires. Puis il démontre ce théorème si curieux et si caché, qu'à partir d'un certain rang, les degrés et les classes des transformées précédentes forment deux progressions arithmétiques de même raison. Ce beau résultat comprend, comme cas particulier, cette étonnante propriété des développées des courbes algébriques dont les degrés et les classes sont, à partir d'un certain rang, en progression arithmétique.

Ces travaux approfondis sur la théorie des courbes permirent à Halphen de reprendre ses études sur l'élimination. La recherche des points d'une courbe algébrique, qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle algébrique donnée, se présente en Géométrie dans divers cas particuliers, par exemple dans la recherche des points d'inflexion. La question méritait d'être abordée dans toute sa généralité. Halphen se place au même point de vue que dans la théorie des caractéristiques, c'est-à-dire cherche à mettre en évidence les éléments relatifs à la courbe et les éléments dépendant de la condition, qui est ici l'équation différentielle. Pour les équations du premier ordre, la solution est de même forme que dans le cas classique des caractéristiques ; pour celles du second ordre, on a encore une formule analogue, mais renfermant trois termes au lieu de deux. La généralisation semble immédiate, mais l'analogie tromperait étrangement ; pour les équations d'ordre supérieur, on ne peut plus d'une manière générale fixer de limites pour le nombre des termes. C'est là un résultat dont l'intérêt philosophique est très grand ; il montre, avec la dernière évidence, que les singularités élevées des courbes algébriques ne peuvent avoir pour équivalents, dans toute question, un nombre déterminé de singula-

rités ordinaires indépendant à la fois de cette question et de la courbe qu'on étudie. Bientôt après, ces difficiles recherches sont étendues aux courbes gauches et, dans quelques cas particuliers, aux surfaces algébriques.

Dans un des Mémoires précédents, Halphen avait rencontré des équations différentielles restant inaltérées par une transformation homographique quelconque. Ce nouveau genre d'invariance excita son intérêt ; il réussit à former toutes les équations jouissant de cette propriété, et présenta ce travail comme Thèse, en 1878, sous le titre d'*Invariants différentiels*. L'équation différentielle des lignes droites et celle des coniques donnaient immédiatement deux exemples d'invariants. La découverte d'un invariant du septième ordre, amenée par les considérations géométriques les plus ingénieuses, permit à Halphen de développer la théorie générale qu'il étendit ensuite aux courbes gauches.

Ces résultats, si intéressants en eux mêmes, allaient permettre à leur auteur d'aborder une importante question de Calcul intégral. Dans deux Notes mémorables, Laguerre venait d'appeler l'attention des géomètres sur les invariants des équations différentielles linéaires. Halphen voit de suite le rapport qu'il y a entre ses recherches antérieures et la notion nouvelle introduite par Laguerre ; ainsi assuré, en quelque sorte *a priori*, de la possibilité d'édifier une théorie complète des invariants des équations linéaires, il s'attaque à ce nouveau problème et en approfondit tous les détails. Le nombre des invariants absolus distincts d'une équation linéaire est inférieur de deux unités à son ordre ; on peut les obtenir d'une manière régulière, en ramenant l'équation à une forme canonique, forme dont l'introduction dans cette question, comme dans certaines théories algébriques parallèles, est bien digne de remarque. Halphen montra l'intérêt de ses recherches au point de vue du Calcul intégral, en apprenant à reconnaître si une équation différentielle linéaire est susceptible d'être ramenée à certains types connus déjà intégrés au moyen d'un changement de variable et de fonction qui n'altère pas

sa forme. On comprend que les relations entre les invariants absolus doivent jouer, dans une telle question, un rôle capital; c'est, en effet, de la nature de ces relations qu'Halphen déduisit la solution du beau problème qu'il s'était posé. L'Académie avait proposé, comme sujet du grand prix des Sciences mathématiques pour 1880, de perfectionner la théorie des équations différentielles linéaires; le prix fut décerné au Mémoire *Sur la réduction des équations linéaires aux formes intégrables*.

Bientôt après, Halphen remportait un nouveau succès académique. L'Académie des Sciences de Berlin avait mis au concours, pour le prix Steiner de 1882, la solution d'une question importante concernant les courbes gauches algébriques. Halphen, nous l'avons dit, possédait, dès 1870, d'importants résultats sur cette théorie; ce lui fut l'occasion de reprendre son travail qui n'avait pas été publié, et de le compléter. Il l'envoya au concours et reçut le prix, qui fut doublé, en même temps que M. Nœther. Cet admirable Mémoire me paraît l'œuvre la plus profonde d'Halphen. Il a réussi à énumérer et à classer en diverses familles les courbes d'un même degré. Dans la théorie si difficile des courbes gauches algébriques, c'est sur l'extension des formules de Plücker qu'avaient d'abord porté les efforts des géomètres; elle fut obtenue il y a longtemps déjà, par M. Cayley, et complétée par M. Salmon. Dans ces formules s'introduisent, outre le degré, certains nombres entiers relatifs à la courbe considérée; mais ceux-ci ne suffisent pas, en général, à distinguer une famille de courbes. Parmi eux, il en est un d'une importance extrême; c'est le nombre des points doubles apparents. Pour une courbe d'un degré donné, ce nombre a une limite supérieure, facile à obtenir. Bien autrement cachée était la limite inférieure; Halphen réussit à trouver la limite véritable, c'est-à-dire celle qui peut être effectivement atteinte, et démontre ce résultat si saillant que les courbes correspondantes sont situées sur des surfaces du second degré. La classification repose sur la considération de l'ordre minimum d'une surface algébrique passant par la courbe gauche; pour l'obtenir,

Halphen introduit différentes fonctions numériques du degré de la courbe, dont les valeurs sont comprises entre le maximum et le minimum que nous venons de signaler, et l'ordre cherché dépend de la place qu'occupe dans cette suite le nombre des points doubles apparents. Les méthodes générales sont appliquées à la classification complète des courbes jusqu'au vingtième degré, et à celle des courbes de degré cent vingt.

Je ne puis parcourir l'œuvre entière d'Halphen ; à côté de ces études de longue haleine, dont nous avons essayé de donner une idée, nous pourrions citer d'autres Mémoires de moindre étendue, où nous retrouverions une pensée originale. Mentionnons au moins un travail sur la théorie des séries, qui renferme des résultats inattendus ; une série très générale, procédant suivant certains polynomes entiers, dont chacun est la dérivée du suivant, et qui semble susceptible de représenter des fonctions très variées, ne peut au contraire être employée que pour le développement de fonctions entières, jouissant elles-mêmes d'un caractère très spécial. De tels résultats, tout négatifs qu'ils soient, sont d'un grand intérêt ; il nous montrent une fois de plus avec quelle prudence on doit procéder dans l'emploi de nouveaux modes de développements des fonctions. Ces constatations ont d'ailleurs leur mélancolie, car elles peuvent inquiéter pour plus d'un développement, usité dans les applications, et dont la légitimité est pour le moins douteuse.

Ces travaux considérables avaient placé Halphen parmi les géomètres les plus éminents de l'Europe. Le 15 mars 1886, l'Académie des Sciences, dont il avait été trois fois le lauréat, le désignait à la presque unanimité des suffrages, pour remplir la place vacante, dans la Section de Géométrie, par le décès de M. Bouquet. Halphen était chef d'escadron depuis le 13 juillet 1884, et il avait, peu de temps auparavant, été nommé examinateur d'admission à l'École Polytechnique. Dans ces concours, où sont en présence de si sérieux intérêts, ce n'est pas une tâche facile que d'exprimer, par un nombre, son opinion sur la valeur d'un candidat. Jugeant de ce qu'il sait, on

voudrait aussi apprécier l'effort intellectuel dont il sera plus tard capable ; difficulté d'autant plus grande, qu'une préparation excellente, mais ayant cherché quelquefois à tout prévoir, peut provoquer l'illusion. Dans ses nouvelles fonctions, Halphen montra, dès le début, beaucoup de pénétration. Enchaînant ses questions avec une grande habileté, il parcourait sans effort le cycle entier du programme et il a laissé le souvenir d'un examinateur incomparable.

Tous ceux qui ont approché Halphen ont apprécié ce caractère noble et loyal, que blessait et irritait la moindre injustice. Quand l'intérêt de la Science lui paraissait en jeu, il exprimait sans réserves son opinion. Bienveillant pour les travaux qu'il avait à juger, quand il croyait y trouver une idée, il aimait peu les généralisations faciles qui, disait-il, encombrent la Science.

Au mois d'octobre 1886, Halphen voulut reprendre dans l'armée un service actif et fut chargé du commandement des batteries au 11ᵉ régiment à Versailles. C'était une lourde tâche qui venait s'ajouter à l'effort considérable que lui demandait en ce moment même la préparation de son Traité sur les fonctions elliptiques.

On ne peut parler sans tristesse de cette Œuvre, interrompue par une impitoyable fatalité, où l'auteur s'était proposé de développer la théorie des fonctions elliptiques sous la forme qui lui paraissait la plus avantageuse pour les applications, et en même temps de donner de celles-ci un tableau complet. Halphen était depuis longtemps familier avec cette théorie. Ses recherches sur les équations différentielles linéaires avaient principalement porté autrefois sur les équations à coefficients doublement périodiques ; plus récemment un Mémoire sur une courbe élastique l'avait forcé à faire une discussion approfondie des divers cas qui peuvent se présenter dans le problème de l'inversion. Les deux premiers Volumes seuls ont paru ; le premier est consacré à la théorie générale, le second traite des applications à la Mécanique, à la Géométrie et au Calcul intégral. Ils exerceront une grande influence sur l'enseignement de cette importante branche de la Science. Les questions traitées trouvent là leur

solution définitive. Les transcendantes elliptiques y sont maniées avec la même aisance que les fonctions circulaires dans d'autres sujets plus élémentaires ; les formules de cette autre Trigonométrie sont sans doute plus complexes, mais cette complication, tenant à la nature des choses, semble réduite autant qu'il est possible.

Le troisième Volume devait traiter des applications algébriques et arithmétiques; c'eût été, sans aucun doute, la partie maîtresse de ce bel Ouvrage. C'est là que se serait déployé dans tout son éclat le talent d'Halphen, rompu aux problèmes les plus abstraits de l'Algèbre. Après de laborieux efforts, ce puissant esprit avait enfin triomphé des difficultés énormes que présentait un tel sujet, et il allait se mettre à la rédaction définitive. Le temps ne devait pas lui être donné pour achever son œuvre. Le 21 mai dernier, il était enlevé à l'affection des siens, après une courte maladie, à l'âge de quarante-quatre ans. Ce fut un deuil cruel pour la Science française, dont il était un des plus éminents représentants, et aussi pour notre armée qui perdit en lui un officier supérieur du plus grand avenir. Tous les amis d'Halphen garderont le souvenir de cet homme de cœur, qui mourut avant l'heure en travaillant noblement pour la Science et pour son pays. Sa vie trop courte aura du moins été bien remplie, il laisse un nom et une œuvre qui ne périront point.

NOTICE SUR HALPHEN,

PAR

H. POINCARÉ.

Journal de l'École Polytechnique, 60ᵉ Cahier. Paris, 1890.

I.

Halphen naquit à Rouen en 1844 ; il entra à l'École Polytechnique à l'âge de 18 ans, en 1862, et il en sortit à la fin de sa seconde année d'études avec le grade de sous-lieutenant d'artillerie. Son étonnant talent d'algébriste avait déjà été remarqué à l'École par ses maîtres et par ses camarades ; cependant ce fut seulement en 1869 qu'il publia son premier travail original, qui, sans donner toute sa mesure, pouvait déjà faire concevoir les plus grandes espérances. Peu de mois après, il était en possession des principaux résultats de son Mémoire sur les courbes gauches algébriques, l'une de ses productions les plus dignes d'admiration. La plupart de ces résultats ne furent publiés que bien des années plus tard. Les terribles événements de l'année 1870 l'empêchèrent sans doute de terminer la rédaction definitive ; et ce beau travail, résumé dans quelques Notes succinctes des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, resta longtemps ignoré de presque tous les savants.

Au commencement de la guerre, Halphen récemment nommé

lieutenant en premier, se trouvait à Besançon et il s'occupa de l'armement de cette place. Sans doute, il maudissait la mauvaise fortune qui, en l'attachant à ces utiles travaux, l'éloignait des champs de bataille ; il ne prévoyait guère tous les avantages qu'il lui devrait : ignorer les longues tristesses de la captivité, combattre pour son pays jusqu'au dernier jour, assister aux rares épisodes de cette campagne dont un Français puisse se souvenir sans douleur ! A peine remis d'une chute de cheval où il s'était brisé la clavicule, il partit pour Mézières et y arriva peu de jours avant la catastrophe de Sedan. Il put heureusement quitter cette place avant l'investissement et rejoignit l'armée du Nord.

On sait les héroïques efforts de cette petite armée, si vite improvisée, ses alternatives de succès et de revers, et l'écrasement final de Saint-Quentin.

Halphen, bientôt nommé capitaine, prit part à la bataille de Pont-Noyelles, où sa brillante conduite lui valut la croix de la Légion d'honneur, à celle de Bapaume et à celle de Saint-Quentin. Les services qu'il rendit dans cette dernière affaire attirèrent l'attention du général Faidherbe qui les rappelle dans son rapport :

« La batterie Halphen, dit-il, avait pris une excellente position à la gauche de Francilly et y a combattu d'une manière remarquable pendant toute la journée. »

Le jeune capitaine pouvait être légitimement fier d'un tel éloge venant d'un tel chef.

« Halphen, dit à ce sujet M. Hermite, Faidherbe, après tant d'autres, ont été fidèles à la double mission de l'École Polytechnique et ont continué ses glorieuses traditions. N'y a-t-il pas effectivement, dans les habitudes de l'intelligence, dans cette nature particulière que crée l'enseignement de notre grande École, une liaison normale, une concordance avec les qualités du soldat ? Une rigoureuse discipline de l'esprit prépare aux devoirs militaires, et l'on ne peut douter que les études mathématiques contribuent à former cette faculté d'abs-

traction indispensable au chef pour se faire une représentation intérieure, une image de l'action par laquelle il se dirige, en oubliant le danger, dans le tumulte et l'obscurité du combat. »

Ces paroles de M. Hermite méritent d'être méditées, et je ne puis qu'y souscrire, pourvu qu'on n'oublie pas que c'est avant tout l'énergie morale qui fait le capitaine comme elle fait le soldat.

Quand la guerre étrangère fut terminée, Halphen prit part à la lutte contre la Commune et au second siège de Paris. Ses services avaient été trop appréciés pour que la Commission des grades ne lui maintînt pas le troisième galon qu'il avait si bien mérité.

Il n'allait pas tarder d'ailleurs à être appelé sur un autre théâtre, où ses qualités scientifiques devaient briller d'un si vif éclat. En 1873, il fut nommé répétiteur à l'École Polytechnique, et, pendant treize ans, il appartint tout entier à la Science.

Ses travaux, que nous analyserons plus loin, l'avaient placé déjà au premier rang parmi les géomètres contemporains, quand un double succès académique vint attirer sur son nom l'attention du monde savant.

L'Académie de Berlin avait mis au concours l'étude des courbes gauches algébriques ; il s'était déjà occupé de ce sujet en 1869 : j'ai dit par suite de quelles circonstances ses travaux étaient restés à peu près ignorés. Il compléta sa rédaction et ajouta à son œuvre plusieurs Chapitres importants. L'Académie partagea le prix entre Halphen et le célèbre géomètre allemand M. Nöther.

Presque en même temps, il remportait dans son pays même un autre succès non moins éclatant. L'Académie des Sciences de Paris lui décernait, en 1881, le grand prix des Sciences mathématiques pour son important Ouvrage sur la réduction des équations linéaires aux formes intégrables.

Son élection à l'Institut ne pouvait tarder et, en effet, en mars 1886, à sa première candidature, il fut élu par 49 voix sur 51 votants. Cette unanimité presque complète, qu'il est si rare

d'obtenir, montre quelle estime le mérite d'Halphen inspirait à tous les savants français.

Bien qu'éloigné depuis longtemps du service militaire actif, il en avait conservé le goût et il désirait s'y retremper pendant quelques années. Il demanda donc à quitter l'École Polytechnique et il fut envoyé à Versailles, au 11[e] régiment d'artillerie, avec le grade de chef d'escadron.

Il fit cependant une année encore les examens d'entrée, dont il était chargé depuis 1884.

Malgré le zèle avec lequel il s'acquittait de ses devoirs militaires, il ne fut perdu ni pour l'Académie, dont il continua, malgré l'éloignement, à suivre assidûment les séances, ni surtout pour la Science.

C'est à cette époque, en effet, qu'il rédigea son Livre sur les fonctions elliptiques, dont je parlerai longuement plus loin.

Il menait cette vie si bien remplie, depuis trois ans déjà, quand la mort, hâtée peut-être par tant de fatigues, vint le frapper, presque subitement, le 23 mai 1889.

De longs jours lui semblaient encore promis. Les géomètres attendaient de lui des travaux aussi nombreux et aussi remarquables que ceux qu'il avait déjà produits. Sans doute après avoir achevé son grand monument, son *Traité des fonctions elliptiques*, il porterait son admirable pénétration dans de nouveaux domaines.

Comment cet espoir a-t-il été déçu? Comment ce savant officier, dont le corps paraissait aussi vigoureux que l'esprit, nous a-t-il été si promptement enlevé?

Le travail acharné auquel il dut se livrer pour terminer les deux premiers volumes de sa *Théorie des fonctions elliptiques*, dans les quelques heures que lui laissait le service du régiment, ce grand effort intellectuel, joint aux fatigues physiques de sa vie militaire, ont-ils donc excédé ses forces? Je ne sais.

Au mois d'avril 1889, il manqua plusieurs séances de l'Académie; des bruits alarmants, auxquels on refusait de croire, commençaient

à circuler; puis, un jour, les avis des médecins ne permirent plus à ses Confrères de conserver le moindre doute. Le lendemain, cette grande intelligence s'éteignait.

Sa mort fut un deuil pour la Science française, mais elle ne fut pas ressentie moins vivement au delà des frontières. Que de lettres j'ai reçues, où des savants étrangers me disaient la sympathie qu'on éprouvait chez eux pour la perte cruelle et irréparable dont la France était frappée !

Je voyais ainsi que, devant un talent aussi éminent, les petites jalousies nationales se taisaient et que les admirables qualités d'Halphen, si françaises pourtant, étaient aussi appréciées à l'étranger qu'en France.

II.

Sa franchise et sa loyauté le faisaient estimer de tout le monde.

Sa bienveillance n'était pas banale, mais elle le faisait aimer de ceux qui avaient su la mériter. Aussi ses amis étaient fiers de son amitié, et, sûrs de pouvoir compter sur lui, lui étaient très attachés.

Sa critique était redoutée, parce que son jugement n'hésitait jamais et que sa raillerie était spirituelle et mordante. Je ne crois pas pourtant qu'elle lui ait fait d'ennemis; car on le savait indulgent pour les personnes et uniquement inspiré par le souci de la Science.

Il se faisait, de ce que doit être un savant et de ce que doit être l'Académie, l'idéal le plus élevé. C'est pourquoi il semblait quelquefois si sévère pour les œuvres médiocres; c'est pourquoi, aussi, ses votes n'étaient jamais dictés par des considérations mondaines ou personnelles.

Bien des personnes ont pu croire que, comme tous les juges qui se trompent rarement, il persévérait volontiers dans ses erreurs. Je dois avouer que je l'ai cru longtemps moi-même, jusqu'à ce qu'un exemple frappant m'ait détrompé.

Ces mêmes qualités faisaient de lui, pour l'École Polytechnique, un examinateur précieux. Dans cette tâche délicate, bien des écueils sont à éviter; il faut, dans le peu de temps dont on dispose, découvrir la véritable valeur des candidats sous le vernis uniforme dû à l'art des préparateurs. Cela ne suffit pas encore; il faut faire accepter son arrêt par le public qui assiste aux examens et qui n'a pas toujours l'habitude de distinguer la réalité de l'apparence; pour cela ce n'est pas assez de deviner la vérité, il faut forcer le candidat à la faire éclater par ses réponses.

Il faut, en un mot, un jugement prompt et droit, éclairé et sûr de lui-même, qui n'est donné qu'à de rares privilégiés et qu'Halphen possédait au plus haut degré.

III.

Avant d'analyser en détail les différents Mémoires d'Halphen, je voudrais définir en quelques mots le caractère essentiel de son talent; mais, pour cela, je ne puis mieux faire que de répéter ce qu'a dit M. Picard dans sa Notice nécrologique (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CX, p. 489).

Les Mathématiciens se partagent entre deux tendances opposées.

Tandis que les uns, uniquement curieux d'étendre toujours plus loin les frontières de la Science, s'empressent, pour courir à de nouvelles conquêtes, de laisser là un problème dès qu'ils sont sûrs de pouvoir le résoudre, les autres se préoccupent d'en trouver effectivement la solution et ne l'abandonnent jamais sans en avoir tiré toutes les conséquences. Les premiers ressemblent aux voyageurs qui croient connaître un pays pour l'avoir traversé à la vapeur, les autres veulent le parcourir pas à pas et n'en laisser aucune partie inexplorée.

Esprit pénétrant autant que juste, Halphen pouvait choisir entre ces deux voies opposées. Il préféra la seconde, et c'est ce qui donne

à son œuvre son remarquable caractère d'absolue perfection. Tout ce qu'il a touché est maintenant achevé et il n'y a plus à y revenir.

Les géomètres qui ne l'ont pas lu, s'il y en avait, pourraient seuls regretter ce choix. « Le général, diraient-ils sans doute, est seul digne de nos efforts. Les équations de la division de l'argument sont résolubles par radicaux. Voilà un résultat simple, général, élégant et, par conséquent, intéressant. Sans doute nous serions bien embarrassés s'il nous fallait en résoudre une seule. Mais qu'importe? Appliquerions-nous jamais la formule si nous étions parvenus à la construire effectivement? Qui s'est jamais servi de celle de Cardan? »

Ce serait là une critique bien superficielle.

On ne parvient au général que par le particulier; cela est vrai même dans les sciences exactes; car, si elles procèdent dans la démonstration du général au particulier, elles doivent, dans l'invention, suivre la marche inverse, comme les sciences d'observation elles-mêmes.

Il arrive quelquefois que, dans cette marche, on croit pouvoir brûler des étapes, mais on ne tarde pas à s'apercevoir que la profondeur fait défaut à ces connaissances trop rapidement acquises.

Quand on croit posséder le moyen de résoudre une vaste catégorie de problèmes, ce n'est donc pas retourner en arrière que de traiter en détail un cas particulier. Cette étude nous fera seule connaître la valeur de la méthode générale et nous permettra d'en dégager les éléments essentiels et d'y découvrir ce qui peut servir de germe à une généralisation ultérieure.

Si les mathématiciens s'abandonnaient tous à la première tendance, la Science ne tarderait pas à s'encombrer d'une foule de méthodes pratiquement inapplicables et les savants s'habitueraient trop vite à se contenter à bon marché. Ceux qui sont au courant de l'état actuel des Mathématiques ne jugeront peut-être pas que cette crainte soit sans fondement.

Il peut sembler superflu de rien ajouter : qu'on me permette cependant de me placer à un autre point de vue et d'expliquer pourquoi ce genre de recherches, quand même il devrait être inutile, ne serait pas pour cela sans intérêt.

Le savant digne de ce nom, le géomètre surtout, éprouve en face de son œuvre la même impression que l'artiste ; sa jouissance est aussi grande et de même nature. Si je n'écrivais pas pour un public amoureux de la Science, je n'oserais pas m'exprimer ainsi ; je redouterais l'incrédulité des profanes. Mais ici je puis dire toute ma pensée. Si nous travaillons, c'est moins pour obtenir ces résultats auxquels le vulgaire nous croit uniquement attachés, que pour ressentir cette émotion esthétique et la communiquer à ceux qui sont capables de l'éprouver.

Cette émotion, les œuvres inspirées par les deux tendances opposées peuvent également nous la procurer. Si nous aimons à gravir les cimes d'où nous découvrons de larges horizons, notre admiration est-elle moindre devant les ouvrages accomplis de la statuaire grecque ? C'est à ces chefs-d'œuvre que font penser les Mémoires d'Halphen, où il semble qu'on ne pourrait changer un seul mot sans en détruire l'harmonie.

Avouerai-je que je l'ai souvent envié? Je n'ai jamais terminé un travail sans regretter la façon dont je l'avais rédigé ou le plan que j'avais adopté, Voilà une impression qu'Halphen n'a jamais connue.

Mais à quoi bon insister? ce plaidoyer est bien inutile. Je vais analyser les ouvrages d'Halphen et le lecteur verra à quel point, en étant complet et parfait, on peut rester original et pénétrant ; il verra que ce puissant génie a accru le domaine de l'Analyse, non seulement en profondeur, mais encore en étendue.

La netteté de son esprit avait fait de lui non seulement un géomètre de premier ordre, mais un écrivain de réel mérite. Aussi pouvait-il être goûté de ceux mêmes qui sont restés étrangers au progrès des Sciences mathématiques. Tout le monde ne le sait pas, mais ses

Confrères de l'Institut, qui ont entendu ses remarquables Rapports, ne peuvent l'ignorer.

Les Notices scientifiques que publient les candidats à l'Académie ne sont d'ordinaire que de sèches nomenclatures, et les Académiciens ne les lisent que par devoir. Celle d'Halphen, je ne crains pas de le dire, est écrite avec autant d'esprit que de logique, et sa lecture a été un plaisir même pour les savants adonnés à des études très différentes.

IV.

Une conique est définie par cinq conditions. Si donc on considère le système des coniques assujetties à quatre conditions seulement, leur équation générale ne contiendra plus qu'un seul paramètre arbitraire. Il importe de savoir combien un pareil système contient de coniques qui satisfassent à une cinquième condition.

La solution proposée par M. l'amiral de Jonquières est simple, mais incomplète. Soit μ le nombre des coniques du système qui passent par un point donné; soit α un nombre dépendant seulement de la cinquième condition imposée ; le nombre des coniques du système qui satisferont à cette condition sera égal à $\alpha\mu$. La loi de M. de Jonquières est vraie dans certains cas, mais l'examen le plus superficiel montre qu'elle comporte des exceptions ; c'est ainsi que le nombre des coniques du système qui touchent une droite donnée n'est pas proportionnel à μ.

Quand cette loi est-elle en défaut et qu'arrive-t-il alors ? Tel est le problème que Chasles s'était posé, et voici le résultat simple qu'il croyait pouvoir énoncer. Soit ν le nombre des coniques du système qui touchent une droite donnée ; soit β un second nombre analogue à α ; le nombre des coniques satisfaisant à la cinquième condition sera $\alpha\mu + \beta\nu$; Chasles appelait μ et ν les *caractéristiques* du système et il donnait le moyen de calculer combien de coniques satisfont à cinq conditions données *quelconques*.

Malheureusement ce résultat n'était nullement démontré : il avait

seulement été *observé* sur un grand nombre d'exemples, et si on le croyait général, c'était par une induction qui aurait pu paraître légitime dans toute autre science qu'en Géométrie. Longtemps les géomètres cherchèrent vainement une démonstration ; leur impuissance ne peut nous étonner, puisque nous savons que le résultat de Chasles était faux ; et, d'un autre côté, la raison qui le met quelquefois en défaut n'était pas facile à apercevoir.

Enfin, en 1873, deux géomètres annoncèrent presque simultanément qu'ils avaient démontré le théorème de Chasles. L'un était Clebsch, l'un des savants les plus justement célèbres de l'Allemagne, l'autre était Halphen lui-même. Le théorème était inexact pourtant. N'y a-t-il pas là de quoi scandaliser un peu ceux qui croient les mathématiciens infaillibles ?

Comment peut-on se tromper dans ces sciences dont la méthode semble exclure l'erreur ? On admettrait à la rigueur des fautes de calcul, mais non des fautes de raisonnement. Cependant la plupart des grands géomètres en ont commis ; il est vrai que, le plus souvent, ils ont été les premiers à s'en apercevoir. Je ne citerai qu'Abel qui avait résolu les équations du cinquième degré avant de démontrer qu'elles sont insolubles.

Ici la difficulté était bien moins de résoudre le problème que de le bien poser. On croyait avoir complètement défini tous les termes dont on se servait ; il n'en était rien pourtant. Quand doit-on dire qu'une conique satisfait à une condition donnée et, par exemple, qu'elle touche une droite donnée ? Une conique infiniment aplatie se réduit en coordonnées ponctuelles à deux droites confondues, en coordonnées tangentielles à deux points distincts, qui ne sont autre chose que ses deux sommets.

Au point de vue ponctuel, une pareille conique touche une droite quelconque, puisqu'elle la rencontre en deux points confondus ; au point de vue tangentiel, elle ne touche que les droites qui passent par ses sommets.

Proposons-nous donc de chercher combien, parmi les coniques inscrites à un quadrilatère, il y en a qui touchent une droite donnée.

Si l'on appliquait la formule de M. de Jonquières, on trouverait $\alpha = 2$, $\mu = 2$ et il devrait y en avoir quatre.

Au point de vue tangentiel, il n'y en a qu'une, et M. de Jonquières a tort.

Au point de vue ponctuel, on retrouve cette même conique, et l'on doit compter en plus les trois coniques aplaties qui sont inscrites dans le quadrilatère. Cela fait en tout quatre, et M. de Jonquières a raison.

La présence de deux sortes de coniques dégénérées, les coniques aplaties qui sont singulières au point de vue ponctuel, et les systèmes de deux droites qui sont des coniques singulières au point de vue tangentiel, créait une première difficulté, mais ce n'était pas la seule.

Il existe, en outre, des coniques doublement singulières qui se réduisent à deux droites confondues au point de vue ponctuel et à deux points confondus au point de vue tangentiel. Halphen comprit le rôle important qu'elles devaient jouer. Dès lors, sa première erreur était reconnue et il touchait à la solution.

Ce n'était pas tout encore cependant.

Par quatre points, on peut mener deux coniques tangentes à une droite donnée. Cela n'est plus vrai si cette droite passe par un des quatre points ; ces deux coniques se confondent alors en une seule. Il est donc permis de prévoir que les formules auxquelles on sera conduit ne s'appliqueront pas dans tous les cas. Elles ne seront légitimes, disait-on depuis longtemps, que si les cinq conditions imposées sont *indépendantes*. Mais que doit-on entendre par ce mot ? Dans chaque cas particulier, répondait-on, vous le comprendrez sans peine. Cela était vrai, mais ce n'était pas une définition. On ne pouvait rien faire avant de l'avoir trouvée. Halphen devait donc, avant d'aller plus loin, vaincre encore cette difficulté, et, quand il en eut triomphé, le problème était résolu.

La solution ne présente plus l'élégante simplicité qu'avaient rêvée MM. de Jonquières et Chasles ; mais elle est désormais complète, aucun cas d'exception n'y peut plus échapper.

Halphen, ayant ainsi résolu définitivement cette question, qui arrêtait depuis si longtemps les plus habiles géomètres, ne l'a pas quittée sans l'avoir complétement épuisée. Un autre se fût sans doute borné à dire : la formule de Chasles est fausse et il n'existe aucune formule simple qui puisse la remplacer. Mais il n'était pas homme à se contenter de cette conclusion négative. Il eut l'ingénieuse idée d'introduire une notation symbolique particulière qui lui permit de condenser, en quelques lignes, des résultats qui, par leur complication, semblaient rebelles à toute formule analytique. L'ordre et l'élégance succédèrent ainsi de nouveau à une rebutante confusion.

Ces théorèmes s'étendent sans peine à une courbe quelconque plane ou gauche ou à une surface ; Halphen n'avait plus qu'à parcourir sans effort la voie qu'il avait débarrassée de tout obstacle.

V.

Une autre question de pure Géométrie, qui retint longtemps Halphen, est l'étude des points singuliers des courbes algébriques. Elle est analogue à la précédente, bien que cette analogie n'apparaisse pas au premier coup d'œil. Un système de coniques satisfaisant à quatre conditions a une équation générale qui contient un paramètre arbitraire ; quand on fait varier ce paramètre, les six coefficients de cette conique varieront à leur tour, et si l'on considère ces six coefficients comme les coordonnées homogènes d'un point dans l'espace à cinq dimensions, ce point décrira une certaine courbe. D'autre part, la cinquième condition imposée à la conique s'exprime par une équation entre ces six coefficients ; elle représente alors une certaine surface dans l'espace à cinq dimensions. Le problème dit des *caractéristiques* de Chasles, qu'Halphen venait de résoudre, se ramène

à l'étude des particularités que présente l'intersection de cette courbe et de cette surface, et la difficulté de ce problème est due à la présence de certaines singularités spéciales de cette courbe et de cette surface.

Le problème des points singuliers, qui occupa longtemps Halphen, n'est pas moins important pour l'Analyse que pour la Géométrie. D'une part, en effet, il touche aux travaux classiques de Puiseux, sur les fonctions algébriques, c'est-à-dire à la théorie générale des fonctions; d'autre part, il se rattache aux transformations birationnelles des courbes algébriques, et, par conséquent, aux propriétés fondamentales des transcendantes abéliennes.

C'est à ce point de vue que se plaça bientôt Halphen. Étant donnée une courbe algébrique présentant des singularités quelconques, la transformer en une autre courbe n'ayant que des points multiples à tangentes séparées. C'était là, en même temps, résoudre un problème indispensable pour la théorie des fonctions abéliennes et compléter l'étude des points singuliers qui se trouvaient ainsi résolus en singularités ordinaires. Ce problème, sans doute, comporte une infinité de solutions. Mais on peut en distinguer quelques-unes qui sont particulièrement remarquables par leur élégance, leur simplicité, leur caractère géométrique.

Telles sont celles qu'a découvertes Halphen ; il montre en premier lieu qu'une courbe plane quelconque peut être considérée comme la perspective d'une courbe gauche admettant un point singulier unique à tangentes séparées.

Une autre solution, plus intéressante encore, consiste à appliquer à une courbe donnée un nombre quelconque de fois une même transformation. Si cette transformation est convenablement choisie, on voit les singularités se simplifier à chacune des opérations successives, jusqu'à ce qu'il ne reste plus que des singularités ordinaires.

On peut, par exemple, envisager les développées successives de la courbe.

L'étude de cette transformation a conduit Halphen à un théorème aussi remarquable que caché : à partir d'un certain rang, les degrés et les classes des développées successives d'une courbe algébrique forment deux progressions arithmétiques de même raison.

VI.

Le chef-d'œuvre d'Halphen est, aux yeux de beaucoup de géomètres, son Mémoire sur les courbes gauches algébriques, couronné en 1881, par l'Académie de Berlin. Cette théorie contraste d'une étonnante façon avec celle des courbes planes algébriques. Pour ces dernières, un seul nombre, le degré, suffit pour une classification complète. Si l'on suppose qu'il n'y a pas de point singulier, ce nombre nous fait connaître toutes les particularités de la courbe étudiée ; on peut en déduire, par des formules simples, la classe et le genre, et, s'il existe des singularités, on sait comment chacune d'elles modifie ces formules.

Les courbes gauches algébriques ne jouissent pas des mêmes propriétés ; il ne suffit pas, pour les définir, de se donner un nombre unique ; on ne peut pas non plus faire jouer à un système d'entiers le même rôle qu'au degré dans les courbes planes. Il ne peut être question d'écrire l'équation générale des courbes gauches du $n^{\text{ième}}$ degré ; cette expression n'a même aucun sens.

La théorie des courbes planes ressemble, si l'on veut me permettre cette comparaison, à ces cités modernes où les rues se coupent à angles droits et où le voyageur trouve tout de suite son chemin ; l'autre théorie fait penser aux villes anciennes dont le plan est dépourvu de symétrie, et dont les voies se croisent de la façon la plus capricieuse.

Pour se reconnaître dans un pareil dédale, le tact n'était pas moins nécessaire que la pénétration. Nous ne devons pas nous étonner dès lors qu'Halphen y ait si bien réussi.

Le genre n'est plus ici lié au degré par une relation algébrique, mais il satisfait à certaines inégalités, les unes presque évidentes, les autres très cachées et qu'une sagacité supérieure pouvait seule découvrir. Il en est de même de plusieurs autres nombres importants, par exemple du degré de la surface d'ordre minimum qui passe par la courbe.

Ces généralités remplissent les premiers Chapitres ; les derniers sont consacrés à l'étude de diverses courbes particulières, par exemple de celles qui sont tracées sur les quadriques.

Le problème était donc résolu ; mais, comme la solution n'était susceptible d'aucune expression analytique, elle aurait pu échapper au lecteur superficiel. Il fallait d'ailleurs éprouver la méthode, ce qu'Halphen n'a jamais manqué de faire. C'est pour cette raison qu'il termine son Mémoire par la classification complète des courbes des vingt premiers degrés et des courbes de degré 120.

Quelques-unes des circonstances que les travaux d'Halphen ont mises en lumière sont bien curieuses et inattendues. Il n'existe pas toujours des courbes gauches sans point singulier de degré d et de genre g. Si le degré d est donné, le genre g reste compris entre certaines limites. Il fallait d'abord déterminer le maximum et le minimum de g, et ce n'était pas chose aisée. Mais un fait que rien ne permettait de prévoir et qui ne se présente que pour les courbes de degré élevé, c'est que le nombre g ne peut pas prendre toutes les valeurs comprises entre ce maximum et ce minimum ; la série des genres présente des lacunes qui semblent d'abord distribuées sans aucune loi.

VII.

Tels sont les services qu'a rendus Halphen à la Géométrie des courbes et des surfaces algébriques. Pour en apprécier l'importance, il convient de considérer dans leur ensemble tous ces travaux géométriques. Ils sont, en effet, étroitement liés les uns aux autres,

malgré l'apparence contraire, et ils ont été inspirés par une pensée unique, ainsi que le comprendra aisément tout lecteur un peu attentif.

Tous se rattachent à la « Géométrie énumérative », à cette branche de la Science dont l'intérêt est considérable, qui doit ses premiers progrès à Chasles et qui a été cultivée après lui par les savants de tous les pays. Cette Géométrie a pour but de déterminer le nombre des points, des droites, des courbes ou des surfaces qui satisfont à certaines conditions données.

Une figure quelconque d'espèce donnée est toujours définie par un certain nombre de paramètres, et les conditions qu'on lui impose peuvent toujours se traduire par des relations algébriques entre ces paramètres. Tous ces problèmes se ramènent donc à la détermination du nombre des solutions communes à plusieurs équations algébriques. Ce nombre est égal au produit des degrés de ces équations; telle est la règle simple, et, si je puis m'exprimer ainsi, la règle brute qui semble répondre à toutes ces questions.

Si l'on s'en contentait, la Géométrie énumérative tiendrait en quelques lignes, mais elle perdrait en même temps son intérêt. Le plus souvent, toutes les solutions communes à un système d'équations ne conviennent pas au problème proposé : quelques-unes d'entre elles doivent être rejetées pour des raisons diverses.

Nous avons vu, par exemple, à propos de la théorie des caractéristiques, qu'on est conduit, dans certains cas, à laisser de côté certaines coniques dégénérescentes qu'on croirait d'abord devoir accepter comme solutions du problème.

Une courbe gauche est définie par deux équations qu'on peut choisir de diverses manières, et ces deux équations représentent deux surfaces ; dans le Mémoire d'Halphen, les deux surfaces sont un cône et un monoïde, qui admettent comme intersection, non seulement la courbe gauche envisagée, mais encore plusieurs droites. Dans toutes les questions relatives aux courbes gauches, les solutions

apparentes dues à la présence de ces droites doivent évidemment être rejetées.

Ce qu'il y a à faire, et ce qui exige autant de discernement et de sagacité que de dextérité analytique, c'est donc de distinguer les diverses espèces de solutions, de les énumérer séparément et surtout de reconnaître celles qui doivent être conservées.

Tout cela, dira-t-on, est une affaire de convention. Encore faut-il énoncer clairement cette convention, et l'analyse que j'ai donnée plus haut des travaux d'Halphen nous a montré que ce n'était pas toujours chose aisée.

On ne l'a malheureusement pas toujours fait ; une convention semblait naturelle, parce que l'on considérait les choses d'un certain biais ; on l'admettait sans l'énoncer explicitement. D'autres chercheurs se plaçaient ensuite à un point de vue différent et oubliaient cette convention tacite ; de là des contradictions tantôt apparentes, tantôt réelles.

En général, disait-on volontiers, il arrive ceci ou cela ; on oubliait que, sans une convention spéciale, le mot *en général* n'a aucun sens.

On a même quelquefois admis sans preuve suffisante que deux ou plusieurs équations étaient distinctes, simplement parce qu'on n'avait aucune raison de croire le contraire.

La Science glissait sur une pente dangereuse ; la Géométrie énumérative devait payer ses succès faciles du début par d'éclatantes déconvenues ; c'est là ce qui explique que, dans la théorie des caractéristiques, la même erreur ait été commise par Clebsch et Halphen, ainsi que je l'ai raconté plus haut. Encore ai-je oublié de citer deux autres savants qui, quelques années après, ont cru de leur côté démontrer le théorème inexact de Chasles.

Il appartenait à Halphen de rendre à cette branche de la Science la rigueur absolue sans laquelle les Mathématiques ne sont rien. Désormais les savants qui sauront comprendre les leçons d'un tel maître ne seront plus exposés à de semblables méprises.

Ce n'est pas tout. Dans ces sortes de questions, une formule générale comporte toujours des cas d'exception. On s'en consolait autrefois en les laissant de côté. Mais Halphen ne se contentait pas à si bon marché ; il ne regardait pas un problème comme résolu tant que quelques cas particuliers restaient sans solution.

La difficulté le plus souvent ne fait ainsi que reculer ; quand on est venu à bout d'un cas d'exception, on trouve qu'il y a des cas plus exceptionnels encore qui échappent à la nouvelle formule. Il semble que la solution se retire à mesure que le chercheur croit avancer et qu'elle finira par lasser sa patience.

Halphen a eu souvent la persévérance et le bonheur de la poursuivre dans ses derniers retranchements et de l'y forcer. On doit lui savoir gré d'avoir su fréquemment conserver à la solution, bien que le problème, à cause de ces exceptions innombrables, parût s'y mal prêter, ce caractère de généralité sans lequel il n'y a pas d'élégance.

Parmi les problèmes de la Géométrie énumérative, il n'en est pas de plus compliqué que celui qui consiste à déterminer en combien de points une courbe algébrique de degré donné, ou une surface algébrique, satisfait à une équation différentielle donnée, ou à une équation donnée aux dérivées partielles. Les travaux d'Halphen sur ce sujet sont dignes d'attirer l'attention, non seulement à cause de l'importance et de la difficulté de la question résolue, mais surtout parce qu'il a été ainsi conduit à la découverte des invariants différentiels qui devaient l'entrainer dans un domaine si différent et lui fournir tant d'occasions de servir la Science.

VIII.

Le procédé de la Science mathématique est toujours le même. Elle doit étudier des transformations de diverses natures, et, pour cela, elle doit rechercher ce qui demeure constant et inaltéré dans ces transformations. Partout elle a pour but l'étude des *groupes* et

pour moyen la recherche des *invariants*. Cela n'apparaît pas dans tous les cas avec la même évidence, bien que cela soit toujours vrai. Si l'on voit du premier coup que la Géométrie projective n'est autre chose que la théorie des substitutions linéaires, on n'aperçoit pas aussi vite que la Géométrie élémentaire se ramène à celle des substitutions orthogonales.

Envisageons une courbe donnée, un point de cette courbe, les coordonnées de ce point et les dérivées des divers ordres de ces coordonnées. Il peut arriver qu'un certain groupe de transformations n'altère pas certaines fonctions de ces dérivées. Ces fonctions sont alors des invariants par rapport à ce groupe.

Considérons, par exemple, le groupe des changements orthogonaux de coordonnées ; on a eu depuis longtemps l'idée, sans cependant prononcer le mot, d'étudier les invariants relatifs à ce groupe. C'est là le but de la Géométrie infinitésimale ordinaire et de la théorie de la courbure.

Halphen a étudié le groupe des substitutions linéaires, c'est-à-dire des changements projectifs des coordonnées : certaines fonctions de leurs dérivées ne sont pas altérées par ces substitutions : Halphen leur donne le nom d'*invariants différentiels* ; dans un Mémoire très important, il en fait la théorie complète et parvient à déterminer les plus simples et les plus remarquables d'entre eux. On peut dire que la théorie des invariants différentiels est à la théorie de la courbure ce que la Géométrie projective est à la Géométrie élémentaire.

Mais cette théorie allait recevoir une application bien inattendue. Peu de temps après, en effet, Laguerre introduisit l'importante notion des invariants des équations différentielles linéaires et construisit quelques-uns de ces invariants. Il ne remarqua pas leur analogie avec les invariants différentiels d'Halphen.

Halphen, pour qui cette étude était toute récente, l'aperçut immédiatement.

Si l'on considère une équation linéaire du $n^{\text{ième}}$ ordre définissant y

en fonction de x ; si l'on regarde les valeurs de n intégrales pour une valeur donnée de la variable x comme les coordonnées homogènes d'un point dans l'espace à $n-1$ dimensions, ce point décrira une courbe quand on fera varier x. Cette courbe ne changera pas quand on multipliera y par une fonction quelconque de x ou quand on changera de variable indépendante. Quand on remplacera les n intégrales considérées par n autres intégrales particulières quelconques, la courbe subira une transformation projective et ses invariants différentiels ne seront pas altérés. Il y a donc identité entre les invariants d'Halphen et ceux de Laguerre.

Cette seule remarque, jointe à ses travaux antérieurs, mettait Halphen en possession d'une théorie complète des invariants de Laguerre. Il ne l'avait pas encore publiée quand l'Académie des Sciences mit au concours le problème de l'intégration des équations linéaires. Halphen disposait pour cette étude d'un instrument puissant et précieux.

Les formes intégrables connues à cette époque étaient les équations à coefficients constants, quelques cas particuliers de l'équation de Gauss, certaines équations du second ordre à quatre points singuliers, et les équations à coefficients doublement périodiques de M. Picard.

Il était évident que beaucoup d'autres équations pouvaient être ramenées à ces formes intégrables ; mais il n'était pas facile de reconnaître sur une équation donnée si cette réduction était possible et surtout de l'effectuer complètement. Il est aisé de voir que ce problème ne diffère pas en réalité de la recherche des invariants. Dans l'étude d'un groupe, on cherche toujours à réduire l'objet auquel s'appliquent les transformations de ce groupe à son expression la plus simple ; si cet objet est une équation, par exemple, il est clair que les coefficients de l'équation réduite seront des invariants.

Le succès d'Halphen, armé comme il l'était, n'était donc pas douteux, mais il aurait pu être moins complet. Nous avons vu avec

quelle ingéniosité il savait triompher des difficultés de détail que beaucoup d'autres négligent, peut-être moins par dédain que par impuissance. Nous savons aussi qu'il ne s'arrêtait jamais sans avoir achevé son œuvre ; aussi celle qu'il présentait au jugement de l'Académie et qui lui valut le Grand Prix des Sciences mathématiques, était-elle de tous points parfaite et digne de la haute récompense qu'elle a obtenue.

L'application de la théorie des invariants différentiels à l'intégration des équations linéaires nous réservait encore d'autres surprises. En égalant à zéro quelques-uns de ces invariants, dont la signification était bien connue, Halphen forma un grand nombre d'équations linéaires qui devenaient ainsi immédiatement intégrables, et dont le caractère aurait certainement échappé au chercheur s'il les avait abordées par une autre voie.

Certaines équations linéaires jouissent de cette propriété remarquable qu'il existe des relations algébriques non linéaires entre plusieurs solutions et leurs dérivées ; rechercher ces équations et les intégrer ensuite lorsque cela est possible, c'était un problème où les invariants différentiels fournissaient des ressources précieuses, et qui par là devait tenter Halphen. Le succès ne pouvait lui échapper et ne lui échappa pas, en effet.

Je ne puis quitter les équations différentielles sans mentionner celles qui se rattachent aux fonctions elliptiques, à la transformation, à la division de l'argument. Les travaux d'Halphen les ont rendues célèbres ; mais j'aurai l'occasion de revenir sur ce sujet à propos du grand *Traité des fonctions elliptiques*.

Halphen a rendu à l'Analyse un autre service signalé. Au commencement du siècle, on avait conservé la fâcheuse habitude de se servir des développements sans se préoccuper de leur convergence. Abel, qui a pourtant l'un des premiers protesté contre ce détestable usage, ne s'en est pas toujours abstenu ; dans un ouvrage de jeunesse, qu'à vrai dire il n'a pas voulu publier, Halphen a appliqué la série dite

d'Abel dans des cas où elle est certainement divergente. Avertis par tant d'insuccès, les mathématiciens ont renoncé depuis longtemps à cette trompeuse pratique. Il en résulte que bien des développements qui pourraient encore être utiles, si on les employait à propos, sont tombés en désuétude. Il faut donc que les analystes les reprennent aujourd'hui pour reconnaître dans quelles conditions leur emploi peut être légitime. C'est ce qu'a fait Halphen pour la série d'Abel et pour quelques autres suites analogues. « Ce n'était là qu'un fragment détaché d'un travail fort long, dit l'auteur dans sa Notice, et que je n'ai pas encore achevé. »

Il ne devait jamais l'être ; le savant géomètre en fut détourné d'abord par la rédaction de son *Traité des fonctions elliptiques*, et la mort ne lui permit pas d'y revenir.

Halphen s'est peu occupé de recherches arithmétiques pour lesquelles cependant il semblait né. Les travaux qu'il a publiés dans cette direction feraient regretter qu'il n'y ait pas consacré plus de temps, si nous ne savions d'autre part comment son temps a été employé. Je citerai seulement un Mémoire intitulé : *Sur diverses formules récurrentes concernant les diviseurs des nombres entiers*, où il retrouve, par une voie tout arithmétique, des résultats obtenus par la théorie des fonctions elliptiques, et surtout une Note *Sur l'approximation des sommes des fonctions numériques*.

IX.

Les dernières années d'Halphen ont été consacrées à une œuvre de fort longue haleine que la mort ne lui a malheureusement pas laissé achever : je veux parler de son *Traité des fonctions elliptiques* et de leurs applications. Le but de ce grand Ouvrage est nettement défini dans la Préface ; les fonctions elliptiques n'ont pendant longtemps intéressé que les mathématiciens purs : les physiciens, les astronomes ne s'en servaient pas. Cela devait être : il faut d'abord

qu'une théorie soit à peu près complètement achevée avant qu'elle puisse recevoir des applications, et toutes les parties de la Science doivent rester, pendant une première période, la propriété exclusive des théoriciens.

En ce qui concerne les fonctions elliptiques, cette première période a été longue et les savants qui, sans être analystes, ont besoin des sciences exactes, ont conservé longtemps pour ces transcendantes une crainte respectueuse.

Cela tient moins à la difficulté même de cette théorie qu'aux notations aussi compliquées que peu uniformes dont les géomètres l'avaient surchargée, et à ces innombrables formules rébarbatives que la mémoire refusait de retenir. Un traité d'ensemble où les notations, simplifiées autant que possible, seraient ramenées à l'unité, était devenu nécessaire ; le traité de Briot et Bouquet, déjà ancien, ne pouvait plus suffire ; il avait d'ailleurs été écrit plutôt pour les théoriciens que pour les hommes curieux des applications.

Tel est le caractère qu'Halphen a voulu donner à son livre et qui en fait l'originalité et l'intérêt.

Les notations employées sont celles de Weierstrass ; grâce à l'influence de cet illustre géomètre, les fonctions θ, sn, cn, dn, qui ont longtemps régné seules, sont aujourd'hui détrônées, au moins en Allemagne, par les fonctions $p(u)$ et $\sigma(u)$.

Le Livre d'Halphen est le premier grand Ouvrage français où l'on ait attribué à ces transcendantes un rôle prépondérant. L'avantage des notations nouvelles, au point de vue des applications, est évident. La fonction $p(u)$, qui n'a qu'un seul infini double, est la plus simple des transcendantes doublement périodiques ; elle est du second ordre, tandis que les fonctions de Jacobi étaient du quatrième ordre. La fonction σ est symétrique par rapport aux deux périodes ; avec la fonction Θ, l'une de ces deux périodes jouissait, pour ainsi dire, d'une sorte de privilège qui pouvait sembler arbitraire. C'est surtout l'ancien module k qui me semble avantageusement remplacé

par les invariants g_2 et g_3. Il encombrait toute la théorie de la transformation, en compliquait les formules, en masquait la simplicité.

Ce sont là des avantages théoriques, mais la supériorité pratique des notations nouvelles en découle directement. Quand on voulait appliquer les anciennes formules à une question quelconque de Mécanique ou de Physique, il fallait distinguer trois cas, suivant que le polynome fondamental du quatrième degré avait 0, 2 ou 4 racines réelles. Chacun d'eux exigeait une théorie spéciale. Aujourd'hui, une seule théorie suffit pour les trois cas ; sans doute, la discussion finale n'est pas évitée et elle ne peut pas l'être, mais elle est rejetée à la fin du calcul.

Je vois sans regret les fonctions *sn*, *cn* et *dn* reléguées au second plan ; mais qu'il me soit permis de plaider un peu en faveur de la fonction Θ ; la série si simple qui la représente met presque immédiatement en évidence ses propriétés essentielles, et cet avantage me semble compenser bien des inconvénients ; je crois donc qu'elle ne tardera pas, après une disgrâce passagère, à reprendre son rang à côté de la fonction σ.

Le premier Volume est consacré tout entier à la théorie ; dans les treize premiers Chapitres, elle est exposée complètement et sans faire appel à la théorie générale des fonctions ; dans le quatorzième, l'auteur retrouve les mêmes résultats en s'appuyant sur les principes de l'Analyse moderne. A-t-il voulu par là montrer, par un exemple éclatant, la puissance de cette analyse qui conduit, en si peu de pages, à un but que l'on ne pouvait atteindre sans elle qu'à l'aide de tant de génie et au prix de tant d'efforts? Non, son but est tout différent et il l'explique lui-même dans sa Préface ; ses premiers Chapitres n'ont pas été écrits pour les géomètres de profession ; sans doute, ils trouveront beaucoup à y apprendre et ils se réjouiront d'y rencontrer le spectacle de nombreuses difficultés vaincues et d'une sorte de gageure gagnée. Mais cette première partie de ce grand Ouvrage est avant tout destinée aux savants qui veulent devenir

capables d'appliquer ces transcendantes à la Mécanique et à la Physique, et qui ne sont pas au courant des travaux de Cauchy. Ils pourront y étudier la théorie des fonctions elliptiques, réduite à une sorte de Trigonométrie, un peu plus compliquée que celle qu'on enseigne aux élèves d'élémentaires, et n'auront besoin que de connaître la définition des intégrales réelles.

Halphen a-t-il réussi à rendre cette doctrine abordable à des mathématiciens aussi peu avancés? Je crois que oui, mais ce n'est pas à nous d'en juger.

Les divers développements en séries ou en produits tiennent une grande place dans ce premier Volume; aucun, sans doute, n'est nouveau, mais ils sont tous reliés les uns aux autres d'une façon simple et exposés par des procédés élégants et ingénieux.

Je citerai surtout, page 405, la manière d'obtenir le développement de Θ en produit en partant du développement en série; elle est plus directe et moins artificielle que celle que nous devons à Jacobi.

Le second Volume a pour objet les principales applications des fonctions elliptiques.

L'auteur commence par les applications mécaniques, et il traite successivement de la rotation d'un corps solide soustrait à l'action de toute force et tournant autour d'un point fixe, de celle d'un corps grave de révolution suspendu par un point de son axe, du mouvement d'un corps solide dans un liquide parfait indéfini en l'absence de force accélératrice, de la courbe élastique, de l'attraction de l'anneau elliptique de Gauss.

Viennent ensuite les applications géométriques aux lignes géodésiques des ellipsoïdes de révolution, auxquelles se rattachent divers problèmes pratiques de Géodésie, aux polygones de Poncelet, inscrits à une conique et circonscrits à une autre conique, aux cubiques planes et enfin aux biquadratiques gauches.

Puis les applications au Calcul intégral, la quadrature des inté-

grales pseudo-elliptiques, l'intégration de l'équation d'Euler, l'étude approfondie de l'équation de Lamé, si intimement liée à tant de problèmes importants de Physique et d'Astronomie, et enfin l'intégration de plusieurs classes étendues d'équations différentielles linéaires.

Qu'on me pardonne cette longue énumération ; j'ai voulu faire voir à quelle variété de sujets s'appliquent ces transcendantes remarquables et montrer, en même temps, qu'Halphen n'en avait négligé aucun. Chacun de ces Chapitres peut être regardé comme un véritable Mémoire original. Tantôt l'auteur a tout à créer, tantôt il renouvelle la question par un mode nouveau d'exposition.

Quelques-uns de ces problèmes, en effet, étaient résolus, mais avec les anciennes notations et les anciennes méthodes, qui entraînent les inconvénients dont j'ai parlé plus haut. Dans le livre que nous analysons, ces inconvénients sont évités et il en résulte, dans les démonstrations, de grandes simplifications. La fatigue du lecteur est allégée par l'emploi d'une notation uniforme et rationnelle.

Le Chapitre XIV me paraît surtout digne de retenir l'attention. C'est là un de ces Ouvrages accomplis qui satisfont pleinement l'esprit et auxquels Halphen nous avait accoutumés. La question est des plus ardues, il s'agit de développer en fraction continue la racine carrée d'un polynome du quatrième degré. Ce problème se rattache, Jacobi l'avait remarqué, à la multiplication de l'argument, mais on n'obtient ainsi que les réduites successives ; on ne sait rien sur la convergence. Les formules de Jacobi sont données sans démonstration ; Halphen les a démontrées et considérablement simplifiées. Je louerais l'élégance de son exposition, si la lecture des Chapitres précédents ne nous avait trop habitués à cette qualité pour qu'elle puisse encore nous surprendre. J'aime mieux m'étendre sur la manière dont la question de la convergence est traitée. La théorie des fractions continues algébriques est une sorte de *terra incognita* où Laguerre seul avait pénétré ; Halphen y est entré à son tour, et si la carte en est

encore presque blanche, elle est traversée aujourd'hui par une sorte d'itinéraire semblable à ceux que de hardis pionniers ont tracés à travers les solitudes inconnues de l'Australie.

J'ajouterai que la théorie de ces développements en fractions continues est rattachée par l'auteur à celle des covariants et à celle des intégrales pseudo-elliptiques.

Le troisième Volume n'a pas paru ; on pourrait presque dire qu'il n'en paraîtra rien. Il devait contenir la théorie de la transformation et les applications à l'Arithmétique. Quelques Chapitres sur la transformation ont été rédigés entièrement et ne tarderont sans doute pas à être imprimés ; mais les résultats déjà acquis par Halphen et qui n'attendaient que leur forme définitive étaient bien autrement considérables.

L'étude de la multiplication complexe l'avait longtemps occupé et vivement passionné. La théorie, dont on se contente encore, lui semblait à certains égards un peu incomplète et barbare ; les équations algébriques, auxquelles on est conduit, contiennent des facteurs parasites qui sont uniquement dus au mode de calcul employé, et qu'Halphen parvenait à faire disparaître dès le début du calcul. La résolution effective de ces équations par radicaux avait été également l'objet de ses efforts, et il l'avait obtenue dans le cas de nombres premiers déjà relativement grands, tels que 17 et 23. Toutes ces richesses sont perdues, et ses notes mêmes n'en contiennent aucune trace. Perte irréparable jusqu'à ce qu'il naisse un autre Halphen.

ŒUVRES

DE

G.-H. HALPHEN.

NOTICE

RÉDIGÉE PAR G.-H. HALPHEN

SUR SES

TRAVAUX MATHÉMATIQUES

A L'OCCASION

DE SA CANDIDATURE A L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

(Paris, Gauthier-Villars; 1885.)

SOMMAIRE : Géométrie des complexes et des congruences de droites. — Théorie des caractéristiques pour les coniques. — Théorie générale des courbes algébriques. — Classification des courbes gauches algébriques. — Équations différentielles et invariants. — Fonctions elliptiques. — Théorie des nombres. — Théorie des séries. — Sujets divers.

En 1861, un Mémoire de M. de Jonquières (¹) marqua l'apparition d'une Géométrie nouvelle, développée bientôt avec éclat par M. Chasles.

Dans cette Géométrie, ou plutôt cette théorie géométrique de l'élimination, on se propose de dénombrer les figures, d'une espèce déterminée, qui satisfont à plusieurs conditions distinctes. C'est un vaste problème, auquel j'ai travaillé longtemps.

Je l'essayai d'abord pour les figures les plus simples. Il était résolu

---

(¹) *Théorèmes généraux concernant les courbes géométriques planes d'un ordre quelconque* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2ᵉ série, t. VI, p. 113).

déjà pour la figure composée d'un simple point, ou d'un plan, ou d'une droite dans un plan; je l'envisageai pour la ligne droite dans l'espace.

GÉOMÉTRIE DES COMPLEXES ET DES CONGRUENCES DE DROITES.

Ce problème me plaçait ainsi dans le domaine de la Géométrie de Plücker : la ligne droite y est prise pour élément de l'espace, comme le point dans la Géométrie analytique ancienne, le point ou le plan dans la moderne. De même que la Géométrie du point envisage des courbes et des surfaces, lieux de points, de même la Géométrie de la ligne droite considère des surfaces réglées, des *congruences* et des *complexes*, lieux de droites satisfaisant à des conditions communes.

Il y avait là deux problèmes à résoudre : trouver le nombre des droites appartenant, à la fois, à une surface réglée et à un complexe; ou bien, appartenant à deux congruences. La solution du premier pouvait s'offrir d'elle-même, grâce à la représentation analytique des complexes, trouvée par Plücker; celle du second était plus cachée. La voici, telle que je la donnai en 1869 (¹) : *Le nombre des droites communes à deux congruences est égal au produit des ordres de ces congruences, augmenté du produit de leurs classes.* (L'ordre et la classe sont respectivement le nombre des droites d'une congruence, qui passent en un même point, ou sont dans un même plan.) Cette proposition, sur laquelle je dus revenir deux ans plus tard (²), a encore été démontrée depuis par M. Zeuthen (³) et par M. Schubert (⁴).

Un petit Mémoire de 1873 (⁵) montre des applications, dont celle-ci : nombre des tétraèdres déterminés par la condition que chacune des six arêtes satisfasse à deux conditions données.

(¹) *Sur le nombre des droites qui satisfont à des conditions données* (*C. R. Acad. Sc.*, t. LXVIII, 1869, p. 142).

(²) *Sur les droites qui satisfont à des conditions données* (*C. R. Acad. Sc.*, t. LXXIII, 1871, p. 1441); *Sur les droites qui satisfont à des conditions données* (*C. R. Acad. Sc.*, t. LXXIV, 1872, p. 41).

(³) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXVIII, 1874, p. 1556.

(⁴) *Mathematische Annalen*, t. X, 1876, p. 96.

(⁵) *Applications nouvelles d'un théorème sur les congruences de droites* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. I, 1873, p. 253).

THÉORIE DES CARACTÉRISTIQUES POUR LES CONIQUES.

C'est pour les sections coniques, en Géométrie plane, que les circonstances donnaient le plus d'attrait au grand problème de l'élimination. Il offre deux cas différents; l'un d'eux, grâce à M. Chasles, attirait surtout l'attention. Voici un résumé emprunté à cet illustre géomètre [1] :

« Un système de coniques assujetties à quatre conditions est défini » par *deux éléments*, qui sont, l'un, le nombre des coniques du système » qui passent par un point donné quelconque, et l'autre, le nombre » des coniques qui touchent une droite..... Ces deux nombres sont » appelés les *caractéristiques* du système, et sont désignés par les » lettres μ, ν; et l'on dit le *système* (μ, ν)..... Les deux caractéris- » tiques μ, ν suffisent pour faire connaître toutes les propriétés du » système, c'est-à-dire que chacune de ces propriétés s'exprime par » une fonction des deux nombres μ, ν; cette fonction est toujours » un binome, tel que $(\alpha\mu + \beta\nu)$, où l'un des coefficients α, β peut » être nul.

» Ainsi l'on trouve que : *le lieu des sommets des coniques d'un* » *système* (μ, ν) *est une courbe de l'ordre* $(2\mu + 3\nu)$.

» *Le lieu des foyers des coniques est une courbe d'ordre* 3ν.

. . . .

» *Le nombre des coniques qui touchent une courbe de l'ordre* m » *et de la classe* n *est* $(n\mu + m\nu)$, *etc.*

. . . .

» Puisque les propriétés du système (μ, ν) s'expriment toujours » par un binome $(\alpha\mu + \beta\nu)$, on en conclut cette conséquence très » remarquable que *deux propriétés d'un système suffisent pour* » *déterminer les deux caractéristiques et, par suite, toutes les* » *autres propriétés du système*. En d'autres termes : *Un système* » *est défini par deux de ses propriétés*. »

Dans le passage que je viens de citer, M. Chasles rapporte six exemples, dont je n'ai transcrit ici que trois. Ses Communications de 1864, à l'Académie, en contenaient beaucoup plus. C'est ainsi, par des exemples nombreux et divers, qu'il avait cherché à faire apparaître une loi commune : partout il trouvait que *le nombre des*

---

[1] *Rapport sur les progrès de la Géométrie,* par M. Chasles, 1870, p. 257-260. Les mots qui sont ici en *italique* sont tels dans l'original.

coniques d'un système (μ, ν), *qui satisfont à une nouvelle condition, est* $(\alpha\mu + \beta\nu)$, *les nombres* α *et* β *variant avec la condition, sans dépendre du système* (μ, ν).

Démontrer un tel théorème, ce fut, dès 1869, le but de mes efforts [1]. L'extrême bienveillance dont M. Chasles avait l'habitude me permit de lui soumettre parfois mes tentatives, et je dois dire qu'il se montrait sceptique à l'endroit de leur succès. Mais enfin, en 1873, le but, je le croyais du moins, était atteint, et M. Chasles présentait à l'Académie des Sciences un résumé de mon travail [2], dont la publication complète se fit successivement dans le *Bulletin de la Société mathématique*, et commença la même année [3].

A ce moment parut le sixième volume des *Mathematische Annalen*. Le célèbre géomètre Clebsch venait de mourir, léguant à ce volume, comme une sorte de testament, un Mémoire qui me ravissait l'honneur de la priorité [4]. Il me restait cependant la satisfaction d'avoir traité des problèmes bien plus généraux, se rapportant non seulement aux coniques dans le plan et dans l'espace, mais encore aux surfaces du second degré. Enfin je demeurais l'inventeur de certains *produits symboliques* [5], grâce auxquels tous les résultats de cette théorie acquéraient une admirable simplicité.

Une troisième démonstration suivit bientôt, due, celle-là, à M. Lindemann [6], qui débutait alors en publiant les Leçons de Clebsch et s'est illustré depuis, dans la voie ouverte par M. Hermite, en démontrant l'impossibilité de la quadrature du cercle. Un savant danois, M. Zeuthen, auteur de recherches importantes sur les caractéristiques, comme aussi sur beaucoup d'autres parties de la Géométrie, en rendit compte : « Le théorème de M. Chasles, dit-il [7], a été

---

(1) J'en fus détourné quelque temps par un autre travail, le *Mémoire sur la classification des courbes gauches* (*C. R. Acad. Sc.*, t. LXX, 1870, p. 380), puis par les événements des années suivantes.

(2) *Sur les caractéristiques dans la théorie des coniques sur le plan et dans l'espace, et des surfaces du second ordre* (*C. R. Acad. Sc.*, t. LXXVI, 1873, p. 1074).

(3) *Mémoire sur la détermination des coniques et des surfaces du second ordre, en trois parties* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. I, 1873, p. 130 et 226; t. II, 1873, p. 11).

(4) *Zur Theorie der Charakteristiken*, von A. Clebsch, in Göttingen (*Math. Ann.*, t. VI, 1873, p. 1.) Ce Mémoire est daté du 31 mai 1872.

(5) Ces produits symboliques ont été largement mis à profit par M. Schubert dans son Ouvrage intitulé : *Kalkül der Abzählenden Geometrie.*

(6) *Vorlesungen über Geometrie von Alfred Clebsch*, p. 397 et suiv.; Leipzig, 1876.

(7) *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques,* t. X, 1876, p. 120-122.

» trouvé par une sorte d'induction. Le grand nombre de cas où la loi » énoncée s'était confirmée, et le défaut de cas qui y fussent contraires, » ne formaient pas toutefois les seules raisons qu'on eût pour » l'adopter..... Toutefois ces considérations étaient trop vagues pour » constituer une démonstration formelle. Il était donc juste que les » géomètres s'intéressassent vivement aux démonstrations ingé- » nieuses de Clebsch et de Halphen, bien que même, en s'éloignant » beaucoup des considérations dont nous venons de parler, elles » devinssent longues et difficiles à suivre. M. Lindemann a réussi » à établir une démonstration algébrique dont la simplicité cor- » respond à celle du théorème..... Il est très difficile d'affirmer qu'en » des démonstrations de cette espèce il ne reste plus aucun point » faible; mais, en tout cas, nous croyons que la voie choisie est » bonne, quand même il y aurait dans le détail encore quelque pré- » caution à avoir ou quelque expression à corriger. »

Le concert de tant de savants distingués, Chasles, Clebsch, Zeuthen, Lindemann, aux noms desquels Clebsch associe encore celui de Cayley, ne semblait permettre aucun doute à l'égard d'un théorème, admis d'abord sur la foi de l'induction, puis démontré avec le plus grand soin. Et cependant la démonstration de M. Clebsch, où les résultats se montrent nettement entachés d'erreur, celle de M. Lindemann, dans laquelle on pourrait voir une pétition de principes, en me révélant les fautes d'autrui, me firent craindre pour moi-même; soumettant ma démonstration à une critique aussi sévère, j'y reconnus un point douteux.

« Dans tout système de coniques, dit M. Chasles ([1]), il existe, en » général, deux sortes de cas particuliers de ces courbes : elles » peuvent être ou l'ensemble de deux droites, ou l'ensemble de deux » points..... Un système de deux points peut d'ailleurs être consi- » déré comme représentant une conique *infiniment aplatie* dont les » deux points sont les sommets.

» Le nombre de ces cas particuliers, nous pouvons dire de ces » *coniques exceptionnelles* ou *quasi-coniques*, se peut déterminer » et s'exprime, de même que toutes les propriétés du système, en » fonction des deux caractéristiques.

» Les coniques représentées par deux droites sont en nombre

([1]) *Rapport sur les progrès de la Géométrie*, p. 260.

» $2\nu - \mu$, et les coniques infiniment aplaties en nombre $2\mu - \nu$....
» Mais il se présente ici un fait bien remarquable : ces nombres
» $2\mu - \nu$, $2\nu - \mu$ n'expriment pas des nombres *effectifs*, parce que
» chacune de ces *quasi-coniques* peut avoir un certain ordre de
» multiplicité, c'est-à-dire peut compter pour plusieurs, comme si
» plusieurs coïncidaient ensemble, ce qui alors en réduit le nombre
» effectif. »

En réalité, il se trouve, dans les systèmes de coniques, des cas particuliers d'une troisième sorte : la conique peut dégénérer, non plus en deux droites et leur point d'intersection, comme dans la première; ni en deux points et la droite qui les joint, comme dans la seconde; mais en un seul point et une seule droite. Ce troisième mode de dégénérescence n'était peut-être pas resté ignoré; mais, comme il tient à la fois des deux autres, dont il est, pour ainsi dire, la superposition, et qu'effectivement les coniques dégénérées suivant ce mode figurent à la fois dans les deux nombres $2\mu - \nu$ et $2\nu - \mu$, on ne se croyait pas obligé d'en tenir un compte à part; on supposait *tacitement* que chacune d'elles jouait, dans toute question, le rôle de quelques coniques dégénérées suivant le premier mode et de quelques autres suivant le second mode.

Cette hypothèse, dès que je la vis nettement, me surprit beaucoup : elle avait son analogue dans une autre théorie, dont j'aurai bientôt à parler (¹); là, je la savais fausse. Était-elle donc exacte ici?

Pour dissiper les doutes, il fallait, je m'en aperçus aussitôt, préciser une notion qui, jusque-là, était restée vague, celle de l'*indépendance* entre le système de coniques, d'une part, et la condition supplémentaire qu'on impose, d'autre part, aux coniques de ce système. Souvent M. Chasles avait négligé de la mentionner; mais chacun la restituait sans peine (²). Dans chaque exemple, en effet, rien n'est plus simple; mais, dans la théorie générale, on ne voit pas d'abord comment préciser cette indépendance.

(¹) *Voir* p. 18.

(²) Cette omission a été la source de quelques erreurs, facilement rectifiées; on peut en avoir une trace dans le *Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 2ᵉ série, t. XLIV, p. 656; 1877. La notion de l'indépendance ne paraît avoir été comprise ni par Clebsch, ni par Lindemann. M. Chasles l'avait mentionnée, dans les termes les plus formels, en 1864 (*C. R. Acad. Sc.*, t. LIX, p. 356).

J'emprunte à l'un de mes Mémoires [1] la solution de cette difficulté :

« Disons tout d'abord que la question est portée sur le terrain de » la Géométrie projective; par suite, toute condition imposée à une » conique devra être mise sous forme projective. . . . .

» *Une condition quelconque imposée à une figure peut être » traduite, sous forme projective, par une relation numérique » entre les coordonnées de cette figure et celles de quatre points.*

» *Soit* Φ *une condition projective donnée entre une conique » et quatre points* t, u, v, w;

» *Soit, d'autre part,* S *un système de coniques donné;*

» *On envisage les coniques du système* S *qui satisfont à la » condition* Φ, *et l'on demande de discuter le problème de la » recherche de ces coniques, en examinant :*

» 1° *S'il y a des solutions indépendantes des points* t, u, v, w, » *et quelles sont ces solutions;*

» 2° *Quel est le nombre des solutions distinctes qui dépendent » de ces points, lorsqu'ils restent indéterminés.*

» La discussion complète exigerait, en troisième lieu, l'examen » des diverses particularités que peuvent présenter ces dernières » solutions, en se réunissant, soit entre elles, soit avec les précé- » dentes, lorsque les points arbitraires de Φ occupent des positions » particulières. Cette dernière partie de la discussion est formellement » exclue de notre programme, et c'est en quoi consiste l'*indépen- » dance* supposée entre le système S et la condition Φ. »

Possédant nettement ces deux notions de l'indépendance et des coniques dégénérées, je pus enfin reconnaître que le théorème de M. Chasles ne s'applique pas à tous les cas. J'en dis quelques mots au Congrès de l'Association française à Clermont-Ferrand, et m'empressai aussitôt de signaler à l'Académie, le 4 septembre 1876 [2], des exemples simples et concluants. Bientôt après, le 13 novembre de la même année, je présentai un Mémoire où, non seulement est expliqué avec précision dans quel cas le théorème s'applique, mais encore est donnée, pour tous les cas, la véritable solution.

---

(1) *Sur la théorie des caractéristiques pour les coniques* (*Proceed. of the Lond. math. Soc.*, t. IX, 1877, nos 133 et 134; *Math. Annalen*, t. XV, 1877, p. 16).

(2) *Sur les caractéristiques des systèmes de coniques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. LXXXIII, 1876, p. 537).

Voici un passage de l'Extrait ([1]) qui accompagnait ce Mémoire :

« Un système de coniques peut contenir des figures singulières de » trois espèces distinctes : 1° le point avec deux droites passant en » ce point; 2° la droite avec deux points situés sur cette droite; » 3° la droite et un seul point. Je désigne, pour abréger, ces singu- » larités par les lettres A, A', B. La première A n'est qu'une singu- » larité tangentielle, comme sur les courbes, les inflexions et les » tangentes doubles. La seconde A' est la corrélative de A. Les singu- » larités A et A' sont *ordinaires*. La troisième B est une singularité » *élevée*. Cela posé, je démontre que :

» Théorème I. — *Si un système ne contient que la singularité* A, » *le nombre des coniques de ce système qui satisfont à une condi-* » *tion quelconque est le produit de deux nombres, dont l'un ne* » *dépend que du système, l'autre que de la condition.* C'est le » résultat trouvé par M. de Jonquières.

» Théorème II. — *Si un système ne contient que les singula-* » *rités ordinaires, le nombre des coniques de ce système qui* » *satisfont à une condition quelconque est* $\alpha\mu + \beta\nu$, μ *et* ν *étant* » *les caractéristiques du système, et* α, β *deux nombres ne dépen-* » *dant que de la condition.*

» Si le système contient la singularité B, ce dernier théorème ne » s'applique plus, à moins que la condition ne soit soumise, à son » tour, à des restrictions. A cet égard, je démontre les deux propo- » sitions suivantes :

» Théorème III. — *Si, pour une condition donnée* Φ, *le nom-* » *bre* β (défini au théorème II) *est nul, le nombre des coniques* » *d'un système quelconque qui satisfont à la condition* Φ *est égal* » *à* $\alpha\mu$.

» Théorème IV. — *Pour que le nombre des coniques satisfai-* » *sant à une condition donnée* Φ, *et faisant partie d'un système* » *quelconque* (μ, ν), *soit égal à* $\alpha\mu + \beta\nu$ (α et β étant définis par le » théorème II), *il faut et il suffit que le nombre des coniques*

([1]) *Sur les caractéristiques des systèmes de coniques et de surfaces du second ordre* (*C. R. Acad. Sc.*, t. LXXXIII, 1876, p. 886).

» *satisfaisant à la condition* Φ *et ayant, en un point donné,* » *des contacts du troisième ordre avec une courbe donnée, soit* » *égal à* $\alpha + \beta$. »

Dans tous les autres cas, le nombre cherché est inférieur à $\alpha\mu + \beta\nu$; la différence ou *correction* a une expression analytique incomparablement plus complexe, et dont voici le caractère.

Pour chaque conique dégénérée suivant le mode B, il y a, dans un système, deux nombres caractéristiques m, n. D'autre part, dans une condition Φ, il y a, outre α, β, une suite de couples de nombres entiers (σ_1, σ'_1), (σ_2, σ'_2), ... Pour chaque conique dégénérée, il faut choisir, parmi ces couples, celui qui rend minima la quantité $n\sigma + m\sigma'$, puis faire la somme de chacun de ces minima, en prenant successivement chaque conique dégénérée. Cette somme est précisément la *correction* dont il s'agit.

Si j'ajoute que l'on peut composer des conditions Φ, pour lesquelles la suite des couples (σ, σ') soit aussi prolongée que l'on voudra, qu'on peut même se donner une telle suite à volonté, on voit combien est grande la distance qui sépare le théorème général de celui qu'on avait supposé. Non seulement deux éléments ne caractérisent pas tout système de coniques dans les problèmes dont il s'agit ici, mais *il n'y a aucune limite au nombre des éléments caractéristiques.*

Le Mémoire qui contient ces résultats fut imprimé deux ans plus tard ([1]). On y trouve, avec de nombreux exemples, la même théorie pour les surfaces du second ordre.

Dans l'intervalle, j'avais adressé à la Société mathématique de Londres un travail moins étendu sur la même question. Je n'y traitai qu'un cas particulier, choisi cependant de manière à mettre en évidence la nature des résultats généraux, et surtout, la méthode étant différente, à les confirmer. A la fin de ce Mémoire ([2]), j'introduisis la notion nouvelle des *équivalents :*

« M. Chasles ([3]) a donné le nom de *conditions élémentaires* aux » deux conditions les plus simples qu'on puisse imposer à une » conique dans un plan, celle de passer par un point, celle de

([1]) *Sur les caractéristiques des systèmes de coniques et de surfaces du second ordre* (*Journ. Éc. Polyt.*, XLVe Cahier, 1878, p. 27).

([2]) *Sur la théorie des caractéristiques pour les coniques* (*Proceed. of the Lond. math. Soc.*, t. IX, 1877, n°s 133 et 134; *Mathematische Annalen*, t. XV, 1877, p. 16).

([3]) Extrait du Mémoire cité dans la note suivante.

» toucher une droite. Je désignerai ces deux conditions par les » lettres P et D.

» J'introduis une catégorie nouvelle de conditions élémentaires, » dont voici la définition :

» *Soient, sur une droite* L, *trois points* y, z, t; *soient* x, x' *les* » *points où* L *est rencontrée par une conique* A. *Soit* r *la diffé-* » *rence des deux rapports anharmoniques* (y, z, t, x), (y, z, t, x'), » *dans un ordre déterminé, le même pour les deux cas.*

» *Soient aussi, par un point* l, *trois droites* Y, Z, T; *soient* X, X′ » *les tangentes, menées par* l, *à la conique* A, *et enfin* R *la* » *différence des deux rapports anharmoniques* (Y, Z, T, X), » (Y, Z, T, X′).

» *J'appelle* condition élémentaire *imposée à la conique* A *celle* » *qui est définie par la relation* $r^{2q} = k\mathrm{R}^{2p}$, *dans laquelle* k, p, q » *sont des nombres donnés*, p, q *étant entiers, positifs et premiers* » *entre eux.*

» Les deux nombres p, q étant seuls appelés à jouer un rôle, je » désignerai cette condition par le symbole (p, q).

» *Une condition quelconque est équivalente à la somme d'un* » *nombre limité de conditions élémentaires.* Voici la signification » de cet énoncé :

» Soit

$$\Phi \equiv a\mathrm{P} + b\mathrm{D} + c(p, q) + c'(p', q') + \ldots$$

» *l'équivalent* de la condition Φ; a, b, c, c', ... étant des nombres » entiers et positifs. Étant donné un système quelconque, soient, » pour ce système, μ le nombre des coniques qui satisfont à la con- » dition P, ν le nombre de celles qui satisfont à la condition D, ρ le » nombre de celles qui satisfont à la condition (p, q), ρ' à (p', q'), etc. » Le nombre des coniques de ce même système qui satisfont à Φ est » $a\mu + b\nu + c\rho + c'\rho' + \ldots.$ »

Grâce à cette notion nouvelle des équivalents, je pus enfin résoudre le problème qui avait été le but primitif de M. Chasles, et dont la solution disparaissait avec le théorème des caractéristiques. Ce fut l'objet d'un Mémoire adressé aussi à la Société mathématique de Londres [1]; j'en extrais un passage :

---

[1] *Sur le nombre des coniques qui, dans un plan, satisfont à cinq conditions projectives et indépendantes entres elles* (*Proceed. of the Lond. math. Soc.*, t. X, 1878, nos 145 et 146).

« Soient cinq conditions quelconques imposées à une conique. » Prenons une condition élémentaire dans chacun de leurs cinq équivalents. Soit n le nombre des coniques qui satisfont à ces cinq conditions élémentaires. Formons toutes les combinaisons analogues, » et faisons la somme de tous les nombres analogues à n. Cette » somme est le nombre des coniques qui satisfont aux cinq conditions données. Ainsi le problème est ramené à celui-ci : *Trouver* » *le nombre des coniques qui satisfont à cinq conditions élémentaires....*

» Une formule unique et simple résout le problème, moyennant » une convention. On étendra la notation (p, q) aux conditions P » et D, en faisant

$$P \equiv (0, \tfrac{1}{2}), \qquad D \equiv (\tfrac{1}{2}, 0).$$

» Ceci admis, on a l'énoncé suivant :

» *Soient cinq conditions élémentaires* (p, q), (p', q'), (p'', q''), » (p''', q'''), $(p^{\text{IV}}, q^{\text{IV}})$, *rangées de telle sorte que l'on ait*

$$\frac{p}{q} \leq \frac{p'}{q'} \leq \frac{p''}{q''} \leq \frac{p'''}{q'''} \leq \frac{p^{\text{IV}}}{q^{\text{IV}}}.$$

» *Le nombre des coniques qui satisfont à ces cinq conditions* » *est, dans tous les cas,*

$$n = 8(2q+p)(2q'+p')(q''+p'')(q'''+2p''')(q^{\text{IV}}+2p^{\text{IV}}). \text{ »}$$

J'ajoute que le Mémoire mentionne expressément la condition d'indépendance :

« *Pour chacune des cinq conditions élémentaires, la droite* L » *et le point* l *doivent être considérés comme arbitraires.* »

Rien n'est plus propre à faire comprendre l'absolue nécessité qu'il y avait de rectifier la théorie de M. Chasles, dont les conséquences, très explicitement énoncées, donnent, au lieu de ce nombre n, un résultat très différent et beaucoup plus grand.

Voici un exemple, purement géométrique, qui se trouve à la fin du Mémoire dont il s'agit en ce moment :

« *On assujettit une conique* A *à ce que le rapport anharmo-* » *nique de ses points d'intersection avec une conique donnée* B, » *pris sur* A *dans un ordre quelconque, soit inverse du rapport* » *anharmonique de ces mêmes points, pris, dans le même ordre,*

» *sur* B. *On assujettit* A *à cette même condition, relativement à* » *une seconde conique donnée* C; *et, en outre, à passer par deux* » *points donnés et à toucher une droite donnée. Combien de* » *coniques* A *répondent à la question ?*

» Les deux premières conditions ont chacune pour équivalent (1, 1). » *Il y a donc* 48 *coniques* A, tandis que l'ancienne théorie, appli- » quée ici à tort, en donnerait 56. »

En terminant cette analyse de mes travaux sur la théorie des caractéristiques pour les coniques, je dois ajouter que mes résultats paraissent admis, comme définitifs, par les rares géomètres qui connaissent ce sujet. L'un de mes Mémoires (¹), dès son apparition dans les *Proceedings of the London mathematical Society*, a été immédiatement réimprimé, dans les *Mathematische Annalen*, sur la demande de l'éminent rédacteur, M. Félix Klein.

Cette théorie, qui a donné lieu à tant de controverses, semble aujourd'hui fixée (²); mais, on l'avouera, elle a subi un sort bien étrange ! Où trouver la cause de ces vicissitudes? Trop d'imagination, peut-être, avait entraîné prématurément les géomètres dans une campagne mal préparée. Combien d'incertitudes, de tâtonnements, de fautes même, vite corrigées, a-t-on pu voir dans les essais de ce siècle sur la Géométrie générale, qui se mêle à la *théorie des fonctions algébriques!* Cette dernière est, elle-même, fort nouvelle. Il fallait l'attendre et adapter à ses découvertes les formes de la Géométrie. C'est une tâche à laquelle ont collaboré et travaillent encore bien des savants, parmi lesquels brille M. Nœther. Les travaux que, pour ma part, j'y consacrai dès 1873, portèrent d'abord sur l'étude des *points singuliers*.

THÉORIE GÉNÉRALE DES COURBES ALGÉBRIQUES.

Dans la Géométrie, comme dans l'Analyse, l'étude des points singuliers donne la clef d'une foule de problèmes. Les principes étaient déjà bien établis, grâce à M. Puiseux, principalement, pour les fonctions algébriques.

Il fallait dégager les nombreuses conséquences que ces principes

(¹) Cité page 9, note (²).

(²) Tel est l'avis de M. le vice-amiral de Jonquières (*Notice*, p. 27).

fournissent à la théorie des courbes. Le besoin d'une pareille étude était tellement senti, qu'elle était entreprise presque en même temps par plusieurs savants, MM. Zeuthen, Stoltz et Stephen Smith (¹), sur qui j'eus la bonne fortune d'être en avance.

Présenté à l'Académie le 20 avril 1874, le *Mémoire sur les points singuliers des courbes algébriques planes* a été publié en 1877, dans le Tome XXVI du *Recueil des Savants étrangers*, suivant les conclusions d'un Rapport, pour lequel je témoigne ici ma reconnaissance à la mémoire de M. de La Gournerie.

Voici un passage de ce Rapport (²) :

« Dans l'article VII, après une courte étude des développantes, » M. Halphen s'occupe des développées successives d'une même » courbe. Cette partie de son travail en est peut-être la plus originale.

» Les singularités d'une développée correspondent les unes à des » points simples, les autres à des points singuliers de la courbe pri- » mitive. L'auteur montre que les premières disparaissent nécessai- » rement dans la série des développées, et que les dernières con- » duisent à un régime régulièrement progressif de points à l'infini. » Il parvient, en dernier lieu, à ce théorème :

» *A partir d'un certain rang, les degrés et les classes des déve-* » *loppées successives d'une courbe algébrique quelconque forment* » *deux progressions arithmétiques de même raison.*

» Cette proposition ne souffre aucune exception; mais il y a des » cas, tels que celui des épicycloïdes algébriques, dans lesquels la » raison des progressions est nulle. »

C'est là, je crois, une des propositions les plus cachées que l'on connaisse. Dès qu'on envisage des courbes possédant quelques singularités élevées, le rang, à partir duquel la loi régulière commence, dépend de la nature la plus intime de ces singularités. On peut former des exemples où ce rang sera aussi éloigné que l'on voudra : avant d'y parvenir on rencontre des irrégularités qui ne feraient guère supposer cette régularité universelle, par où toutes les courbes algébriques, dans leurs développées successives, viennent finalement se ressembler.

(¹) Celui même à qui une mort subite et bien prématurée a ravi la joie de recevoir le grand prix des Sciences mathématiques de 1882.

(²) *C. R. Acad. Sc.*, t. LXXX, 1875, p. 100.

Dans ce Mémoire, j'avais laissé de côté les questions qui concernent les transformations des courbes *point par point*, ou transformations *uniformes*. Je dus les aborder. La Géométrie vient s'y rencontrer avec l'analyse des *fonctions abéliennes* par la considération du *genre* des courbes, notion due à Riemann. Et d'abord, l'expression explicite du genre n'était point connue avec netteté pour les courbes à singularités quelconques. Je dois dire cependant qu'elle résulte facilement du *nombre des périodes*, tel qu'on le voit exprimé, pour les intégrales abéliennes, dans le *Traité des fonctions elliptiques* de MM. Briot et Bouquet. M. Cayley avait donné aussi quelque indication à cet égard.

Je traitai ce sujet, en 1874, dans une première Note ([1]), en définissant le genre par le nombre des intégrales abéliennes de première espèce; puis, en 1875, dans une seconde Note ([2]), présentée, comme la première, à l'Académie. Cette fois, j'abordais, en même temps, un bien important sujet, celui des transformations par lesquelles on peut substituer, à une courbe algébrique quelconque, une autre courbe, correspondant à la première point par point, et ne possédant que des singularités ordinaires. C'est à M. Nœther qu'on doit l'idée de telles transformations : il est nécessaire d'en connaître l'existence, quand on veut prendre pour guide, dans la théorie des fonctions abéliennes, l'ouvrage de MM. Clebsch et Gordan. Mais le lien entre la courbe primitive et la transformée finale est, chez M. Nœther, si complexe qu'on n'en peut guère tirer parti. On sait qu'il existe, voilà tout. Il en est tout autrement du résultat auquel je parvins :

« *Toute courbe plane algébrique est la perspective d'une* » *courbe gauche n'ayant qu'un point singulier, et dont les* » *branches, en ce point, ont toutes des tangentes distinctes.* » De là résulte qu'une seconde perspective, faite d'un point de vue arbitraire (tandis que la première est faite d'un point de vue déterminé), fournit la transformée qu'on cherche.

Le principe de l'égalité du *genre* dans deux courbes algébriques, qui se correspondent point par point, a une si grande importance

---

([1]) *Sur un point de la théorie des fonctions abéliennes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. LXXVIII, 1874, p. 1833).

([2]) *Sur certaines perspectives gauches des courbes planes algébriques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. LXXX, 1875, p. 638).

qu'il me semblait désirable de le démontrer directement. On ne l'avait pas fait encore, pour les courbes à singularités quelconques, sans le secours de cette réduction aux singularités ordinaires, imaginée par M. Nœther. J'y parvins, la même année 1875, par deux méthodes très différentes, l'une géométrique et fondée sur la considération d'une surface gauche (1), l'autre purement algébrique et reposant sur la théorie de l'élimination (2).

Comme suite au Mémoire où s'exposait cette dernière démonstration, je fus conduit à en publier immédiatement un autre (3), pour traiter d'une relation bien plus générale entre les genres de deux courbes, dont les points sont liés par une correspondance *multiforme*. Cette relation avait été trouvée par M. Zeuthen pour les courbes à singularités ordinaires. On peut apprécier la sûreté et la facilité des moyens algébriques dont je disposais dès lors, en voyant établir directement, sans effort et sans restriction, des théorèmes abordés jusque-là par des moyens détournés, et qu'il était bien difficile d'appliquer. Maintenant, au contraire, le théorème si remarquable de M. Zeuthen acquérait toute sa valeur (4); il devenait un précieux instrument de recherches. Je le fis voir immédiatement et me servis de ce théorème pour démontrer à nouveau une proposition que j'avais trouvée depuis peu, et dont je parlerai plus loin. C'est celle par où l'on connaît le nombre des points satisfaisant à une relation différentielle du second ordre quelconque, sur une courbe algébrique.

La *réduction* des singularités, suivant les idées de M. Nœther, ne cessait pas cependant de s'imposer à mes préoccupations. Bien qu'elle fût devenue très nette par la perspective d'une courbe gauche, je désirais m'en rendre compte sans rien emprunter à la Géométrie de l'espace. D'ailleurs, la propriété des développées successives, au sujet de laquelle j'ai cité tout à l'heure le rapport de M. de La Gournerie,

---

(1) *Sur le genre des courbes algébriques* (*Association française : Compte rendu de la 4e session, Nantes*, 1875, p. 237).

(2) *Sur la conservation du genre dans les transformations uniformes* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. IV, 1875, p. 29).

(3) *Sur les correspondances entre les points de deux courbes* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. V, 1876, p. 7).

(4) Un Mémoire publié depuis peu par M. Zeuthen dans les *Acta mathematica*, et intitulé : *Sur un groupe de théorèmes de la Géométrie énumérative*, montre que cet éminent géomètre approuve complètement mes idées sur ce sujet.

avait des analogies évidentes avec celle des transformations quadratiques, instrument, pour M. Nœther, de la *résolution* des singularités. Modifiant un peu la génération de la développée, je parvins au même but qu'avait atteint M. Nœther, la *résolution successive* des singularités; mais c'était cette fois par des transformations vraiment géométriques.

« Soit S une courbe plane et algébrique qu'il s'agit de transformer (¹). Je prends une conique arbitraire dans le même plan. » Je considère un point de S, la tangente en ce point et enfin la » polaire du même point relativement à la conique. L'intersection de » cette tangente et de cette polaire engendre une courbe S^1, qui est » une transformée de S et lui correspond point par point. Par la » même construction, on déduit de S^1 une nouvelle transformée S^2, » et ainsi de suite.... Quelle que soit la courbe S, il existe toujours » un nombre fini et déterminé, tel que toutes les transformées, de » rang supérieur à ce nombre, ne possèdent que des singularités » ordinaires. » Mais on ne se borne pas à cette vague affirmation, on voit, à chaque pas, comment se modifient les points singuliers, et l'on peut préciser le nombre des opérations exigées. Pour ce but, il faut considérer, en chaque point singulier, une suite de *nombres caractéristiques*, que j'avais déjà envisagés auparavant, et qui jouent un rôle capital dans beaucoup d'autres questions. Ce sont des fractions ordinaires : *après les avoir réduites en fractions continues, on fait la somme des quotients incomplets pour toutes les fractions relatives à une même singularité;* le rang de la transformée qu'on cherche est égal, parmi toutes les sommes analogues, à celle qui est la plus grande.

Revenant, vers la fin de ce Mémoire, aux développées successives, je réussis à compléter le théorème si curieux qui les concerne; non seulement les degrés et les classes de ces courbes, mais encore les nombres de leurs points de rebroussement, de leurs sommets, de leurs tangentes doubles, de leurs normales doubles, forment des progressions arithmétiques, toujours à partir d'un certain rang, dont la définition est désormais connue avec la plus grande clarté.

Par ces travaux, je me sentis préparé pour les grands problèmes de

---

(¹) Extrait du Mémoire *Sur une série de courbes, analogues aux développées* (*Journal de Mathématiques*, 3ᵉ série, t. II, 1876, p. 87).

l'élimination, et j'abordai sur-le-champ (1875) les questions qui concernent les figures infinitésimales.

Étudier, sur une courbe algébrique plane, les points en chacun desquels est satisfaite une équation différentielle algébrique donnée; trouver le nombre de ces points, tel est le problème sur lequel j'écrivis alors un Mémoire étendu ([1]).

C'est bien un cas du problème général sur la détermination des figures, tel qu'il a été défini au début de cette Notice, tout à fait analogue au problème où l'on cherche, parmi les coniques d'un système, celles qui satisfont à une condition étrangère. Au lieu d'une conique, on envisage une figure composée de points infiniment voisins, deux si l'équation différentielle est du premier ordre, trois si elle est du second ordre, etc. La suite ou *système* des figures est constitué par la courbe; la *condition*, par l'équation différentielle.

Pour le cas où l'équation différentielle est du premier ordre, M. Fouret ([2]) venait d'établir une proposition qui, en fait, résolvait le problème. Sous le nom de *systèmes de courbes transcendantes*, ce géomètre distingué considère les intégrales des équations différentielles algébriques du premier ordre. Il étend à de tels systèmes un théorème connu, dès le début, dans les travaux de M. Chasles, pour les systèmes de courbes algébriques : « *dans un système dont les caractéristiques sont* μ, ν, *le nombre des courbes qui touchent une courbe de classe* n *et de degré* m *est* $n\mu + m\nu$. » M. Fouret se rencontre là avec M. Clebsch : considérer les systèmes de courbes transcendantes ou les *connexes*, avec leurs *coïncidences principales* ([3]), c'est une même idée, mais que les deux savants poursuivent dans des directions très différentes. A mon point de vue, il se trouvait établi que, *sur une courbe algébrique plane, le nombre des points en chacun desquels est vérifiée une équation différentielle algébrique du premier ordre est* $(n\mu + m\nu)$, n *et* m

---

([1]) *Sur la recherche des points d'une courbe algébrique plane, qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle algébrique et sur les questions analogues dans l'espace* (*Journal de Mathématiques*, 3e série, t. II, 1876, p. 257 et 371).

([2]) *Sur les systèmes de courbes planes, algébriques ou transcendantes, définies par deux caractéristiques,* par M. Fouret (*Comptes rendus*, t. LXXVIII, p. 831, 1693, 1837, année 1874; et *Bulletin de la Société mathématique*, t. II, p. 72 et 96).

([3]) *Ueber ein neues Grundgebilde der analytischen Geometrie der Ebene,* von A. Clebsch (*Math. Ann.*, t. VI, 1873, p. 203).

étant la classe et le degré de la courbe, μ *et* ν *des nombres qui dépendent seulement de l'équation différentielle.*

Ce que M. Chasles avait dit pour les systèmes de coniques, et qui ne s'était pas trouvé justifié, était ici bien établi pour un objet analogue : un système de courbes transcendantes, suivant M. Fouret, un connexe, suivant M. Clebsch, une équation différentielle algébrique du premier ordre, c'est un *être* défini par deux nombres, comme les courbes algébriques planes par un seul, le degré. On le voit avec la plus grande netteté dans le mode de représentation analytique commun, au fond, à MM. Clebsch et Fouret. Je le retrouvai, à mon tour, par les méthodes qui me sont propres.

Qu'advient-il pour les équations différentielles du second ordre, ou, en d'autres termes, pour les figures composées de trois points infiniment voisins? Là le résultat était nouveau, mais d'un caractère analogue : le nombre cherché est représenté, non plus par un binome, mais par un trinome, dont chaque terme est le produit de deux éléments dépendant, l'un de la courbe seule, l'autre de la seule équation différentielle.

Mais il en est tout autrement pour les équations différentielles du troisième ordre et des ordres supérieurs, ou, en d'autres termes, pour les figures composées de points infiniment voisins, en nombre supérieur à trois. Un système de ces figures n'est plus caractérisé par deux éléments, comme dans le premier cas, ou par trois, comme dans le second; *il n'y a aucune limite* au nombre des éléments qui le définissent. C'est un résultat d'une forme inattendue, en contradiction complète avec les idées qui avaient cours.

Quand on avait, pour la première fois, examiné les questions relatives aux points singuliers, on s'était borné d'abord aux singularités *ordinaires;* ce sont elles qui figurent dans les célèbres *formules de Plücker*. Plus tard, M. Cayley avait déterminé, pour chaque singularité *élevée,* des *équivalents;* il entendait par là que, dans les formules de Plücker, un point singulier quelconque se trouve équivaloir à des singularités ordinaires, dont le nombre, pour chacune d'elles, était exprimé par l'équivalent. A la vérité, quand il fallut considérer aussi le *genre* des courbes, on dut changer ces équivalents, et l'on se fût résigné, sans doute, à les changer encore si l'on avait abordé d'autres problèmes; mais le champ des recherches était alors trop limité pour qu'on y fût contraint. Bien que M. Cayley

n'eût jamais écrit rien de pareil, l'idée que ces équivalents représentaient vraiment les points singuliers dans toutes les questions prenait de la consistance. Elle était tout à fait fausse, et, pour ma part, je ne pouvais l'admettre : mes précédents travaux la démentaient. Mais maintenant on avait la définition précise d'une catégorie de problèmes qui devaient la faire rejeter : « *pour les questions où il s'agit* » *de déterminer, sur une courbe, le nombre des points en chacun* » *desquels a lieu une relation donnée entre les éléments infinité-* » *simaux de la courbe au delà du second ordre, les points singu-* » *liers ne peuvent être représentés par des équivalents dont le* » *nombre et la définition soient indépendants, à la fois, de la* » *question particulière et de la courbe qu'on envisage* (¹) ».

En outre des exemples et des questions analogues traitées pour la géométrie de l'espace, le Mémoire que j'analyse contient la première notion des *invariants différentiels*. Il en sera question plus loin; bientôt ils devaient m'entraîner loin de la Géométrie.

Maître de la théorie générale, je voulus traiter à part deux problèmes particuliers; ce fut l'objet d'un Mémoire *Sur le contact des courbes planes avec les coniques et les surfaces du second degré* (²), composé, comme le précédent, en 1875. « *Parmi les* » *espèces, en nombre indéfini, de points particuliers dont la* » *théorie du contact nous révèle l'existence sur les courbes* » *planes, je me propose ici* », disais-je au début de ce Mémoire, « *d'en considérer spécialement deux. J'envisagerai les points en* » *lesquels une courbe se rapproche, plus qu'en tout autre point,* » *en premier lieu, d'une conique; en second lieu, d'une courbe* » *du troisième degré, ou cubique. Les premiers ont déjà attiré* » *l'attention de plusieurs géomètres, notamment MM. Cayley,* » *Zeuthen, Painvin. Ils ont reçu de M. Cayley le nom de* points » sextactiques, *généralement adopté. Les seconds ne paraissent* » *pas avoir été étudiés jusqu'à présent. Le problème, que je me* » *propose ici, consiste à trouver le nombre de ces points sur une* » *courbe algébrique offrant des singularités quelconques.* »

(¹) Extrait de l'*Étude sur les points singuliers des courbes algébriques planes* [Appendice au *Traité de Géométrie analytique* (*Courbes planes*), par G. Salmon. Ouvrage traduit de l'anglais par O. Chemin; Paris, Gauthier-Villars, 1884.]

(²) *Sur le contact des courbes planes avec les coniques et les courbes du troisième degré* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. IV, 1875, p. 59).

A l'égard du premier problème, M. Painvin, après avoir donné, l'année précédente ([1]), des calculs d'une grande élégance sur les points sextactiques, avait tenté d'en deviner le nombre pour des courbes à singularités quelconques, d'après des cas particuliers. Il y avait échoué. Ce géomètre regretté subissait là l'influence des idées préconçues dont je parlais tout à l'heure; il était doué pourtant d'un incontestable talent, dont j'aurai bientôt à signaler une preuve. Abordant, tout au contraire, le problème dans sa généralité avec les seules ressources de l'élimination, définitivement adaptée à ces recherches, je le résolus sans effort, comme aussi la seconde question, dont la réponse est assurément plus compliquée, mais n'offre pas plus de difficulté.

Par ce dernier travail, je faisais un nouveau pas vers les invariants différentiels; mais j'avais encore plusieurs problèmes à résoudre avant de m'adonner à cette nouvelle étude. Ce fut à ce moment (1876) que j'entrepris mes derniers travaux sur les caractéristiques pour les coniques. J'ai dû en parler auparavant, mais on doit maintenant comprendre que j'y fusse alors bien préparé. En 1877, j'étendis les recherches précédentes aux surfaces ([2]) et aux courbes gauches ([3]).

Pour les surfaces, j'étudiai les *lignes singulières* dans toute leur généralité et parvins à déterminer le degré précis de la *ligne des points paraboliques*, quelles que soient les singularités. J'annonçai, en outre, avoir mis en évidence les éléments nécessaires pour « *trouver le degré du lieu des points qui, sur une surface algé-* » *brique, satisfont à une équation aux dérivées partielles du* » *second ordre* », promettant un autre Mémoire sur cette question. Le temps m'a manqué pour tenir cette promesse, dont personne, je le crains, ne me réclamera l'exécution, tant ces problèmes difficiles rencontrent d'indifférence. Je ne m'arrête donc pas davantage sur ce travail, l'un de ceux qui m'ont coûté le plus d'efforts, mais qu'il serait presque impossible de faire comprendre dans une courte analyse.

([1]) *Comptes rendus*, t. LXXVIII, 1874, p. 55, 436 et 835.

([2]) *Sur les lignes singulières des surfaces algébriques* (*Annali di Matematica pura ed applicata*, 2e série, t. IX, 1877, p. 68).

([3]) *Sur les points singuliers des courbes gauches* (*Association française : Compte rendu de la* 6e *session*, [*Le Havre*], 1877, p. 132); *Sur les singularités des courbes gauches algébriques* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. VI, 1877, p. 10).

La théorie des points singuliers sur les courbes gauches était bien autrement aisée, et j'ai pu réunir dans un petit nombre de pages la réponse aux principales questions qu'elle suggère. Par exemple, « *le nombre des points d'une courbe gauche, de degré m et de* » *rang r en chacun desquels est satisfaite une équation diffé-* » *rentielle algébrique du premier ordre, est* $\omega r + \theta m$, ω *et* θ *étant* » *deux nombres qui dépendent seulement de l'équation différen-* » *tielle* ». Si l'équation est du second ordre, le résultat est analogue, mais avec une formule à *quatre* termes au lieu de deux, circonstance tout à fait nouvelle. L'analogie avec les courbes planes est manifeste, et il est à peine besoin de dire qu'au delà du second ordre, les circonstances, signalées en géométrie plane, se rencontrent encore avec une complication plus grande.

Mais il y a, dans cette théorie, un autre point qui mérite l'attention. Les recherches sur les courbes gauches algébriques se heurtent d'abord à un sérieux obstacle : il n'existe pas, comme en Géométrie plane, *une* courbe générale d'un degré donné. C'est ce qu'on a bien vite reconnu sur l'exemple des courbes du quatrième degré, appartenant à deux types absolument distincts. Cependant, en adjoignant au *degré* un autre élément, non moins caractéristique, le *nombre des points doubles apparents*, c'est-à-dire des points doubles que présente la courbe en perspective, ou encore le *rang* ou le *genre*, notions équivalentes, on a pu faire la distinction des divers types pour le quatrième degré, puis pour le cinquième, à quoi l'on s'est borné quelque temps avec M. Cayley, initiateur dans cette théorie, comme dans plusieurs autres. On y a réussi encore, avec M. Eduard Weyr, pour le sixième degré. Croire qu'il en serait toujours ainsi, c'était là une erreur facile à commettre, bien placée, on le voit, dans le courant des idées. Nulle part, cependant, je me hâte de le dire, cette erreur n'est affirmée hautement comme vérité, mais il existe des mémoires et des livres où le raisonnement est fondé tacitement sur cette hypothèse non formulée. Qu'elle fût inexacte, je le savais depuis longtemps par un travail entrepris en 1869, et dont j'aurai bientôt à rendre compte (1). Je m'étais même cru obligé, en 1874, par une courte Note publiée au *Bulletin de la Société*

(1) *Mémoire sur les courbes gauches algébriques* (*Extrait*) (*C. R. Acad. Sc.*, t. LXX, 1870, p. 380).

mathématique [1], de combattre cette erreur naissante, en montrant l'existence, au neuvième degré, de deux courbes générales, ayant toutes deux un même nombre de points doubles apparents. J'ajoutais alors : « *il serait d'un très grand intérêt de connaître* » *le caractère des propriétés des courbes qui ne dépendent que du* » *degré et du nombre des points doubles apparents* », propriétés dont la même Note fournissait de nombreux exemples, joints à ceux qui étaient déjà connus. Ce caractère n'est pas encore trouvé; mais le Mémoire *Sur les singularités des courbes gauches algébriques* [2] définit une catégorie importante de ces propriétés : « *Sur une courbe sans singularité ponctuelle, le nombre des* » *points en chacun desquels est satisfaite une équation diffé-* » *rentielle algébrique ne dépend, quant à la courbe, que du* » *degré et du nombre des points doubles apparents.* »

Quelques résultats particuliers, sur ce même sujet, sont exposés dans un petit Mémoire [3], faisant partie du Recueil de l'*Association française*. Je les avais communiqués au Congrès de cette Association, dans la ville du Havre.

Cette longue suite d'études sur l'élimination, envisagée au point de vue géométrique, comportait encore la solution d'un problème qui n'a pas, à beaucoup près, l'importance théorique des précédents, nécessaire toutefois et cherché par plusieurs géomètres. Je signale seulement M. Painvin, auteur, en 1873, d'un élégant Mémoire sur un cas particulier de cette question [4]. Par les méthodes dont je disposais, je pus réussir, en 1875, à traiter le problème dans sa généralité et à fournir une solution qui s'accordait avec celle de M. Painvin [5].

Sous le titre d'*Étude sur les points singuliers des courbes algébriques planes*, j'ai composé plus récemment, en 1882, un résumé comprenant une partie des travaux que je viens d'analyser. Cette

---

(1) *Sur quelques propriétés des courbes gauches* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. II, 1874, p. 69).

(2) *Sur les singularités des courbes gauches algébriques* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. VI, 1877, p. 10).

(3) *Sur les points singuliers des courbes gauches* [*Association française : Compte rendu de la* 6e *session* (*Le Havre*), 1877, p. 132].

(4) *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, t. IV, p. 131, et t. V, p. 139.

(5) *Sur une question d'élimination ou sur l'intersection de deux courbes en un point singulier* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. III, 1875, p. 76).

Étude forme un Appendice à l'Ouvrage de M. Salmon, traduit par M. Chemin : *Traité de Géométrie analytique* (*courbes planes*). Il s'y trouve plusieurs exemples nouveaux et quelques perfectionnements dans les méthodes; mais je n'y crois pas devoir insister. En voyant réuni, avec de nombreux exemples, dans 140 pages in-8°, tout ce qu'on sait d'essentiel sur un sujet si vaste, on pourra juger du progrès accompli.

CLASSIFICATION DES COURBES GAUCHES ALGÉBRIQUES.

Dès le début de mes travaux sur la Géométrie algébrique, j'avais compris la nécessité de préciser les notions, alors extrêmement vagues, qu'on possédait sur les courbes gauches. Sauf les courbes, tout à fait exceptionnelles, qui sont les intersections complètes de deux surfaces, on ne connaissait que la cubique gauche et les courbes du quatrième et du cinquième degré. Les méthodes qui les avaient fait connaître ne permettaient pas d'aller au delà. On savait cependant définir les courbes *unicursales* de tous les degrés, et celles aussi qui sont tracées sur les surfaces du second degré, ces dernières grâce à M. Chasles (¹). Mais déjà ces ressources ne suffisaient plus à percer le mystère des courbes du sixième degré.

Énumérer, définir et classer en diverses familles les courbes d'un même degré, tel est le grand problème qui s'offrait, absolument intact, aux recherches des géomètres. J'employai, en 1869, les loisirs d'un congé de semestre à essayer de le résoudre. Je n'y parvins pas complètement, mais il s'en fallait de bien peu. A l'expiration de mon congé, je pus cependant présenter à M. Chasles, qui le soumit à l'Académie en février 1870, un long Mémoire, où se trouvaient consignés, pour la première fois, des principes généraux sur la classification des courbes gauches algébriques. Le temps me manquait pour mener à fin mon entreprise, et le petit extrait (²), qui parut alors dans les *Comptes rendus*, fut, douze ans, la seule preuve de mes efforts.

Plusieurs géomètres cependant s'occupaient, à leur tour, des

(¹) *Comptes rendus*, t. LIII, 1861, p. 1077.

(²) *Mémoire sur les courbes gauches algébriques* (*Extrait*) (*C. R. Acad. Sc.*, t. LXX, 1870, p. 380).

courbes gauches algébriques : M. Éduard Weyr, dans une thèse brillante ([1]) (1873), classait les courbes du sixième degré; MM. Brill et Nœther (1873), à la fin d'un Mémoire justement renommé ([2]), parvenaient à un résultat important sur le nombre des arbitraires que comporte une courbe gauche de degré donné; MM. Valentiner et Sturm, plus récemment (1881), publiaient aussi des Mémoires sur le même sujet. L'attention que ces savants accordaient à ma petite Note de 1870, les lettres qu'ils m'adressaient, une prédilection dont je ne pouvais me défendre pour ma première œuvre de longue haleine, tout m'invitait à produire au jour mon Mémoire de 1869. Mais je désirais le revoir, le corriger peut-être, surtout le compléter, et j'hésitai longtemps; une occasion et les conseils d'un ami, géomètre profond et original ([3]), me décidèrent. L'Académie des Sciences de Berlin proposait, pour sujet du concours au prix Steiner de 1882, *la solution d'une question importante dans la théorie des courbes gauches algébriques*. Je lui soumis mon Mémoire et j'eus la satisfaction de recevoir le prix en même temps que M. Nœther : il fut doublé en notre faveur ([4]).

Dans le Rapport qui me valut cet honneur, l'éloge est assez mitigé pour que je puisse traduire entièrement la partie qui me concerne :

« Le troisième Mémoire du Concours a pour devise ce vers de » Lucrèce : *Variam semper dant otia mentem;* il est écrit en » français et intitulé : *Mémoire sur la classification des courbes* » *gauches algébriques*. Ce travail, très étendu ([5]) et extrêmement » soigné, débute par une Introduction qui donne un aperçu de » l'ensemble; il est partagé en six Chapitres, de longueurs fort » différentes. Le premier Chapitre ne contient essentiellement que » les bases de la théorie; trois courts Chapitres, qui ensemble ne

---

([1]) *Ueber algebraische Raumcurven :* Inaugural-Dissertation zur Erlangung der philosophischen Doctorwürde an der Universität Göttingen, von Eduard Weyr (Prag, Ed. Greg; 1873).

([2]) *Ueber die algebraische Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie* (*Math. Ann.*, t. VII, p. 269).

([3]) M. Archer Hirst, membre de la Société Royale de Londres, naguère directeur des études de *Royal Naval College,* à Greenwich.

([4]) *Sitzungsberichte der K. Pr. Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, t. XXXII, p. 735 (29 juin 1882).

([5]) 200 pages in-4° dans le *Journal de l'École Polytechnique*; *Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques* (couronné par l'Académie de Berlin) (*Journ. Éc. Polyt.*, LIIe Cahier, 1882, p. 1).

» font pas le quart du travail entier, le deuxième, le quatrième et le » cinquième traitent des courbes sur les surfaces du second, du troi- » sième, du quatrième et du cinquième degré. Le dernier Chapitre » donne, comme application des résultats généraux, une classifica- » tion des courbes jusqu'au vingtième degré, et celle des courbes du » degré 120. Le troisième Chapitre, qui, à lui seul, représente » presque la moitié du Mémoire, est aussi le meilleur; il contient » l'exposé d'un procédé original pour déduire de deux fonctions » entières, à deux variables, une suite de fonctions analogues; » appliqué à celles qui interviennent dans la représentation des » courbes gauches d'après Cayley, il conduit d'une courbe gauche « à une autre, que l'auteur désigne par le nom d'*adjointe*. Les déve- » loppements algébriques présentés dans ce Chapitre et les résultats » géométriques qui s'en déduisent enrichissent effectivement la » théorie des courbes gauches et donnent à ce travail le droit » d'obtenir le prix Steiner, bien que, pour le reste, avec tout son » mérite, au point de vue des principes algébriques pour la classifi- » cation des courbes, comme au point de vue de la méthode, il soit » inférieur au second Mémoire [1]. »

Les bases de la théorie, exposées dans le premier Chapitre, n'ont pas, comme on voit, fixé l'attention du rapporteur. Il s'y trouve cependant des résultats qu'on s'accorde à juger dignes de remarque. Mais ces résultats étaient connus, sinon démontrés, par ma Note de 1870, et par un petit Mémoire postérieur [2], dont je ne parlerai pas autrement; ils sont cités, démontrés et employés par M. Nœther. Le Rapport ne pouvait en faire honneur à l'auteur du Mémoire anonyme, qui se soumettait au jugement de l'Académie.

Parmi ces résultats anciens, citons le *minimum* du nombre des points doubles apparents que peut avoir une courbe gauche du degré d, sans point singulier; c'est l'entier contenu dans $\left(\frac{d-1}{2}\right)^2$, proposition qui avait mis en défaut la sagacité, pourtant fort grande, de M. Éduard Weyr : ce géomètre ne put réussir à la démontrer.

Citons aussi ce fait si curieux, que la suite, formée par les nombres

---

(1) Celui de M. Nœther.

(2) *Recherches de Géométrie à n dimensions* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. II, 1873, p. 34).

des points doubles apparents des diverses courbes d'un même degré, ne se compose pas de tous les nombres entiers du minimum au maximum, mais présente des *lacunes*, circonstance qui n'apparaît pas avant le neuvième degré.

Quant à la classification, systématiquement conduite jusqu'au vingtième degré, développée à part pour le degré 120, afin de mettre en lumière les circonstances qui ne se révèlent pas dans les petits degrés, le fait seul de la trouver dans mon Mémoire doit suffire à persuader les géomètres que j'ai, comme il me semble, résolu effectivement le problème que je m'étais proposé. C'est là justement ce que j'ai ajouté au Mémoire de 1869; tout le reste est à peine retouché, et le troisième Chapitre, celui qui, seul, on l'a vu, m'a pu conquérir le prix, n'a subi aucun changement. C'est mon œuvre de jeunesse que l'Académie de Berlin a couronnée : dure leçon pour mon âge mûr, si un succès récent (¹) ne l'avait consolé!

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET INVARIANTS.

Conduit, par mes recherches dans la théorie géométrique de l'élimination, à envisager les équations différentielles sous la forme projective, j'avais dû faire, dès le début, la distinction entre les *covariants* et les *invariants différentiels*. Les covariants, avec les éléments de la figure infinitésimale, c'est-à-dire les variables et leurs dérivées, contiennent encore les coordonnées de points arbitraires : toute fonction différentielle, mise sous forme projective, devient un covariant. Dans les invariants, au contraire, les points arbitraires disparaissent.

En égalant à zéro un invariant différentiel, on exprime, pour une figure infinitésimale, une propriété projective par elle-même, sans l'intervention d'une figure étrangère. Ainsi l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ exprime la propriété des points d'inflexion des courbes planes; elle traduit, pour la figure composée de trois points infiniment voisins, cette circonstance que les trois points sont en ligne droite; c'est une propriété projective, et $\frac{d^2y}{dx^2}$ est un invariant.

Outre le rôle des invariants différentiels dans la Géométrie, je

(¹) Le grand prix des Sciences mathématiques, obtenu en 1881.

comprenais l'importance qu'ils pouvaient acquérir en analyse, sans prévoir cependant qu'ils dussent m'amener bientôt aux équations différentielles linéaires.

« C'est la Géométrie qui fournit les premiers exemples d'inva-
» riants différentiels ([1]); c'est à l'Algèbre qu'il appartient d'en coor-
» donner la théorie par la résolution de ce problème : *Former, sans*
» *en omettre aucun, les invariants différentiels de chaque ordre.*
Résoudre cette question », tel était l'objet du premier Mémoire ([2]), que, sous forme de thèse, je composai dans l'hiver 1877-1878. Il concernait les invariants à deux variables. Je le fis suivre d'un second Mémoire ([3]), intitulé : *Sur les invariants différentiels des courbes gauches*, et concernant le cas de trois variables, dont une seule indépendante.

Voici, malgré sa longueur, l'Introduction de ce travail; elle fait bien comprendre la nature des résultats des deux Mémoires :

« Si l'on considère, dans l'espace, la figure composée de plusieurs
» points, on sait quels sont les *invariants absolus* de cette figure,
» c'est-à-dire les éléments numériques qui restent inaltérés quand, à
» cette figure, on vient en substituer une autre qui lui soit homogra-
» phique. Ces invariants sont les rapports anharmoniques des divers
» groupes de six points constituant la figure. Il n'en est plus de
» même si la figure est constituée par des points infiniment voisins.
» Dans ce nouvel ordre d'idées, même, les faits sont différents suivant
» la manière dont est censée composée la figure infinitésimale. Par
» exemple, les points peuvent être supposés infiniment voisins sur
» une surface; ils peuvent l'être aussi sur une courbe. Dans le
» premier cas, ce sont les *invariants différentiels des surfaces;*
» dans le second cas, les *invariants différentiels des courbes*
» *gauches*, qu'on est conduit à rechercher. C'est de ces derniers
» qu'il s'agit ici.

» Étant donné le nombre des points, si l'on veut savoir quel est
» aussi le nombre des invariants indépendants, cette question se
» résout immédiatement. La figure composée de $(n+1)$ points con-
» sécutifs sur une courbe est définie par les coordonnées de l'un

([1]) Extrait du Mémoire cité dans la note suivante.

([2]) *Sur les invariants différentiels* (Thèse, Paris, Gauthier-Villars, 1878).

([3]) *Sur les invariants différentiels des courbes gauches* (*Journ. Éc. Polyt.*, XLVII[e] Cahier, 1880, p. 1).

» d'entre eux et les dérivées, jusqu'à l'ordre n, de deux de ces coor-
» données par rapport à la troisième, en tout $(2n+3)$ quantités.
» D'autre part, une substitution homographique contient 15 arbi-
» traires. Donc, suivant un principe général, $(2n-12)$ est le
» nombre des invariants absolus pour la figure envisagée, ou, en
» d'autres termes, des invariants absolus jusqu'à l'ordre n inclusi-
» vement. Ainsi, pas d'invariant absolu au-dessous du septième
» ordre, puis, deux du septième ordre, deux autres du huitième, et
» ainsi de suite.... Trouver, pour chaque ordre, à partir du septième,
» deux invariants absolus indépendants et exprimer par leur moyen
» tous les autres, telle est donc la question qui s'offre à ce point de
» vue.

» Porté sur le terrain de l'Algèbre, le problème se pose en d'autres
» termes. Imaginons un invariant différentiel U, fonction algébrique
» des coordonnées x, y, z d'un point, et des dérivées y', z', ..., $y^{(n)}$,
» $z^{(n)}$, prises par rapport à x; en sorte que U soit racine d'une
» équation algébrique ayant pour coefficients des fonctions entières
» de x, y, z, y', z', ..., $y^{(n)}$, $z^{(n)}$.

» Soit f un de ces coefficients. L'équation $f=0$ est évidemment
» *invariante*, c'est-à-dire qu'un changement de variables, fourni
» par les formules d'une substitution homographique arbitraire,
» transforme cette équation en elle-même. La fonction f ne sera pas
» nécessairement un invariant absolu; mais l'effet du changement
» de variables sera de la reproduire, multipliée par un facteur. Ce
» sera un *invariant relatif*, ou simplement un *invariant*. On est
» ainsi tout naturellement conduit à l'étude des simples invariants.

» Dans la théorie des formes algébriques, cette distinction des
» invariants *absolus* et *relatifs* s'est offerte aussi dès l'abord, et l'on
» démontre que le facteur, par lequel tout invariant relatif se mul-
» tiplie, est une puissance du déterminant de la substitution.
» L'exposant de cette puissance est un nombre caractéristique de
» l'invariant; on le nomme le *poids*. Si donc U, U' sont deux inva-
» riants, ayant respectivement les poids p, p', le quotient $U^{p'} : U'^{p}$
» est un invariant absolu. De là résulte immédiatement que le
» nombre des invariants relatifs indépendants surpasse, dans chaque
» cas, d'une unité le nombre des invariants absolus. Par exemple, les
» formes binaires quadratiques ou cubiques, n'ayant pas d'invariant
» absolu, ne peuvent avoir qu'un invariant relatif, le discriminant.

» Dans la théorie actuelle, des circonstances analogues se pré-
» sentent. J'ai recherché la forme du facteur par lequel, dans le
» changement de variables, se multiplie tout invariant différentiel.
» Ce facteur a la forme $A^p B^\delta$, A et B étant deux quantités indépen-
» dantes de l'invariant, et p, δ deux nombres ne dépendant, au con-
» traire, que de cet invariant.

» J'appelle ces nombres le *poids* et le *degré* (¹). Il est alors mani-
» feste qu'*avec trois invariants différentiels on peut former un*
» *invariant absolu*. Car, si U, U', U'' sont ces trois invariants,
» caractérisés respectivement par les nombres (p, δ), (p', δ'), (p'', δ''),
» la quantité $U^{p'\delta''-p''\delta'}.\, U'^{p''\delta-p\delta''}.\, U''^{p\delta'-p'\delta}$ est un invariant absolu.
» En conséquence, au-dessous du septième ordre, il ne peut exister
» que deux invariants différentiels. Ces deux invariants se trouvent
» très aisément.

» A partir du septième ordre, voici les circonstances qui se pré-
» sentent :

» Pour chaque ordre, il existe deux invariants indépendants, qui
» sont linéaires par rapport aux dérivées de l'ordre le plus élevé et
» qui méritent d'être dits *fondamentaux*. Effectivement, on
» démontre que *tout invariant est une fonction rationnelle des*
» *invariants fondamentaux*. Cette proposition est digne de
» remarque; elle constitue, à mon sens, le véritable caractère dis-
» tinctif des invariants différentiels. Dans la théorie des formes algé-
» briques, on sait *a priori*, comme dans celle-ci, le nombre des
» invariants indépendants, mais non pas le nombre des invariants en
» fonction desquels tous les autres peuvent s'exprimer rationnel-
» lement. Par exemple, pour les formes binaires du cinquième
» degré, il n'y a que trois invariants indépendants, et cependant,
» comme on le sait depuis la découverte de l'invariant gauche, due à
» M. Hermite, il est nécessaire de prendre quatre invariants pour
» pouvoir, par leur moyen, exprimer rationnellement tous les autres.
» Au contraire, dans la théorie des formes infinitésimales, le nombre
» des invariants indépendants coïncide toujours avec celui des inva-
» riants *rationnellement distincts*.

(¹) Cette proposition était déjà contenue dans le Mémoire précédemment cité p. 17, note (1); les deux nombres p, δ jouent un rôle essentiel pour l'objet que ce Mémoire avait en vue.

» Le problème, qui consiste à définir et à former tous les inva-
» riants différentiels, se réduit donc à celui-ci : *Former, pour chaque ordre, à partir du septième, deux invariants fondamentaux*. A son tour, ce dernier problème se réduit à la recherche » des invariants fondamentaux du septième ordre ; car avec ces deux » invariants et ceux qui les précèdent, on compose deux invariants » absolus. Les dérivées de ces derniers fournissent deux invariants » relatifs du huitième ordre, qui sont fondamentaux. Avec ces der- » niers, on répète la même opération, et ainsi de suite. »

A côté des questions théoriques, dont l'importance s'est accrue par les rapprochements que M. Sophus Lie en a faits ([1]) avec sa théorie de la transformation des équations différentielles, les deux Mémoires sur les invariants contiennent des résultats de calcul. On y trouve, par exemple, l'équation différentielle, du neuvième ordre, des courbes du troisième degré ; celle, du huitième ordre, des courbes du troisième degré ayant un invariant absolu donné, celle des courbes de troisième classe ; les équations différentielles des cubiques gauches, des courbes biquadratiques, des courbes situées sur les surfaces du second degré. On voit par là que ces invariants offrent, pour le Calcul différentiel, les mêmes ressources que les invariants ordinaires pour l'Algèbre.

Leur utilité, dans le Calcul intégral, se manifeste aussi, en abaissant de *sept unités* l'ordre des équations différentielles invariantes ; mais ces équations sont tellement exceptionnelles qu'on ne pouvait guère s'y attacher. Deux Notes remarquables, présentées à l'Académie, en 1879, par M. Laguerre ([2]), me révélèrent le vrai rôle des invariants différentiels dans le Calcul intégral.

« Soit ([3]) une équation linéaire du troisième ordre, à variable x.
» J'en considère trois intégrales distinctes y_1, y_2, y_3, dont les rap-
» ports à l'une d'entre elles constituent deux fonctions de x. Sup-

([1]) Notamment dans le Mémoire intitulé : *Classification und Integration der Differentialgleichungen zwischen x, y, die eine Gruppe von Transformationen gestatten* (*Archiv for Mathematik og Naturvidenskab*, 1883, p. 187).

([2]) *Sur les équations différentielles linéaires du troisième ordre* (20 janvier 1879), et *Sur quelques invariants des équations différentielles linéaires* (3 février 1879), p. 117 et 224 du t. LXXXVIII des *Comptes rendus*.

([3]) Extrait du *Mémoire sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables* (couronné par l'Académie des Sciences) (*Recueil des Savants étrangers*, t. XXVIII, 1883).

» posons x éliminé, il reste une équation entre ces rapports, ou *une* » *relation homogène, indépendante de* x, $f(y_1, y_2, y_3) = 0$, *entre* » *les trois intégrales* y_1, y_2, y_3. La fonction f dépend du choix des » trois intégrales. Mais, si l'on change ces dernières, on effectue » dans f une substitution linéaire et homogène sur les variables. » Ainsi *les invariants absolus de* f sont des éléments dépendant de » l'équation différentielle, mais de telle sorte que, d'une part, le » choix des intégrales est indifférent, d'autre part ces invariants ne » dépendent que du rapport des intégrales, et enfin ne dépendent » pas non plus de la variable x et restent les mêmes si l'on change » cette variable. Pour ces raisons, *les invariants absolus de* f *ne* » *dépendent que de l'équation différentielle proposée et restent* » *invariables si à cette équation on en substitue une autre qui en* » *soit la transformée, par un changement arbitraire de la* » *variable et la multiplication des intégrales par une même* » *fonction arbitraire.*

» Toutefois, comme on ne connaît pas f, mais l'équation différen- » tielle, il faut savoir quels sont ces invariants absolus de f que l'on » pourra directement trouver sur l'équation différentielle.

» On ne connaît pas les intégrales y_1, y_2, y_3; mais aux environs » d'une valeur arbitrairement choisie x_0 pour la variable, on sait, » par l'équation même, développer ces intégrales en séries conver- » gentes, ou, en d'autres termes, trouver leurs éléments infinité- » simaux jusqu'à un ordre aussi élevé que l'on veut. C'est donc avec » ces éléments qu'on doit composer les invariants dont il s'agit.

» Regardons l'équation $f(y_1, y_2, y_3) = 0$ comme représentant » une courbe plane, lieu du point dont les coordonnées homogènes » sont y_1, y_2, y_3. L'équation différentielle nous fournit les éléments » infinitésimaux de cette courbe en un point quelconque. Com- » posons avec ces éléments une fonction qui reste invariable dans » les substitutions homographiques. Ce sera une fonction satisfaisant » aux conditions requises. On sait composer de telles fonctions. J'en » ai créé la théorie. Il en existe qui sont rationnelles par rapport aux » coordonnées et à leurs dérivées; elles deviennent ici des fonctions » rationnelles des coefficients de l'équation différentielle et des » dérivées de ces coefficients. La courbe que représente l'équation » $f = 0$ peut être dite *attachée à l'équation linéaire du troisième* » *ordre*. Elle ne change pas si l'on change la variable indépendante

» et la fonction par une substitution $X = f(x)$, $Y = \varphi(x)y$. Elle
» se transforme homographiquement si l'on change les intégrales.

» Pour le quatrième ordre, on a une image géométrique de
» même nature. On peut concevoir deux relations homogènes
» $f(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0$, $F(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0$ entre quatre inté-
» grales, comme représentant une courbe gauche dont les invariants
» différentiels sont des fonctions des coefficients de l'équation diffé-
» rentielle, restant invariables par la substitution précédente.

» Au delà du quatrième ordre, si l'image géométrique fait défaut,
» l'objet ne subsiste pas moins, et l'on conçoit encore l'existence de
» fonctions analogues. »

Ces fonctions des coefficients de l'équation différentielle, avec leurs dérivées, qui ne changent pas quand on change la variable indépendante et la fonction, ces *invariants* de l'équation différentielle linéaire, identiques absolument, on le voit, avec les invariants différentiels, voilà justement ce que M. Laguerre et, après lui, M. Brioschi ([1]) signalaient à l'attention des géomètres. Je les reconnus aussitôt : chacun des résultats déjà conquis dans les invariants différentiels passait dorénavant dans la théorie des équations linéaires. Ces équations différentielles des courbes du troisième degré, des courbes biquadratiques, que j'avais calculées, se changeaient immédiatement en des équations différentielles linéaires à intégrales algébriques, qu'on n'avait pas encore formées. Elles fournissaient encore des équations linéaires à coefficients doublement périodiques, analogues à celles dont les travaux de M. Hermite et la belle découverte de M. Picard venaient, quelques mois après ([2]), révéler l'importance. J'y trouvais cependant des caractères différents, leurs intégrales n'étant pas uniformes, ce qui me conduisait à la découverte d'une classe d'équations différentielles linéaires se rattachant, de la manière la plus intime, à la division de l'argument dans les fonctions elliptiques.

L'Académie avait proposé, pour sujet du Grand Prix des Sciences mathématiques de 1880, la question suivante : « *Perfectionner en*
» *quelque point important la théorie des équations différen-*

([1]) *Sur les équations différentielles linéaires* (Extrait d'une Lettre de M. Brioschi à M. Laguerre, 11 avril 1879) (*Bulletin de la Société mathématique*, t. VII, p. 105).

([2]) *Sur une classe d'équations différentielles linéaires*, Note de M. E. Picard, 19 janvier 1880 (*Comptes rendus*, t. XC, p. 128).

» *tielles linéaires à une seule variable indépendante.* » Je me hâtai de prendre part au concours, et fus assez heureux pour réussir.

Voici, dans le rapport de M. Hermite, la partie qui me concerne. Je la reproduis en entier, aux dépens de la modestie, mais il me serait impossible de faire une analyse plus juste.

« Dans (¹) les travaux dont la théorie générale des équations diffé-
» rentielles linéaires a été récemment l'objet, on a eu principalement
» en vue d'obtenir l'intégrale dans les cas où elle peut s'exprimer
» par des fonctions uniformes de la variable. Les belles découvertes
» de M. Fuchs, qui ont joué le principal rôle dans ces recherches,
» servent également de base pour l'étude plus profonde et plus diffi-
» cile entreprise par l'auteur du Mémoire n° 1, portant pour épi-
» graphe : *C'est ici un livre de bonne foi, lecteur*. Il part de ce
» fait que la transformée d'une équation différentielle linéaire,
» obtenue en substituant à la variable indépendante une fonction
» quelconque d'une nouvelle variable, est une équation linéaire de
» même ordre, et qu'il en est de même si l'on multiplie l'inconnue
» par une seconde fonction arbitraire de cette nouvelle variable.
» Cela étant, l'auteur se propose de déterminer ces deux fonctions,
» de manière que l'équation transformée soit à coefficients constants,
» ou bien soit intégrable au moyen de fonctions uniformes, sim-
» plement rationnelles ou doublement périodiques. Ces questions
» sont, comme on voit, aussi importantes que difficiles; la
» solution complète et générale, qui est exposée dans le Mémoire,
» montre un talent mathématique de l'ordre le plus élevé. Rien n'est
» plus intéressant que de voir s'introduire dans cette recherche de
» Calcul intégral les notions algébriques d'invariants qui ont pris
» naissance dans la théorie des formes, et ces nouvelles combinaisons
» faire apparaître les éléments cachés dont dépend, sous ses diverses
» formes analytiques, l'intégration d'une équation donnée. C'est à
» M. Laguerre qu'est due l'idée ingénieuse et profonde des invariants
» et covariants des équations différentielles linéaires; il en a tiré,
» pour les équations du troisième et du quatrième ordre, plusieurs
» beaux théorèmes, et M. Brioschi s'est aussi occupé avec succès du
» même sujet; mais l'auteur du Mémoire que nous analysons en a
» encore mieux fait ressortir toute l'importance. Il y joint une con-

(¹) *Comptes rendus*, t. XC, 1881, p. 552.

» sidération qui joue également dans ces recherches un rôle essen-
» tiel, c'est celle du genre d'une équation algébrique entre deux
» variables, introduite en analyse par Riemann et qui est si souvent
» employée dans les travaux de notre époque. Des applications
» exposées avec tous les détails nécessaires offrent un grand nombre
» de résultats entièrement nouveaux et du plus haut intérêt. Nous
» nous bornons à citer comme particulièrement remarquables des
» équations du troisième et du quatrième ordre contenant un para-
» mètre arbitraire, puis d'autres d'ordre impair se rattachant à la
» division de l'argument dans les fonctions elliptiques, dont la solu-
» tion, qui n'est pas une fonction uniforme, est obtenue par ces
» transcendantes. Nous jugeons que ce Mémoire a ajouté à la théorie
» des équations différentielles linéaires des méthodes générales et
» des résultats d'une haute importance, et qu'il est digne du grand
» prix des Sciences mathématiques. »

Le Mémoire, sur lequel on vient de voir porter un jugement si favorable, entièrement inspiré par la théorie des invariants différentiels, est bien loin d'avoir épuisé la série des conséquences que cette théorie renferme. C'est elle qui domine encore dans le travail [1] écrit en 1883 sous ce titre : *Sur les invariants des équations différentielles linéaires du quatrième ordre*. Je m'y suis surtout préoccupé d'établir l'harmonie complète entre les invariants différentiels des courbes gauches, tels que je les avais considérés d'abord, et les invariants des équations du quatrième ordre. On y voit une application que je dois signaler : 1° *Trouver la condition sous laquelle les solutions d'une équation différentielle linéaire du quatrième ordre sont liées par une relation quadratique homogène à coefficients constants;* 2° *cette condition satisfaite, réduire cette équation à deux équations linéaires du second ordre.* Ce problème m'avait été suggéré par une Note de M. Goursat [2]. Il se rapproche aussi des questions que M. Davide Besso, professeur à Rome, a étudiées avec succès dans ces dernières années [3]. Des équations à coefficients doublement périodiques offrent, dans mon

[1] *Sur quelques équations différentielles linéaires du quatrième ordre* (*C. R. Acad. Sc.*, t. XCVII, 1883, p. 247). — *Sur les invariants des équations différentielles linéaires du quatrième ordre* (*Acta mathematica*, t. III, 1883, p. 325).

[2] *Comptes rendus*, t. XCVII, 1883, p. 31.

[3] Dans plusieurs Mémoires insérés au recueil de l'*Académie royale des Lincei*.

Mémoire, des exemples à remarquer. Mais je ne veux pas m'y arrêter : c'est à l'avenir qu'il faut demander la solution des questions, dont j'ai là abordé la première. Ces questions, pleines d'intérêt, concernent les formes quadratiques dans leurs rapports avec les équations différentielles linéaires.

C'est encore une application immédiate des invariants différentiels qui fait l'objet d'une lettre adressée à M. Félix Klein, et publiée dans les *Mathematische Annalen*, en 1884 (1). Il s'agit là d'une équation différentielle linéaire du troisième ordre, intimement liée à la transformation du septième ordre des fonctions elliptiques. L'éminent géomètre de Leipzig, au cours de ses admirables travaux sur la *transformation*, avait signalé l'existence de cette équation, mais renoncé à la construire. La connaissance des invariants permet de l'écrire, pour ainsi dire, sans aucun calcul; elle est fort simple, et, circonstance que je n'attendais pas, c'est un cas d'une équation générale dont, pour d'autres valeurs numériques des coefficients, j'avais, dans le Mémoire couronné par l'Académie, signalé des propriétés curieuses. Dans cette Note de quatre pages, les géomètres apercevront peut-être, non pas seulement un progrès pour l'art du calcul, mais encore un acheminement vers les équations linéaires, intégrables algébriquement, que la transformation des fonctions elliptiques dérobe à notre curiosité.

Les sujets de recherche naissent les uns des autres : quelle distance entre les *multiplicateurs* des équations différentielles et les caractéristiques pour les coniques! Et cependant rien n'est plus naturel et plus vrai que cet enchaînement fatal, par où je me vois aujourd'hui conduit à l'étude des formes algébriques, composées avec les diverses solutions d'une même équation différentielle linéaire. C'est dans un des Mémoires précédents (2) que mes nouveaux travaux *Sur les multiplicateurs des équations différentielles linéaires* (3) et *Sur un problème concernant les équations différentielles linéaires* (4), ont leur origine.

---

(1) *Sur une équation différentielle linéaire du troisième ordre* (Extrait d'une Lettre adressée à M. F. Klein) (*Mathematische Annalen*, t. XXIV, 1884, p. 461).

(2) *Sur les invariants des équations différentielles linéaires du quatrième ordre* (*Acta mathematica*, t. III, 1883, p. 325).

(3) *Sur les multiplicateurs des équations différentielles linéaires* (trois Notes) (*C. R. Acad. Sc.*, t. XCVII, 1883, p. 1408 et 1451, et t. XCVIII, 1884, p. 134).

(4) *Sur un problème concernant les équations différentielles linéaires* (*Journal de Mathématiques*, 4e série, t. I, 1885, p. 11).

« Si [1], entre les diverses solutions d'une même équation diffé-
» rentielle linéaire, solutions d'ailleurs inconnues, il existe une
» relation connue, quel profit peut-on en tirer pour l'intégration ?
» A cette question, d'un caractère si indéterminé, la réponse est que,
» *en général, on peut trouver explicitement, sans aucune inté-*
» *gration, les solutions qui figurent dans la relation donnée.* »
Ces généralités, que suggère immédiatement la théorie de l'élimination, sont peu instructives, presque inutiles. Se bornant au cas où la relation envisagée est algébrique, on réduit le problème à ces termes :
« *Intégrer une équation différentielle linéaire, quand on*
» *connaît, en fonction de la variable indépendante, l'expression*
» *d'un polynome entier, homogène, à coefficients constants,*
» *formé avec les solutions inconnues* [2]. »

Par un lien, qui surprend d'abord, ce polynome, cette *forme* algébrique, où les *indéterminées* sont des solutions diverses de l'équation différentielle, se change immédiatement en une autre forme algébrique où ne subsiste plus qu'une seule solution avec ses dérivées. On se trouve ainsi en présence de ces intégrales non linéaires, signalées à l'attention par un beau théorème de M. Darboux [3]. Ce théorème, analogue à celui de Poisson sur les équations de la Mécanique, fait prévoir que la connaissance d'une intégrale conduit ordinairement à l'intégrale complète. Pour justifier cette prévision, j'ai réduit les calculs en remplaçant les intégrales par les multiplicateurs qui leur correspondent. Ces multiplicateurs sont, eux aussi, des formes algébriques homogènes, mais de degré moindre. Avec eux, l'Algèbre moderne offre assez de ressources pour qu'il soit possible d'arriver au but. J'en ai, par exemple, pu tirer la solution complète et *explicite* de ce problème :

Intégrer une équation linéaire du troisième ordre, connaissant, en fonction de la variable indépendante, l'expression d'une forme cubique ternaire, composée avec trois solutions inconnues.

Quelques fragments marquent encore mes efforts dans la théorie des équations différentielles. Une Note de 1864 [4], relative aux équations à coefficients constants, ne mériterait aucune mention, si

---

[1] Extrait du Mémoire cité dans la note précédente.

[2] *Ibid.*

[3] *Sur les systèmes d'équations linéaires à une seule variable indépendante* (*Comptes rendus*, t. XC, 1880, p. 524 et 596).

[4] *Sur l'intégration des équations linéaires* (*C. R. Acad. Sc.*, t. LVIII, 1864, p. 471.)

elle ne rappelait à ma reconnaissance la bienveillance extrême d'un professeur éminent. Par une autre, de 1881 [1], j'ai fait connaître une forme nouvelle d'équations réductibles à celles dont les coefficients sont constants. Mais j'attache plus de prix à deux Communications adressées, la même année, à l'Académie : dans la première [2], j'ai défini, par l'équation de Gauss, des fonctions *hypergéométriques* qui trouvent leur place parmi les fonctions si brillamment imaginées par M. Poincaré ; dans la seconde [3], ces fonctions m'ont permis d'intégrer un système d'équations différentielles non linéaires, analogue à celui d'où dépend la connaissance du mouvement d'un solide dans un fluide. Un cas particulier fournit la solution d'un problème géométrique, posé par M. Darboux, dans son Mémoire sur les coordonnées curvilignes [4]. J'ai traité à part ce cas particulier [5] par une analyse spéciale, propre aux fonctions elliptiques *modulaires*.

FONCTIONS ELLIPTIQUES.

Les analyses précédentes ont plusieurs fois mentionné les fonctions elliptiques, qui jouent, en effet, un rôle considérable dans mes recherches sur les équations différentielles. Mais auparavant les invariants différentiels eux-mêmes m'y avaient arrêté en m'offrant [dans le Mémoire [6] *Sur les invariants différentiels*] une équation qui, intégrée algébriquement, demeurait entourée de quelque obscurité et s'éclairait tout à coup par la multiplication des arguments elliptiques. Ce fut l'origine d'un Mémoire condensé, un peu trop peut-être, en trois Communications adressées à l'Académie [7]. La

---

(1) *Sur une classe d'équations différentielles linéaires* (*C. R. Acad. Sc.*, t. XCII, 1881, p. 779).

(2) *Sur des fonctions qui proviennent de l'équation de Gauss* (*C. R. Acad. Sc.*, t. XCII, 1881, p. 856).

(3) *Sur certains systèmes d'équations différentielles* (*C. R. Acad. Sc.*, t. XCII, 1881, p. 1404).

(4) *Annales de l'École Normale supérieure*, 2e série, t. VII, p. 149.

(5) *Sur un système d'équations différentielles* (*C. R. Acad. Sc.*, t. XCII, 1881, p. 1101).

(6) Cité note (2), p. 27.

(7) *Sur la multiplication dans les fonctions elliptiques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. LXXXVIII, 1879, p. 414). — *Sur l'intégration d'une équation différentielle*

forme, sous laquelle y est présentée la multiplication, ne s'est pas trouvée aussi nouvelle que j'avais cru d'abord; mais cette légère déconvenue m'a donné seulement le vif désir de m'initier aux progrès accomplis par M. Weierstrass dans des Leçons qui ne nous étaient pas connues (¹), progrès incontestables et dont un de mes Mémoires (²) contribuera, peut-être, à faire apprécier la valeur.

Ce premier travail de 1879 reste cependant original, non seulement par les équations différentielles qu'il fait connaître, mais encore par une nouvelle combinaison, parfaitement appropriée aux applications de Géométrie où la multiplication elliptique joue un rôle. Je veux parler de la combinaison $\mathrm{H}(mz)\mathrm{H}(z)^{\frac{m^2-4}{3}}\mathrm{H}(2z)^{-\frac{m^2-1}{3}}$, composée avec la fonction H de Jacobi, et un entier arbitraire m. Aussi bien que dans les invariants différentiels, je l'avais rencontrée en étudiant les *polygones de Poncelet*, objet d'un long travail, composé en 1877. Je n'ai publié, de ce travail, qu'un court fragment (³), borné à la partie la plus élémentaire. En me permettant de résoudre explicitement un problème, bien autrement ardu, dans la théorie des courbes du troisième degré, la combinaison dont il s'agit a prouvé son importance.

Quand, suivant l'idée féconde de M. Clebsch, on fait correspondre aux points d'une cubique plane un argument elliptique variable, qui soit nul en un point d'inflexion, on voit immédiatement se signaler à l'attention les points particuliers x_m, dont les arguments, multipliés par $3m$, reproduisent les périodes. Ces points ont, au surplus, une définition géométrique très simple. « *Trouver le covariant qui* » *s'évanouit en chacun de ces points et former l'équation du lieu*

(*C. R. Acad. Sc.*, t. LXXXVIII, 1879, p. 562). — *Sur deux équations aux dérivées partielles, relatives à la multiplication de l'argument dans les fonctions elliptiques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. LXXXVIII, 1879, p. 698).

(¹) Ma Note, de 1879, *Sur le développement d'une fonction intermédiaire* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. VII, 1879, p. 92) marque l'effort que je fis à cette époque pour retrouver, sur de vagues indications, les fonctions de M. Weierstrass. Mais bientôt des feuilles lithographiées, qui me furent gracieusement offertes, m'affranchirent de ce travail. On possède maintenant des feuilles imprimées, dont la publication est en cours; elles sont dues aux soins de M. Schwarz.

(²) *Sur une courbe élastique* (*Journ. Éc. Polyt.*, LIVᵉ Cahier, 1884, p. 183).

(³) *Sur certaines propriétés métriques, relatives aux polygones de Poncelet* (*Journal de Mathématiques*, 3ᵉ série, t. V, 1879, p. 285).

» *des points x_m pour le faisceau des cubiques ayant en commun* » *leurs points d'inflexion*, » tel est le problème que j'ai explicitement résolu dans un Mémoire intitulé *Recherches sur les courbes planes du troisième degré* (1), composé en 1879. Ce lieu, qui se décompose toujours en huit courbes ou en neuf courbes distinctes, suivant que le nombre m est divisible ou non par 3, a pour degré une fonction *arithmétique* du nombre m. Cette intervention de la théorie des nombres dans une question géométrique ne peut surprendre les mathématiciens familiarisés avec la division des arguments elliptiques.

Le Mémoire qui porte pour titre : *Problème concernant les courbes planes du troisième degré* (2) me paraîtrait aujourd'hui bien simple, si la peine qu'il m'a coûtée n'était présente à mon souvenir. Voici ce problème : « *Étant donnée une courbe plane du* » *troisième degré, trouver une courbe de la troisième classe,* » *qui soit tangente à la proposée en neuf points.* » D'après un élégant théorème de M. Cremona, on connaissait, par avance (3), trois solutions, les *cayleyennes* des trois réseaux de coniques, dont la courbe proposée est la *hessienne* commune. Mais, quand je voulus savoir s'il existe d'autres solutions, j'essayai vainement toutes les armes de mon arsenal géométrique, et, sans l'*addition des tiers de périodes*, j'aurais dû me résigner à ignorer que *les trois cayleyennes sont les seules solutions du problème.*

Ce n'est pas, comme on pourrait le croire, l'attrait d'un inconnu, quelque peu bizarre, qui me poussait à ce problème; loin de là, il m'était nécessaire pour l'étude d'une classe d'équations différentielles du second ordre qui, sans avoir vu le jour encore, me préoccupe depuis longtemps.

Voici encore un problème où l'on ne pouvait guère s'attendre à l'intervention des fonctions elliptiques : « *Une courbe plane de* » *degré $3m$ a neuf points multiples, chacun d'ordre m; on donne* » *huit de ces points et l'on demande le lieu du neuvième.* » C'est cependant par la division de l'argument qu'on peut le mieux étudier

---

(1) *Recherches sur les courbes planes du troisième degré* (*Mathematische Annalen*, t. XV, 1879, p. 359).

(2) *Problème concernant les courbes planes du troisième degré* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. IX, 1880, p. 96).

(3) *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*, p. 116.

ce lieu, *dont le degré est*

$$3m^2\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\left(1-\frac{1}{q^2}\right)\left(1-\frac{1}{r^2}\right)\cdots,$$

$p, q, r, \ldots$ *étant les facteurs premiers du nombre* m, comme on le voit dans le Mémoire intitulé : *Sur les courbes planes du sixième degré à neuf points doubles* (¹).

Instruit par ces travaux, j'ai pu enfin aborder une application des fonctions elliptiques à la Mécanique, difficile dans les formules, compliquée dans la discussion. C'est la *courbe élastique sous pression normale uniforme*, imaginée par M. Maurice Lévy, qui fait l'objet de cette application. Ce savant académicien, recherchant la condition de stabilité d'un anneau circulaire, comprimé normalement (²) sur tout son périmètre, avait laissé, dans son élégante solution, une lacune à faire disparaître : il me conseilla de le tenter en effectuant, pour ce problème, l'inversion des intégrales elliptiques qu'il y avait rencontrées. J'y parvins, en effet, et donnai la solution demandée dans une Note présentée à l'Académie le 18 février 1884 (³). « Mais l'étude de la nouvelle courbe élastique (⁴) m'a vite » entraîné au delà. Examinée géométriquement, cette courbe pré- » sente bien des formes différentes, dont deux seulement s'appliquent » au problème en question. J'ai désiré connaître toutes ces formes et » exprimer leurs éléments par des développements en séries expli- » cites; pour rendre ces séries réelles, il a fallu distinguer trois caté- » gories de formules, tandis qu'une seule convient au problème de » M. Maurice Lévy. Il m'a paru désirable de rechercher ensuite des » applications mécaniques pour chaque forme de la courbe. De là » une nouvelle source de développements.... » Le Mémoire *Sur une courbe élastique* (⁵), d'où ce passage est extrait, est précédé

(¹) *Sur les courbes planes du sixième degré à neuf points doubles* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. X, 1882, p. 162).

(²) *Sur un nouveau cas intégrable du problème de l'élastique et l'une de ses applications* (*Comptes rendus*, t. XCVII, p. 694, et *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 3ᵉ série, t. X, 1883, p. 1).

(³) *Sur une courbe élastique* (*C. R. Acad. Sc.*, t. XCVIII, 1884, p. 422).

(⁴) Extrait du Mémoire *Sur une courbe élastique* (*Journ. Éc. Polyt.*, LIVᵉ Cahier, 1884, p. 183.

(⁵) Cité dans la Note précédente.

d'une *Note sur l'inversion des intégrales elliptiques* [1]; j'ai réuni dans cette Note divers résultats dont l'utilité ne sera pas bornée à l'application en vue de laquelle j'ai dû les rechercher.

THÉORIE DES NOMBRES.

Des fonctions elliptiques à la théorie des nombres, la transition est traditionnelle. J'ai seulement le regret de n'avoir à parcourir ici que des travaux arithmétiques d'une faible importance.

Une formule célèbre, trouvée d'abord par l'induction, a conduit Euler à une *loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs*. Elle sert aussi à prouver un théorème de *partitions* non moins remarquable. Les fonctions elliptiques fournissent la démonstration de la formule d'Euler. Jacobi n'en a pas moins consacré un Mémoire assez long [2] à la démonstration directe du théorème de partitions, démonstration renouvelée depuis avec une grande élégance par M. Franklin [3]. J'ai voulu, à mon tour, demander à l'Arithmétique la preuve de la *loi tout extraordinaire* elle-même et de ses analogues, dont j'ai trouvé un grand nombre. C'est à quoi j'ai réussi dans un Mémoire intitulé *Sur diverses formules récurrentes concernant les diviseurs des nombres entiers* [4], publié en 1878, et précédé de deux Notes sur le même sujet [5]. L'une des formules conduit à une démonstration nouvelle, après tant d'autres, pour la loi de décomposition des nombres premiers en somme de deux ou trois carrés. Cette démonstration indirecte résulte de ce que la formule met en évidence les faits suivants : tout nombre premier, non décomposable en somme de deux carrés, est de la forme $(4m-1)$; tout nombre premier, non décomposable en somme de deux ou trois carrés, est de la forme $(8m-1)$.

---

[1] *Note sur l'inversion des intégrales elliptiques* (*Journ. Éc. Polyt.*, LIVe Cahier, 1884, p. 171).

[2] *Mathematische Werke*, t. I, p. 345. Ce Mémoire ne figure pas dans les Volumes, parus jusqu'ici, de la magnifique édition nouvelle.

[3] *Comptes rendus*, t. XCII, 1881, p. 448.

[4] *Sur diverses formules récurrentes concernant les diviseurs des nombres entiers* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. VI, 1878, p. 173).

[5] *Sur une formule récurrente concernant les sommes des diviseurs des nombres entiers* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. V, 1877, p. 158); *Sur les sommes des diviseurs des nombres entiers, et les décompositions en deux carrés* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. VI, 1878, p. 119).

La collection complète des fractions ordinaires, dont les dénominateurs ne dépasse pas un nombre arbitrairement choisi, ne semble guère devoir être l'objet de bien hautes spéculations mathématiques. Cependant, en rangeant cette collection, Farey, dans l'année 1816 (¹), y remarqua une loi surprenante : Si l'on y prend deux fractions distantes de deux rangs, et que l'on compose une nouvelle fraction ayant pour numérateur la somme des numérateurs des précédentes, pour dénominateur la somme de leurs dénominateurs, cette nouvelle fraction est justement égale à celle qui, dans la collection rangée par ordre de grandeur, est intercalée entre les deux fractions considérées. Ce fut Cauchy qui, à la séance suivante de la Société philomathique, apporta la démonstration. Revenant sur ce sujet curieux, j'ai, dans un petit Mémoire de 1877 (²), fait connaître l'existence de la même propriété pour une infinités d'autres suites, analogues à celles de Farey.

C'est dans une partie bien autrement difficile de la théorie des nombres que j'ai, en 1883, tenté un essai, comme on peut le voir par une Note sur l'*Approximation des sommes de fonctions numériques* (³). Pour but, je m'y propose, à l'exemple de Dirichlet, la recherche des expressions asymptotiques; pour moyen, j'emploie les intégrales imaginaires, comme l'a fait Riemann. Cette Note, d'après mon espoir, devait avoir une suite. J'avoue que des obstacles inattendus m'ont arrêté : une proposition, affirmée par Riemann dans son Mémoire sur les nombres premiers, sert de fondement au travail que j'ai préparé; mais cette proposition que naturellement j'admettais n'a pu être prouvée. Il faudra peut-être, avant qu'on sache l'établir (et il est vraisemblable que Riemann ne l'a pas su faire), de nouveaux progrès sur une notion encore bien nouvelle, le *genre* des transcendantes entières.

THÉORIE DES SÉRIES.

Pour s'aventurer, sans trop de risques, sur ce périlleux terrain, il faut connaître, dans ses détours subtils, la théorie toujours nouvelle des séries infinies. Mon premier Mémoire, sur cette partie

(¹) *Bulletin des Sciences pour* 1816.

(²) *Sur des suites de fractions, analogues à la suite de Farey* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. V, 1877, p. 170).

(³) *Sur l'approximation des sommes de fonctions numériques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. XCVI, 1883, p. 634).

de l'Analyse, est de 1881 (¹). C'est une série nouvelle, imaginée par M. Léauté (²), pour l'interpolation des fonctions expérimentales, qui en a été l'origine. Généralisant l'idée de M. Léauté, j'ai considéré des séries très diverses, procédant toutes suivant des polynomes entiers, dont chacun est la dérivée du suivant. C'est là, pour une suite indéfinie de polynomes, une loi générale de formation, qui laisse place à beaucoup de variété; elle avait donné lieu récemment à un travail intéressant, dû à M. Appell.

Il s'agissait de découvrir les conditions, à la fois nécessaires et suffisantes, pour que le développement d'une fonction soit possible par ces séries nouvelles. J'y ai réussi, et j'ai rencontré là un caractère distinctif de certaines fonctions *entières*, qui semble intervenir pour la première fois en Analyse. Ce caractère est relatif à la manière dont les dérivées successives de la fonction varient, quand l'indice de dérivation devient très grand; il consiste en ceci : pour une telle fonction $f(x)$, il existe des constantes α, telles que le produit $\alpha^m f^{(m)}(x)$ ne devienne pas infini avec m. Il a été, depuis, rattaché par M. Poincaré à la notion du genre (³).

Pour fixer un peu les idées, citons des exemples : la fonction $\sin x$ a ce caractère, et $\sin(x^2)$ ne l'a pas. Seules les fonctions qui ont ce caractère sont développables par les séries dont je parle, et elles le sont pour toutes les valeurs de la variable. De telles circonstances, si différentes de celles que suppose l'idée d'interpolation, pourraient donner singulièrement à réfléchir.

Après ces séries nouvelles, je m'enhardis à l'étude d'une série ancienne, qui s'était refusée jusqu'alors à livrer son secret. Elle nous vient du célèbre géomètre Abel et n'a été publiée par lui que pour le développement des polynomes entiers (⁴). Mais parmi ses « travaux

(¹) *Sur certaines séries pour le développement des fonctions* (deux Notes) (*C. R. Acad. Sc.*, t. XCIII, 1881, p. 781 et 833); *Sur des séries pour développer les fonctions d'une variable* (*Bull. Sc. math. et astron.*, 2ᵉ série, t. V, 1881, p. 462).

(²) *Développement d'une fonction à une seule variable, dans un intervalle donné, suivant les valeurs moyennes de cette fonction et de ses dérivées successives, dans cet intervalle*, par M. Léauté (*Comptes rendus*, t. XC, 14 juin 1880, p. 1404).

(³) *Sur les fonctions entières*, par M. H. Poincaré (*Bulletin de la Société mathématique*, t. XI, 20 juillet 1883, p. 136).

(⁴) *Démonstration d'une expression de laquelle la formule binome est un cas particulier*, publiée dans le *Journal de Crelle*, t. I, 1826 (*Œuvres complètes*, t. I, p. 102 de la 2ᵉ édition).

» de jeunesse, datant d'une époque où sa critique n'était pas encore » complètement développée ([1]) », et publiés après sa mort, on la trouve appliquée aux fonctions quelconques, comme il était naturel ([2]).

Rectifiant une faute de Lagrange, dans la théorie du pendule, Bravais s'écrie : « Tant il est vrai que l'erreur est tellement humaine, » qu'elle peut se glisser sous la plume du plus illustre géomètre ! ([3]) ». N'éprouve-t-on pas le même étonnement philosophique et douloureux en voyant, dans le Mémoire d'Abel, les logarithmes développés par une formule dont l'inexactitude est évidente ? Le rapprochement serait pourtant bien injuste, entre la faute qui s'étale au grand jour dans la *Mécanique analytique*, et l'erreur qui se dissimule dans un manuscrit dédaigné de son auteur.

Ces souvenirs sont permis en consolation de nos propres erreurs.

C'est le même caractère des fonctions, nécessaire aux séries dont je parlais tout à l'heure, qui est nécessaire encore au développement par la série d'Abel. J'ai, par son intervention, réussi à établir la théorie exacte de cette série, qui, mieux connue, gagne en intérêt ([4]). N'est-il pas, par exemple, bien curieux qu'*appliquée à une fraction rationnelle quelconque, la série d'Abel converge toujours et ne représente jamais cette fraction ?*

Des circonstances de cette nature, qui déconcertent les anciennes méthodes, et nous rappellent impérieusement à la rigueur mathématique, se sont déjà offertes dans d'autres séries. Cauchy, pour la première fois, les a montrées dans la série de Taylor. On en voit des exemples, à volonté, dans celles qui font l'objet de mon premier Mémoire. Mais toujours il fallait chercher l'exemple un peu loin; la série d'Abel le donne immédiat. Ma Note du 9 octobre 1882 ([5]) fait connaître une autre série, plus décevante encore. Elle est à peine plus compliquée que la série d'Abel; les coefficients s'y déterminent

---

([1]) Cette phrase est empruntée à la préface, placée par MM. Sylow et Lie, en tête de la 2ᵉ édition des *Œuvres d'Abel* (préface, p. III).

([2]) *Ibid.*, t. II, p. 72.

([3]) *Mécanique analytique*, par J. Lagrange; 3ᵉ édition, revue, corrigée et annotée par M. J. Bertrand; t. II, 1855, p. 355, Note VII.

([4]) *Sur une série d'Abel* (*C. R. Acad. Sc.*, t. XCIII, 1881, p. 1003); *Sur une série d'Abel* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. X, 1881, p. 67).

([5]) *Sur une série pour développer les fonctions d'une variable* (*C. R. Acad. Sc.*, t. XCV, 1882, p. 629).

par des intégrales définies, et l'on pourrait croire, d'après l'exemple de la série de Fourier, qu'elle s'applique, pour ainsi dire, à toutes les fonctions. Bien au contraire, elle ne se prête qu'à des fonctions entières très spéciales, dont les dérivées successives décroissent très rapidement quand augmente l'ordre de dérivation, et qui, par là, se rapprochent beaucoup des polynomes entiers. On ne peut développer ainsi, pas même la fonction exponentielle; et pourtant la série converge ! Il n'appartient pas au hasard de suggérer un tel exemple : c'est là, en effet, un fragment détaché d'un travail fort long, que je n'ai pas encore achevé.

SUJETS DIVERS.

J'ai passé en revue l'œuvre de mes labeurs; voici maintenant celle de mes loisirs, mobile et diverse, suivant la devise : « *Variam semper dant otia mentem* ». J'en analyserai seulement quelques pièces.

Le contact des surfaces quelconques avec les surfaces du second degré offre une exception singulière à la théorie générale. Cette exception a été signalée par M. Hermite dans son *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*. En écrivant le Mémoire *Sur le contact des surfaces* (¹), j'ai voulu rechercher si cette exception est isolée. Elle a ses analogues dans le contact des surfaces quelconques avec celles du troisième, du quatrième et du cinquième degré. Ces questions n'intéressent pas seulement la Géométrie, mais aussi une partie de l'Analyse, où l'on s'occupe de former les équations aux différences partielles par l'élimination. Le théorème de M. Hermite peut s'énoncer ainsi : Les surfaces du second degré satisfont à deux équations aux différences partielles du troisième ordre, exprimant la double génération rectiligne. De même, les surfaces du troisième degré satisfont à trois équations du cinquième ordre, celles du quatrième à trois équations du septième ordre, et celles du cinquième degré à une équation du neuvième ordre, résultats tous contradictoires à ceux que suggère le simple dénombrement des constantes à éliminer. Dans ce Mémoire de 1874, apparaît l'idée première des invariants différentiels.

(¹) *Sur le contact des surfaces* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. III, 1874, p. 28).

Un lien curieux rattache au précédent le petit Mémoire [1] intitulé : *Théorème concernant les surfaces dont les rayons de courbure principaux sont liés par une relation.* D'après la proposition de M. Hermite, que je viens de rappeler, les surfaces quelconques ont, en certains points isolés, des contacts exceptionnels avec des surfaces du second degré. Dans le cas spécial où les rayons de courbure principaux sont liés par une relation, ces surfaces du second degré osculatrices sont de révolution, où bien se réduisent soit à des cônes, soit à des cylindres. C'est ce qui résulte d'une interprétation donnée à l'équation aux différences partielles, exprimant la relation entre les rayons de courbure, ainsi qu'aux deux équations vérifiées par les surfaces du second degré.

Quatre Mémoires [2] se rapportent à la théorie du déplacement. Je désire en citer deux.

Celui qui est intitulé : *Sur le déplacement d'un solide invariable* (1873) fait connaître les théorèmes généraux, suivant lesquels on peut réduire tous les déplacements infiniment petits d'un corps solide à des rotations, dans les divers cas où ce corps est assujetti à des conditions en nombre quelconque. Il se recommande par la simplicité de l'analyse, la même pour tous les cas. Dans ce Mémoire, comme dans le précédent, je me plais à reconnaître l'influence des travaux de M. Mannheim.

Le dernier, intitulé *Sur la théorie du déplacement* (1883), conduit par une voie toute nouvelle au théorème fondamental et classique du déplacement hélicoïdal *fini;* il fait connaître la composition de ces déplacements.

Sous le titre *Formules d'Algèbre, résolution des équations du troisième et du quatrième degré*, j'ai publié récemment un Mémoire [3] dont ce titre dit assez le sujet tout élémentaire. Un procédé

---

(1) *Théorème concernant les surfaces dont les rayons de courbure principaux sont liés par une relation* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. IV, 1876, p. 94).

(2) *Sur le mouvement d'une droite* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. I, 1873, p. 114); *Sur le déplacement d'un solide* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. II, 1874, p. 56); *Sur certains cas singuliers du déplacement d'un solide* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. VII, 1879, p. 18); *Sur la théorie du déplacement* (*Nouvelles Annales*, 3e série, t. I, 1883).

(3) *Formules d'Algèbre, résolution des équations du troisième et du quatrième degré* (*Nouvelles Annales*, 3e série, t. IV, 1885).

nouveau conduit facilement le lecteur à la connaissance des résultats que l'on considère d'habitude comme étant réservés à la théorie des covariants. La résolution de l'équation du quatrième degré y semble même plus achevée.

Si je mentionne encore les quelques lignes intitulées *Sur l'équation différentielle des coniques* (¹), c'est pour remercier M. Camille Jordan d'avoir placé dans son Cours (²) cette équation, d'une forme si curieusement simple $\left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)''' = 0$.

Cette équation, base des invariants différentiels, m'a fourni, en 1877, le moyen de résoudre un problème qu'avait proposé M. Bertrand : « *En sachant que les planètes décrivent des sections coniques, et* » *sans rien supposer de plus, trouver l'expression des composantes* » *de la force qui les sollicite, exprimées en fonction des coordon-* » *nées de son point d'application* (³). » J'ai répondu à cette question (⁴) en même temps que M. Darboux. C'est un souvenir par lequel il m'est agréable de terminer cette Notice.

(¹) *Sur l'équation différentielle des coniques* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. VII, 1879, p. 83).

(²) *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, par M. C. Jordan; t. I, p. 53.

(³) *Sur la possibilité de déduire d'une seule des lois de Kepler le principe de l'attraction*, Note de M. J. Bertrand (*Comptes rendus*, t. LXXXIV, 9 avril 1877, p. 671).

(⁴) *Sur les lois de Képler, solution d'un problème proposé par M. J. Bertrand* (*C. R. Acad. Sc.*, t. LXXXIV, 1877, p. 939).

SUR

L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 58, 1864 (I), p. 471.

Cette méthode repose tout entière sur une transformation de l'expression linéaire différentielle à coefficients constants de la forme générale.

Si l'on considère le polynome de degré m

$$P = \alpha^m + A_1 \alpha^{m-1} + A_2 \alpha^{m-2} + \ldots + A_{m-1} \alpha + A_m$$

et l'expression différentielle

$$Q = \frac{d^m y}{dx^m} + A_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + A_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \ldots + A_{m-1} \frac{dy}{dx} + A_m y,$$

la multiplication de P par le binome $\alpha - a$ le change en un polynome de degré $(m+1)$

$$\begin{aligned} P_1 = \alpha^{m+1} &+ (A_1 - a)\alpha^m + (A_2 - a A_1)\alpha^{m-1} + \ldots \\ &+ (A_{m-1} - a A_{m-2})\alpha^2 + (A_m - a A_{m-1})\alpha - A_m a, \end{aligned}$$

et l'expression différentielle correspondante,

$$\begin{aligned} Q_1 = \frac{d^{m+1} y}{dx^{m+1}} &+ (A_1 - a)\frac{d^m y}{dx^m} + (A_2 - a A_1)\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots \\ &+ (A_{m-1} - a A_{m-2})\frac{d^2 y}{dx^2} + (A_m - a A_{m-1})\frac{dy}{dx} - A_m a y, \end{aligned}$$

est égale à

$$\frac{dQ}{dx} - a Q,$$

ce que l'on peut écrire

$$Q_1 = e^{ax} \frac{d\, e^{-ax} Q}{dx}.$$

Cela posé, on démontre aisément qu'en appelant $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m$ les racines de l'équation $P = 0$, on peut écrire Q sous la forme suivante

$$Q = e^{\alpha_1 x} \frac{d}{dx} e^{(\alpha_2 - \alpha_1)x} \frac{d}{dx} e^{(\alpha_3 - \alpha_2)x} \frac{d}{dx} e^{(\alpha_4 - \alpha_3)x} \ldots \frac{d}{dx} e^{(\alpha_m - \alpha_{m-1})x} \frac{d}{dx} (e^{-\alpha_m x} y).$$

Si l'on suppose que toutes les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m$ soient inégales, on aura, pour la résolution de l'équation $Q = 0$,

$$y = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x} + C_3 e^{\alpha_3 x} + \ldots + C_m e^{\alpha_m x}.$$

Si l'on a

$$\alpha_m = \alpha_{m-1} = \alpha_{m-2} = \ldots = \alpha_{m-p} = a,$$

la valeur de Q deviendra

$$Q = e^{\alpha_1 x} \frac{d}{dx} e^{(\alpha_2 - \alpha_1)x} \frac{d}{dx} e^{(\alpha_3 - \alpha_2)x} \ldots \frac{d}{dx} e^{(a - \alpha_{m-p-1})x} \frac{d^{p+1} e^{-ax} y}{dx^{p+1}}$$

et celle de y

$$y = k_1 e^{\alpha_1 x} + k_2 e^{\alpha_2 x} + \ldots + e^{ax}(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots + C_{p+1} x^p).$$

L'équation $Q = e^{ax}$ se résoudra aussi facilement. Si l'on pose

$$P = \varphi(\alpha),$$

on aura

$$y = \frac{e^{ax}}{\varphi(a)} + C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x} + \ldots$$

ou, si a est racine de l'équation $\varphi(\alpha) = 0$, et que l'on ait

$$\alpha_m = \alpha_{m-1} = \alpha_{m-2} = \ldots = \alpha_{m-p} = a,$$

la solution sera

$$y = \frac{e^{ax} x^{p+1}}{\varphi^{(p+1)}(a)} + e^{ax}(C_1 + C_2 x + \ldots + C_{p+1} x^p) + \ldots.$$

Occupons-nous maintenant de résoudre l'équation générale $Q = \psi(x)$. On aura

$$y = e^{\alpha_m x} \int e^{(\alpha_{m-1} - \alpha_m)x} dx \int e^{(\alpha_{m-2} - \alpha_{m-1})x} dx \ldots \int e^{-\alpha_1 x} \psi(x)\, dx.$$

On peut transformer cette valeur de y de façon qu'elle soit exprimée en fonction de m intégrales indépendantes.

Si les racines $\varphi(\alpha) = 0$ sont inégales, on obtient

$$y = \sum \frac{e^{\alpha_i x} \int e^{-\alpha_i x} \psi(x)\, dx}{\varphi'(\alpha_i)},$$

le signe $\sum$ s'appliquant à toutes les racines α_i de $\varphi(\alpha) = 0$. Cette formule est connue. Mais celle qui s'applique au cas général où plusieurs des racines α_i sont égales n'a encore été, je crois, donnée dans aucun ouvrage. Elle se déduit assez aisément des formules précédentes. Elle peut s'écrire

$$y = \sum \left\{ m_i \int_0^x \psi(z)\, dz \frac{d^{m_i - 1}\left[\dfrac{e^{\alpha_i (x-z)}}{\varphi^{(m_i)}(\alpha_i)}\right]}{d\alpha_i^{m_i - 1}} + (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots + C_{m_i} x^{m_i - 1}) e^{\alpha_i x} \right\},$$

le signe $\sum$ s'appliquant comme précédemment aux racines α_i de

$$\varphi(\alpha) = 0,$$

et m_i désignant le degré de multiplicité de la racine α_i.

Dans le cas où $\psi(x)$ est un polynome, on a pour solution particulière un autre polynome, dont la forme générale se trouve facilement au moyen des formules précédentes :

$$y = F(0)\psi(x) + \frac{F'(0)}{1}\psi'(x) + \frac{F''(0)}{1.2}\psi''(x) + \ldots \\ + \frac{F^{(q-1)}(0)}{1.2\ldots(q-1)}\psi^{(q-1)}(x) + \frac{F^{(q)}(0)}{1.2.3\ldots q}\psi^{(q)}(x).$$

Dans cette équation on a posé

$$F(\alpha) = \frac{1}{\varphi(\alpha)},$$

et q désigne le degré de $\psi(x)$. Cette formule se prête à une vérification assez élégante qui peut lui servir de démonstration.

Rien n'empêche de supposer la série prolongée à l'infini par les termes $\frac{F^{(q+1)}(0)}{1.2\ldots(q+1)}\psi^{(q+1)}(x), \ldots$, puisque $\psi^{(q+1)}(x)$, $\psi^{(q+2)}, \ldots$ sont nulles. Or, la substitution de cette série à la place de y dans l'expression Q donne une expression linéaire entre $\psi(x)$ et ses dérivées, telle que le coefficient de la dérivée d'indice r sera le même que celui du terme

qui contient α avec l'exposant r dans la multiplication de $\varphi(\alpha)$ par la série :

$$F(0)+\frac{F'(0)}{1}\alpha+\frac{F''(0)}{1.2}\alpha^2+\frac{F'''(0)}{1.2.3}\alpha^3+\ldots.$$

Comme cette série est égale à $F(\alpha)$, son produit par $\varphi(\alpha)$ donnera l'unité. Donc la substitution de la première série dans Q donnera identiquement $\psi(x)$ pour résultat.

Si $\varphi(\alpha)$ contient le facteur α à une certaine puissance, que je désigne par p, $F(0)$, $F'(0)$, ..., $F^{(p)}(0)$ sont des quantités infinies, et la formule n'est plus applicable. Mais elle s'applique à $\frac{d^p y}{dx^p}$, et donne, si l'on pose $\varphi(\alpha)=\alpha^p f(\alpha)$:

$$y=f(0)\int^p \psi(x)\,dx^p+\frac{f'(0)}{1}\int^{p-1}\psi(x)\,dx^{p-1}+\ldots$$
$$+\frac{f^{(p)}(0)}{1.2\ldots p}\psi(x)+\frac{f^{(p+1)}(0)}{1.2\ldots(p+1)}\psi'(x)+\ldots.$$

Cette série et la précédente, dans le cas où $\psi(x)$ n'est pas un polynome, donneront des solutions particulières de l'équation

$$Q=\psi(x),$$

si elles sont convergentes.

Enfin, si $\psi(x)$ est susceptible d'être représenté par l'intégrale double

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dn\int_{-\infty}^{\infty}dm\,\psi(m)\cos n(x-m),$$

on peut écrire une solution de l'équation

$$Q=\psi(x)$$

sous la forme d'une intégrale double prise entre les mêmes limites :

$$y=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dn\int_{-\infty}^{\infty}dm\,\varphi(m)\left[\frac{e^{n(x-m)\sqrt{-1}}}{\varphi(n\sqrt{-1})}+\frac{e^{-n(x-m)\sqrt{-1}}}{\varphi(-n\sqrt{-1})}\right],$$

ou, en posant $\varphi(n\sqrt{-1})=\varphi_1(n)+\sqrt{-1}\,\varphi_2(n)$,

$$y=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dn\int_{-\infty}^{\infty}dm\,\psi(m)\frac{\varphi_1(n)\cos n(x-m)+\varphi_2(n)\sin n(x-m)}{[\varphi_1(n)]^2+[\varphi_2(n)]^2}.$$

Ce résultat et le précédent peuvent être appliqués à la recherche d'une solution particulière d'une équation linéaire à coefficients constants aux différences mêlées ; $\varphi(\alpha)$ désignera alors la fonction transcendante dans laquelle se changera Q si l'on y remplace les termes de la forme $\Delta^r \dfrac{d^s y}{dx^s}$ par $\alpha^s (e^{\alpha \Delta x} - 1)^r$.

Pour la résolution des équations aux différences finies, on peut établir des formules tout à fait analogues aux précédentes.

SUR

L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES.

Manuscrit inédit de 1864.

On sait depuis longtemps intégrer, dans tous les cas, les équations différentielles linéaires à coefficients constants; mais je ne crois pas qu'on ait jamais donné de formules générales et explicites pour la résolution de ces équations. J'ai cherché, dans cette Note, à établir quelques formules générales. Je les ai déduites d'une méthode uniforme, s'appliquant à tous les cas. Cette méthode, bien que ressemblant par plusieurs points à celle qui est usitée dans les universités d'Angleterre, en diffère par la forme et laisse peut-être moins à désirer sous le rapport de la rigueur.

Lemme. — *Considérons le polynome de degré m*

$$P = \alpha^m + A_1\alpha^{m-1} + A_2\alpha^{m-2} + \ldots + A_{m-1}\alpha + A_m,$$

et l'expression différentielle linéaire d'ordre m à coefficients constants

$$Q = \frac{d^m y}{dx^m} + A_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + A_2\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \ldots + A_{m-1}\frac{dy}{dx} + A_m y.$$

Si l'on multiplie P *par le binome* $\alpha - a$, *on le change en un polynome* P_1 *de degré* $m+1$

$$\begin{aligned}P_1 = P(\alpha - a) = \alpha^{m+1} &+ (A_1 - a)\alpha^m + (A_2 - aA_1)\alpha^{m-1} + \ldots \\ &+ (A_{m-1} - aA_{m-2})\alpha^2 + (A_m - aA_{m-1})\alpha - A_m a;\end{aligned}$$

et l'expression différentielle linéaire correspondante

$$Q_1 = \frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} + (A_1 - a)\frac{d^m y}{dx^m} + (A_2 - aA_1)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \ldots$$

est égale à $\frac{dQ}{dx} - aQ$, *qu'on peut écrire*

$$Q_1 = e^{ax}\frac{d(e^{-ax}Q)}{dx}.$$

Ce lemme permet de transformer d'une manière avantageuse une expression différentielle linéaire donnée à coefficients constants.

Soit l'expression

$$V = \frac{d^m y}{dx^m} + A_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \ldots + A_m y,$$

et le polynome

$$U = \alpha^m + A_1\alpha^{m-1} + \ldots + A_m,$$

dont $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m$ sont les racines. Je pose

$$\frac{U}{\alpha - \alpha_1} = U_1, \qquad \frac{U_1}{\alpha - \alpha_2} = U_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{U_{p-1}}{\alpha - \alpha_p} = U_p, \qquad \ldots,$$

$$\frac{U_{m-2}}{\alpha - \alpha_{m-1}} = U_{m-1} = \alpha - \alpha_m.$$

Si l'on a

$$U_p = \alpha^{m-p} + B_1\alpha^{m-p-1} + \ldots + B_{m-p},$$

je poserai

$$V_p = \frac{d^{m-p}y}{dx^{m-p}} + B_1\frac{d^{m-p-1}y}{dx^{m-p-1}} + \ldots + B_{m-p}y.$$

D'après ces notations, on aura conformément au lemme précédent

$$V = e^{\alpha_1 x}\frac{de^{-\alpha_1 x}V_1}{dx},$$

$$V_1 = e^{\alpha_2 x}\frac{de^{-\alpha_2 x}V_2}{dx},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$V_{p-1} = e^{\alpha_p x}\frac{de^{-\alpha_p x}V_p}{dx},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$V_{m-2} = e^{\alpha_{m-1}x}\frac{de^{-\alpha_{m-1}x}V_{m-1}}{dx},$$

$$V_{m-1} = \frac{dy}{dx} - \alpha_m y = e^{\alpha_m x}\frac{de^{-\alpha_m x}y}{dx}.$$

Je suppose qu'on ait à résoudre l'équation $V = 0$. L'équation proposée revient à

$$e^{\alpha_1 x}\frac{de^{-\alpha_1 x}V_1}{dx} = 0 \qquad \text{ou} \qquad V_1 = K_1 e^{\alpha_1 x},$$

équation équivalente à celle-ci

$$e^{\alpha_2 x}\frac{de^{-\alpha_2 x}V_2}{dx} = K_1 e^{\alpha_1 x} \quad \text{ou} \quad V_2 = \frac{K_1 e^{\alpha_1 x}}{\alpha_1 - \alpha_2} + K_2 e^{\alpha_2 x},$$

d'où

$$V_3 = \frac{K_1 e^{\alpha_1 x}}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)} + \frac{K_2 e^{\alpha_2 x}}{\alpha_2 - \alpha_3} + K_3 e^{\alpha_3 x},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$V_p = \frac{K_1 e^{\alpha_1 x}}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)\dots(\alpha_1 - \alpha_p)} + \frac{K_2 e^{\alpha_2 x}}{(\alpha_2 - \alpha_3)\dots(\alpha_2 - \alpha_p)} + \dots + K_p e^{\alpha_p x}.$$

$$y = \frac{K_1 e^{\alpha_1 x}}{(\alpha_1 - \alpha_2)\dots(\alpha_1 - \alpha_m)} + \frac{K_2 e^{\alpha_2 x}}{(\alpha_2 - \alpha_3)\dots(\alpha_2 - \alpha_m)} + \dots + K_m e^{\alpha_m x}$$
$$= C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x} + \dots + C_m e^{\alpha_m x}.$$

Si l'équation $U = o$ admet des racines égales, ce résultat se modifie, mais la méthode précédente donne la solution immédiate.

Supposons

$$\alpha_m = \alpha_{m-1} = \alpha_{m-2} = \dots = \alpha_{m-p} = a.$$

On aura

$$V_{m-p-1} = e^{ax}\frac{de^{-ax}V_{m-p}}{dx},$$

$$V_{m-p} = e^{ax}\frac{de^{-ax}V_{m-p+1}}{dx},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$V_{m-1} = e^{ax}\frac{de^{-ax}y}{dx};$$

donc

$$V_{m-p-1} = e^{ax}\frac{d^{p+1}e^{-ax}y}{dx^{p+1}}.$$

Or

$$V_{m-p-1} = K_1 e^{\alpha_1 x} + K_2 e^{\alpha_2 x} + \dots + K_{m-p-1} e^{\alpha_{m-p-1} x},$$

donc

$$y = \frac{K_1}{(\alpha_1 - a)^{p+1}} e^{\alpha_1 x} + \frac{K_2}{(\alpha_2 - a)^{p+1}} e^{\alpha_2 x} + \dots$$
$$+ e^{ax}(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots + C_{p+1} x^p).$$

Soit à résoudre l'équation

$$V = e^{ax}.$$

On aura successivement

$$V = e^{ax},$$

$$V_1 = \frac{e^{ax}}{a - \alpha_1} + K_1 e^{\alpha_1 x},$$

$$V_2 = \frac{e^{ax}}{(a - \alpha_1)(a - \alpha_2)} + K_1 e^{\alpha_1 x} + K_2 e^{\alpha_2 x},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$y = \frac{e^{ax}}{(a - \alpha_1)(a - \alpha_2)\ldots(a - \alpha_m)} + C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x} + \ldots + C_m e^{\alpha_m x};$$

ou, en posant $U = \varphi(\alpha)$,

$$y = \frac{e^{ax}}{\varphi(a)} + C_1 e^{\alpha_1 x} + \ldots.$$

Si a est racine de $U = 0$, et qu'on ait

$$\alpha_m = \alpha_{m-1} = \ldots = \alpha_{m-p} = a,$$

il viendra

$$V_{m-p-1} = \frac{e^{ax}}{(a - \alpha_1)(a - \alpha_2)\ldots(a - \alpha_{m-p-1})} + K_1 e^{\alpha_1 x} + \ldots$$

$$= e^{ax} \frac{d^{p+1} e^{-ax} y}{dx^{p+1}},$$

$$y = \frac{x^{p+1} e^{ax}}{1.2\ldots(p+1)(a - \alpha_1)(a - \alpha_2)\ldots(a - \alpha_{m-p-1})} + e^{ax}(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots + C_{p+1} x^p) + \ldots$$

ou

$$y = \frac{e^{ax} x^{p+1}}{\varphi^{(p+1)}(a)} + e^{ax}(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots + C_{p+1} x^p) + \ldots.$$

Occupons-nous maintenant de résoudre l'équation générale

$$V = \psi(x).$$

On aura successivement

$$V_1 = e^{\alpha_1 x} \int e^{-\alpha_1 x} \psi(x)\, dx,$$

$$V_2 = e^{\alpha_2 x} \int e^{(\alpha_1 - \alpha_2) x}\, dx \int e^{-\alpha_1 x} \psi(x)\, dx,$$

$$V_3 = e^{\alpha_3 x} \int e^{(\alpha_2 - \alpha_3) x}\, dx \int e^{(\alpha_1 - \alpha_2) x}\, dx \int e^{-\alpha_1 x} \psi(x)\, dx,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$y = e^{\alpha_m x} \int e^{(\alpha_{m-1} - \alpha_m) x}\, dx \int e^{(\alpha_{m-2} - \alpha_{m-1}) x}\, dx \ldots \int e^{-\alpha_1 x} \psi(x)\, dx.$$

Le second membre de cette équation comprend m signes d'intégration. Je vais transformer cette valeur de y de façon qu'elle soit exprimée en fonction de m intégrales indépendantes.

Examinons d'abord le cas où $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m$ sont des quantités toutes inégales. Rappelons que si, dans la formule de décomposition des fractions rationnelles

$$\frac{1}{f(\alpha)} = \sum \frac{1}{f'(\alpha_i)(\alpha - \alpha_i)},$$

ou

$$f(\alpha) \sum \frac{1}{f'(\alpha_i)(\alpha - \alpha_i)} - 1 = 0,$$

on égale à zéro le coefficient de α^{m-1} du premier membre, on obtient

$$\sum \frac{1}{f'(\alpha_i)} = 0,$$

le signe $\sum$ s'étendant, dans ces formules, à toutes les racines α_i de l'équation $f(\alpha) = 0$.

Posons

$$\mathrm{U} = \varphi(\alpha),$$

$$\varphi_1(\alpha) = \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha - \alpha_m},$$

$$\varphi_2(\alpha) = \frac{\varphi_1(\alpha)}{\alpha - \alpha_{m-1}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\varphi_{m-2}(\alpha) = \frac{\varphi_{m-3}(\alpha)}{\alpha - \alpha_3} = (\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_2);$$

de ces égalités, on tire

$$(\alpha_i - \alpha_{m-p})\, \varphi'_{m-p+1}(\alpha_i) = \varphi'_{m-p}(\alpha_i),$$

α_i étant une racine quelconque de $\varphi_{m-p+1}(\alpha) = 0$.

L'intégration par parties des formules précédemment écrites donnera

$$\mathrm{V}_1 = e^{\alpha_1 x} \int e^{-\alpha_1 x}\, \psi(x)\, dx,$$

$$\mathrm{V}_2 = \frac{e^{\alpha_1 x}}{\alpha_1 - \alpha_2} \int e^{-\alpha_1 x}\, \psi(x)\, dx + \frac{e^{\alpha_2 x}}{\alpha_2 - \alpha_1} \int e^{-\alpha_2 x}\, \psi(x)\, dx$$

ou

$$V_2 = \frac{e^{\alpha_1 x}\int e^{-\alpha_1 x}\psi(x)\,dx}{\varphi'_{m-2}(\alpha_1)} + \frac{e^{\alpha_2 x}\int e^{-\alpha_2 x}\psi(x)\,dx}{\varphi'_{m-2}(\alpha_2)},$$

$$V_3 = \frac{e^{\alpha_1 x}\int e^{-\alpha_1 x}\psi(x)\,dx}{\varphi'_{m-2}(\alpha_1)(\alpha_1-\alpha_3)} + \frac{e^{\alpha_2 x}\int e^{-\alpha_2 x}\psi(x)\,dx}{\varphi'_{m-2}(\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_3)}$$
$$-\left[\frac{1}{\varphi'_{m-2}(\alpha_1)(\alpha_1-\alpha_3)} + \frac{1}{\varphi'_{m-2}(\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_3)}\right] e^{\alpha_3 x}\int e^{-\alpha_3 x}\psi(x)\,dx,$$

ou

$$V_3 = \frac{e^{\alpha_1 x}\int e^{-\alpha_1 x}\psi(x)\,dx}{\varphi'_{m-3}(\alpha_1)} + \frac{e^{\alpha_2 x}\int e^{-\alpha_2 x}\psi(x)\,dx}{\varphi'_{m-3}(\alpha_2)}$$
$$-\left[\frac{1}{\varphi'_{m-3}(\alpha_1)} + \frac{1}{\varphi'_{m-3}(\alpha_2)}\right] e^{\alpha_3 x}\int e^{-\alpha_3 x}\psi(x)\,dx.$$

Or, d'après l'équation $\sum \frac{1}{f'(\alpha_i)} = 0$, on a

$$\frac{1}{\varphi'_{m-3}(\alpha_1)} + \frac{1}{\varphi'_{m-3}(\alpha_2)} = -\frac{1}{\varphi'_{m-3}(\alpha_3)},$$

donc

$$V_3 = \frac{e^{\alpha_1 x}\int e^{-\alpha_1 x}\psi(x)\,dx}{\varphi'_{m-3}(\alpha_1)} + \frac{e^{\alpha_2 x}\int e^{-\alpha_2 x}\psi(x)\,dx}{\varphi'_{m-3}(\alpha_2)} + \frac{e^{\alpha_3 x}\int e^{-\alpha_3 x}\psi(x)\,dx}{\varphi'_{m-3}(\alpha_3)}.$$

On obtiendra de même

$$V_4 = \frac{e^{\alpha_1 x}\int e^{-\alpha_1 x}\psi(x)\,dx}{\varphi'_{m-4}(\alpha_1)} + \frac{e^{\alpha_2 x}\int e^{-\alpha_2 x}\psi(x)\,dx}{\varphi'_{m-4}(\alpha_2)}$$
$$+ \frac{e^{\alpha_3 x}\int e^{-\alpha_3 x}\psi(x)\,dx}{\varphi'_{m-4}(\alpha_3)} + \frac{e^{\alpha_4 x}\int e^{-\alpha_4 x}\psi(x)\,dx}{\varphi'_{m-4}(\alpha_4)},$$

et enfin

$$y = \sum \frac{e^{\alpha_i x}\int e^{-\alpha_i x}\psi(x)\,dx}{\varphi'(\alpha_i)}.$$

Cette formule peut se déduire tout différemment de la théorie connue de la variation des constantes arbitraires. D'après cette théorie, la solution de l'équation $V = \psi(x)$ est

$$y = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x} + C_3 e^{\alpha_3 x} + \ldots + C_m e^{\alpha_m x},$$

$C_1, C_2 \ldots C_m$ étant des fonctions de x déterminées par les équations

$$(1)\qquad e^{\alpha_1 x}\frac{dC_1}{dx} + e^{\alpha_2 x}\frac{dC_2}{dx} + e^{\alpha_3 x}\frac{dC_3}{dx} + \ldots + e^{\alpha_m x}\frac{dC_m}{dx} = 0,$$

$$(2)\qquad \alpha_1 e^{\alpha_1 x}\frac{dC_1}{dx} + \alpha_2 e^{\alpha_2 x}\frac{dC_2}{dx} + \alpha_3 e^{\alpha_3 x}\frac{dC_3}{dx} + \ldots + \alpha_m e^{\alpha_m x}\frac{dC_m}{dx} = 0,$$

. . . . ,

$$(m-1)\qquad \alpha_1^{m-2} e^{\alpha_1 x}\frac{dC_1}{dx} + \alpha_2^{m-2} e^{\alpha_2 x}\frac{dC_2}{dx} + \alpha_3^{m-2} e^{\alpha_3 x}\frac{dC_3}{dx} + \ldots + \alpha_m^{m-2} e^{\alpha_m x}\frac{dC_m}{dx} = 0,$$

$$(m)\qquad \alpha_1^{m-1} e^{\alpha_1 x}\frac{dC_1}{dx} + \alpha_2^{m-1} e^{\alpha_2 x}\frac{dC_2}{dx} + \alpha_3^{m-1} e^{\alpha_3 x}\frac{dC_3}{dx} + \ldots + \alpha_m^{m-1} e^{\alpha_m x}\frac{dC_m}{dx} = \psi(x).$$

Si l'on multiplie l'équation $(m-1)$ par θ_1, $(m-2)$ par $\theta_2 \ldots$, (2) par θ_{m-2} et (1) par θ_{m-1}, que l'on ajoute ces résultats et que l'on égale à zéro les coefficients de $\frac{dC_2}{dx}, \frac{dC_3}{dx} \cdots \frac{dC_m}{dx}$, pour obtenir $\frac{dC_1}{dx}$, on aura

$$\alpha_2^{m-1} + \theta_1 \alpha_2^{m-2} + \theta_2 \alpha_2^{m-3} + \ldots + \theta_{m-2}\alpha_2 + \theta_{m-1} = 0,$$
$$\alpha_3^{m-1} + \theta_1 \alpha_3^{m-2} + \theta_2 \alpha_3^{m-3} + \ldots + \theta_{m-2}\alpha_3 + \theta_{m-1} = 0,$$
. . . . ,
$$\alpha_m^{m-1} + \theta_1 \alpha_m^{m-2} + \theta_2 \alpha_m^{m-3} + \ldots + \theta_{m-2}\alpha_m + \theta_{m-1} = 0.$$

Ces équations montrent que $\alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_m$ sont les racines de l'équation

$$\alpha^{m-1} + \theta_1 \alpha^{m-2} + \theta_2 \alpha^{m-3} + \ldots + \theta_{m-2}\alpha + \theta_{m-1} = 0.$$

Donc cette équation a son premier membre égal à $\frac{\varphi(\alpha)}{\alpha-\alpha_1}$. D'ailleurs $\frac{dC_1}{dx}$ est donné par l'équation

$$e^{\alpha_1 x}(\alpha_1^{m-1} + \theta_1 \alpha_1^{m-2} + \ldots + \theta_{m-2}\alpha_1 + \theta_{m-1})\frac{dC_1}{dx} = \psi(x).$$

La parenthèse est égale à la valeur de $\frac{\varphi(\alpha)}{\alpha-\alpha_1}$ pour $\alpha = \alpha_1$, ou $\varphi'(\alpha_1)$. Donc

$$\frac{dC_1}{dx} = \frac{\psi(x)e^{-\alpha_1 x}}{\varphi'(\alpha_1)};$$

$$C_1 = \frac{1}{\varphi'(\alpha_1)}\int e^{-\alpha_1 x}\psi(x)\,dx,$$

et de même pour les autres C, résultat identique à celui que j'ai obtenu précédemment.

Je passe maintenant au cas où l'équation $\varphi(\alpha)=0$ admet des racines égales, soit $\alpha_m=\alpha_{m-1}=\alpha_{m-2}=\ldots=\alpha_{m-p}=a$. Si l'on pose

$$\frac{\varphi(\alpha)}{(\alpha-a)^{p+1}}=f(\alpha),$$

il est visible que l'on a

$$e^{ax}\frac{d^{p+1}e^{-ax}y}{dx^{p+1}}=\sum\frac{e^{\alpha_i x}\int e^{-\alpha_i x}\psi(x)\,dx}{f'(\alpha_i)},$$

le signe $\sum$ s'étendant aux racines α_i de l'équation $f(\alpha)=0$.

Cette équation donne

$$\begin{aligned}y=\sum\frac{e^{\alpha_i x}\int e^{-\alpha_i x}\psi(x)\,dx}{(\alpha_i-a)^{p+1}f'(\alpha_i)}&-\sum\frac{e^{ax}\int e^{-ax}\psi(x)\,dx}{(\alpha_i-a)^{p+1}f'(\alpha_i)}\\&-\sum\frac{e^{ax}\int^2 e^{-ax}\psi(x)\,dx^2}{(\alpha_i-a)^{p}f'(\alpha_i)}-\ldots\\&-\sum\frac{e^{ax}\int^{p+1} e^{-ax}\psi(x)\,dx^{p+1}}{(\alpha_i-a)f'(\alpha_i)}.\end{aligned}$$

Mais on a

$$\sum\frac{1}{(\alpha_i-a)^{p+1}f'(\alpha_i)}=\sum\frac{1}{\varphi'(\alpha_i)},$$

et le coefficient de

$$e^{ax}\int^{q} e^{-ax}\psi(x)\,dx^q \quad \text{est} \quad -\sum\frac{(\alpha_i-a)^{q-1}}{\varphi'(\alpha_i)},$$

dont je vais chercher une autre expression.

On a, en désignant par $F(\alpha)$ un polynome de degré m, moindre que celui de $\varphi(\alpha)$,

$$F(\alpha)=\varphi(\alpha)\left[\sum\frac{F(\alpha_i)}{\varphi'(\alpha_i)(\alpha-\alpha_i)}+\frac{A_1}{\alpha-a}+\frac{A_2}{(\alpha-a)^2}+\ldots+\frac{A_{p+1}}{(\alpha-a)^{p+1}}\right].$$

Si le degré de $F(\alpha)$ est inférieur de deux unités au moins à celui de $\varphi(\alpha)$, le coefficient de α^{m-1} du second membre est nul, ce qui fournit l'équation

$$\sum\frac{F(\alpha_i)}{\varphi'(\alpha_i)}+A_1=0.$$

Prenons $F(\alpha)=(\alpha-a)^{q-1}$; il viendra

$$\sum \frac{(\alpha_i - a)^{q-1}}{\varphi'(\alpha_i)} + A_1 = 0.$$

En sorte que le coefficient de $e^{ax}\int^q e^{-ax}\psi(x)\,dx^q$ sera la valeur que prend A_1 quand on suppose $(\alpha-a)^{q-1}=F(\alpha)$. Mais il est aisé de montrer que cette valeur de A_1 n'est autre chose que celle de A_q pour $F(\alpha)=1$.

En effet, on sait que, si l'on pose

$$\varpi(\alpha) = \frac{F(\alpha)}{\varphi(\alpha)}(\alpha - a)^{p+1},$$

on a

$$A_1 = \frac{\varpi^{(p)}(a)}{1.2\ldots p}, \qquad A_2 = \frac{\varpi^{(p-1)}(a)}{1.2\ldots(p-1)}, \qquad \ldots,$$
$$A_q = \frac{\varpi^{(p-q+1)}(a)}{1.2\ldots(p-q+1)}, \qquad \ldots, \qquad A_{p+1} = \varpi(a).$$

Soit

$$\chi(\alpha) = \frac{(\alpha - a)^{p+1}}{\varphi(\alpha)} \qquad \text{et} \qquad F(\alpha) = (\alpha - a)^{q-1},$$

en sorte que

$$\varpi(\alpha) = \frac{(\alpha - a)^{p+q}}{\varphi(\alpha)} = (\alpha - a)^{q-1}\chi(\alpha).$$

On déduit de là

$$\varpi^{(p)}(a) = p(p-1)\ldots(p-q+2)\chi^{(p-q+1)}(a)$$

ou

$$\frac{\varpi^{(p)}(a)}{1.2\ldots p} = \frac{\chi^{(p-q+1)}(a)}{1.2\ldots(p-q+1)}.$$

D'après cela, la valeur de y est

$$\begin{aligned} y = \sum & \frac{e^{\alpha_i x}\int e^{-\alpha_i x}\psi(x)\,dx}{\varphi'(\alpha_i)} \\ & + e^{ax}\left[\frac{\chi^{(p)}(a)}{1.2\ldots p}\int e^{-ax}\psi(x)\,dx \right. \\ & \qquad + \frac{\chi^{(p-1)}(a)}{1.2\ldots(p-1)}\int^2 e^{-ax}\psi(x)\,dx^2 + \ldots \\ & \qquad \left. + \frac{\chi'(a)}{1}\int^p e^{-ax}\psi(x)\,dx^p + \chi(a)\int^{p+1} e^{-ax}\psi(x)\,dx^{p+1}\right]. \end{aligned}$$

On voit que le second membre comprend le produit de e^{ax} par un

polynome arbitraire de degré p. Si l'on a soin d'ajouter ce polynome dans le second membre, on pourra mettre des limites aux intégrales, et poser alors

$$\int^q e^{-ax}\psi(x)\,dx^q = \int_0^x e^{-az}\psi(z)\frac{(x-z)^{q-1}}{1.2\ldots(q-1)}\,dz.$$

La parenthèse devient donc

$$\int_0^x e^{-az}\psi(z)\,dz\left[\frac{\chi^{(p)}(a)}{1.2\ldots p}+\frac{x-z}{1}\,\frac{\chi^{(p-1)}(a)}{1.2\ldots(p-1)}\right.$$
$$\left.+\frac{(x-z)^2}{1.2}\,\frac{\chi^{(p-2)}(a)}{1.2\ldots(p-2)}+\ldots+\frac{(x-z)^p}{1.2\ldots p}\chi(a)\right].$$

Cette expression peut s'écrire

$$\frac{e^{-ax}}{1.2\ldots p}\int_0^x \psi(z)\frac{d^p[\chi(a)e^{a(x-z)}]}{da^p}\,dz.$$

Or

$$\chi(\alpha)=\frac{(\alpha-a)^{p+1}}{\varphi(\alpha)};\qquad \text{donc}\qquad \chi(a)=\frac{1.2\ldots(p+1)}{\varphi^{(p+1)}(a)}.$$

Donc l'expression précédente est égale à

$$(p+1)e^{-ax}\int_0^x \psi(z)\frac{d^p\left[\dfrac{e^{a(x-z)}}{\varphi^{(p+1)}(a)}\right]}{da^p}\,dz.$$

On étendrait aisément ce résultat au cas où l'on a plusieurs groupes de racines égales ; et, si l'on observe que la forme sous laquelle la parenthèse a été mise comprend celle qui convient au cas des racines simples, on voit que l'on a définitivement :

$$y=\sum\left\{m_i\int_0^x \psi(z)\,dz\,\frac{d^{m_i-1}\left[\dfrac{e^{\alpha_i(x-z)}}{\varphi^{m_i}(\alpha_i)}\right]}{d\alpha_i^{m_i-1}}\right.$$
$$\left.+(C_1+C_2x+C_3x^2+\ldots+C_{m_i}x^{m_i-1})e^{\alpha_i x}\right\},$$

m_i désignant le degré de multiplicité de la racine α_i, et le signe $\sum$ s'étendant à toutes les racines de l'équation $\varphi(\alpha)=0$.

Dans le cas où $\psi(x)$ est un polynome dont je désigne par q le degré, on a pour solution particulière un polynome dont je vais rechercher la forme générale. Pour cela, je reprends la formule

$$y = \sum \frac{e^{\alpha_i x} \int e^{-\alpha_i x} \psi(x)\, dx}{\varphi'(\alpha_i)},$$

qui suppose les racines de $\varphi(\alpha) = 0$ inégales.

Dans le cas qui nous occupe, l'intégration par parties mène à la formule

$$\begin{aligned} - e^{\alpha_i x} \int e^{-\alpha_i x} \psi(x)\, dx = \frac{\psi(x)}{\alpha_i} + \frac{\psi'(x)}{\alpha_i^2} + \frac{\psi''(x)}{\alpha_i^3} + \ldots \\ + \frac{\psi^{(q-1)}(x)}{\alpha_i^q} + \frac{\psi^{(q)}(x)}{\alpha_i^{q+1}}; \end{aligned}$$

$\psi^{(q)}(x)$ est une constante. Si l'on multiplie les deux membres de cette équation par $\frac{1}{\varphi'(\alpha_i)}$ et qu'on fasse la somme par rapport à α_i, on voit que le polynome cherché est mis sous la forme d'une somme de termes tels que $K_r\, \psi^{(r)}(x)$, où K_r est égal à $-\sum \frac{1}{\varphi'(\alpha_i)\alpha_i^{r+1}}$. Mais on a toujours

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi(\alpha)} = \sum \frac{1}{\varphi'(\alpha_i)(\alpha - \alpha_i)} = -\left[\sum \frac{1}{\alpha_i \varphi'(\alpha_i)} + \alpha \sum \frac{1}{\alpha_i^2 \varphi'(\alpha_i)} \right. \\ \left. + \alpha^2 \sum \frac{1}{\alpha_i^3 \varphi'(\alpha_i)} + \ldots \right]; \end{aligned}$$

si l'on pose

$$\frac{1}{\varphi(\alpha)} = F(\alpha),$$

on aura donc

$$-\sum \frac{1}{\alpha_i^{r+1} \varphi'(\alpha_i)} = \frac{F^{(r)}(0)}{1.2\ldots r}.$$

Donc

$$\begin{aligned} (1) \qquad y = F(0)\psi(x) + \frac{F'(0)}{1}\psi'(x) + \frac{F''(0)}{1.2}\psi''(x) + \ldots \\ + \frac{F^{(q-1)}(0)}{1.2\ldots(q-1)}\psi^{(q-1)}(x) + \frac{F^{(q)}(0)}{1.2\ldots q}\psi^{(q)}(x). \end{aligned}$$

Cette formule se prête à une vérification assez élégante. Rien n'empêche de supposer la série prolongée à l'infini par les termes

$$\frac{F^{(q+1)}(0)}{1.2\ldots(q+1)}\psi^{(q+1)}(x), \quad \ldots,$$

puisque les dérivées $\psi^{(q+1)}(x)$, ... sont nulles. J'ai donc à vérifier que la série

$$F(o)\psi(x)+\frac{F'(o)}{1}\psi'(x)+\frac{F''(o)}{1.2}\psi''(x)+\ldots,$$

mise à la place de y dans l'expression

$$V=\frac{d^m y}{dx^m}+A_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\ldots+A_{m-1}\frac{dy}{dx}+A_m y,$$

donne identiquement $\psi(x)$ pour résultat.

Considérons la suite

$$F(o)+\frac{F'(o)}{1}\alpha+\frac{F''(o)}{1.2}\alpha^2+\ldots=F(\alpha).$$

Pour substituer à y sa valeur dans V, il faut dériver cette valeur p fois, multiplier le résultat par A_{m-p} et faire la somme des termes ainsi obtenus depuis $p=o$ jusqu'à $p=m$. Or on a

$$\frac{d^p y}{dx^p}=F(o)\psi^{(p)}(x)+\frac{F'(o)}{1}\psi^{(p+1)}(x)+\ldots.$$

et cette opération faite sur y correspond à la multiplication de $F(\alpha)$ par α^p :

$$\alpha^p F(\alpha)=F(o)\alpha^p+\frac{F'(o)}{1}\alpha^{p+1}+\ldots.$$

Quand on fera la somme des termes de la forme $A_{m-p}\dfrac{d^p y}{dx^p}$, on obtiendra donc une expression linéaire entre $\psi(x)$ et ses dérivées, telle que le coefficient de la dérivée d'indice r sera le même que celui du terme qui contient α avec l'exposant r dans la somme des termes de la forme $A_{m-p}\alpha^p F(\alpha)$. Mais cette dernière somme n'est autre chose que $\varphi(\alpha)F(\alpha)$, ou l'unité. Donc

$$\sum A_{m-p}\frac{d^p y}{dx^p}=\psi(x),$$

la valeur de y est vérifiée, et l'on voit qu'elle s'applique au cas où l'équation $\varphi(\alpha)=o$ a des racines égales. On aurait d'ailleurs pu la déduire directement de la formule générale qui convient à tous les cas. Si, dans V, quelques-uns des coefficients A_m, A_{m-1}, ... sont nuls, $\varphi(\alpha)$ contient le facteur α à une certaine puissance, et quelques-unes des

quantités $F(o)$, $F'(o)$... sont infinies. Il est aisé de modifier la formule donnée pour l'appliquer à ce cas. Soit

$$V = \frac{d^m y}{dx^m} + A_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + A_{m-p-1} \frac{d^{p+1} y}{dx^{p+1}} + A_{m-p} \frac{d^p y}{dx^p},$$
$$\varphi(\alpha) = \alpha^p f(\alpha).$$

La formule dont il s'agit s'appliquera à $\frac{d^p y}{dx^p}$, et l'on aura

$$\frac{d^p y}{dx^p} = f(o)\psi(x) + \frac{f'(o)}{1}\psi'(x) + \frac{f''(o)}{1.2}\psi''(x) + \ldots,$$

donc

$$(2) \quad y = f(o)\int^p \psi(x)\,dx^p + \frac{f'(o)}{1}\int^{p-1}\psi(x)\,dx^{p-1}$$
$$+ \frac{f''(o)}{1.2}\int^{p-2}\psi(x)\,dx^{p-2} + \ldots + \frac{f^{(p)}(o)}{1.2\ldots p}\psi(x)$$
$$+ \frac{f^{(p+1)}(o)}{1.2\ldots(p+1)}\psi'(x) + \frac{f^{(p+2)}(o)}{1.2\ldots(p+2)}\psi''(x) + \ldots.$$

D'après la vérification qui a été faite de la formule (1), on voit que si $\psi(x)$ n'est pas un polynome, mais une fonction telle que la série prolongée indéfiniment soit convergente, cette fonction étant d'ailleurs quelconque, la série (1) sera une solution de l'équation $V = \psi(x)$. La même remarque s'applique à la série (2).

Supposons maintenant que la fonction $\psi(x)$ puisse être représentée par l'intégrale définie double

$$(3) \qquad \psi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dn \int_{-\infty}^{+\infty} dm\,\psi(m)\cos n(x-m).$$

Dans ce cas, on peut mettre aussi une solution de l'équation $V = \psi(x)$ sous la forme d'une intégrale double prise entre les mêmes limites. En effet, prenons y sous la forme

$$y = \sum \frac{e^{\alpha_i x}}{\varphi'(\alpha_i)} \int e^{-\alpha_i x}\psi(x)\,dx,$$

et écrivons (3) de la manière suivante :

$$\psi(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dn \int_{-\infty}^{+\infty} dm\,\psi(m)\left(e^{n(x-m)\sqrt{-1}} + e^{-n(x-m)\sqrt{-1}}\right).$$

Multiplions sous le double signe d'intégration par $e^{-\alpha_i x}\,dx$, intégrons; multiplions par $\frac{e^{\alpha_i x}}{\varphi'(\alpha_i)}$ et faisons la somme des résultats. Il viendra, toutes réductions faites,

$$(4)\qquad y=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dn\int_{-\infty}^{+\infty}dm\,\psi(m)\left[\frac{e^{n(x-m)\sqrt{-1}}}{\varphi(n\sqrt{-1})}+\frac{e^{-n(x-m)\sqrt{-1}}}{\varphi(-n\sqrt{-1})}\right].$$

Pour débarrasser cette expression des imaginaires qu'elle renferme, posons

$$\varphi(n\sqrt{-1})=\varphi_1(n)+\sqrt{-1}\,\varphi_2(n),$$

on aura

$$\varphi(-n\sqrt{-1})=\varphi_1(n)-\sqrt{-1}\,\varphi_2(n),$$

et

$$y=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dn\int_{-\infty}^{+\infty}dm\,\psi(m)\,\frac{\varphi_1(n)\cos n(x-m)+\varphi_2(n)\sin n(x-m)}{[\varphi_1(n)]^2+[\varphi_2(n)]^2}.$$

On peut vérifier la formule (4), en remarquant qu'un terme de V, $A_{m-q}\frac{d^q y}{dx^q}$, est égal à

$$\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dn\int_{-\infty}^{+\infty}dm\,\psi(m)\left[\frac{e^{n(x-m)\sqrt{-1}}}{\varphi(n\sqrt{-1})}A_{m-q}(n\sqrt{-1})^q\right.$$
$$\left.+\frac{e^{-n(x-m)\sqrt{-1}}}{\varphi(-n\sqrt{-1})}A_{m-q}(-n\sqrt{-1})^q\right],$$

et la somme des termes de cette forme sera

$$\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dn\int_{-\infty}^{+\infty}dm\,\psi(m)\left[e^{n(x-m)\sqrt{-1}}+e^{-n(x-m)\sqrt{-1}}\right]=\psi(x).$$

Donc la formule (4), établie dans un cas particulier, est générale.

Plusieurs des résultats obtenus peuvent être appliqués à la résolution des équations linéaires à coefficients constants et aux différences finies ou mêlées. Remarquons, en effet, que l'on peut toujours exprimer $\Delta^r y$ en fonction de y et de ses dérivées par la formule symbolique

$$\Delta^r y=\left(e^{\frac{dy}{dx}\Delta x}-1\right)^{(r)}.$$

Soit V une expression linéaire à coefficients constants et aux diffé-

rences mêlées ou finies; appelons $\varphi(\alpha)$ la fonction transcendante dans laquelle se change V quand on y remplace $\frac{d^s y}{dx^s}$ par α^s, et $\Delta^r y$ par $(e^{\alpha\Delta x}-1)^r$, de sorte que $\Delta^r \frac{d^s y}{dx^s}$ sera remplacé par $\alpha^s(e^{\alpha\Delta x}-1)^r$. Cela posé, l'équation $V=\psi(x)$ admettra pour solution la série (1) ou la série (2), $F(\alpha)$ désignant toujours $\frac{1}{\varphi(\alpha)}$. De même, si $\psi(x)$ est susceptible d'être représenté par la formule (3), la formule (4) donnera une solution de l'équation $V=\psi(x)$.

Une marche complètement analogue à celle que j'ai suivie pour la résolution des équations différentielles linéaires peut être appliquée à celle des équations linéaires aux différences finies. Comme cette question mène à des calculs presque identiques, je me contenterai d'indiquer les résultats qui en ressortent.

Soit :

$$V=\Delta^m y+A_1\Delta^{m-1}y+\ldots+A_m y,$$
$$\varphi(\alpha)=U=\alpha^m+A_1\alpha^{m-1}+\ldots+A_m,$$
$$U_p=\frac{U}{(\alpha-\alpha_1)(\alpha-\alpha_2)\ldots(\alpha-\alpha_p)}=\alpha^{m-p}+B_1\alpha^{m-p-1}+\ldots+B_{m-p},$$
$$V_p=\Delta^{m-p}y+B_1\Delta^{m-p-1}y+\ldots+B_{m-p}y.$$

On aura, en désignant par h la différence constante de la variable x,

$$V=(1+\alpha_1)^{\frac{x}{h}+1}\Delta\left[V_1(1+\alpha_1)^{-\frac{x}{h}}\right],$$
$$V_1=(1+\alpha_2)^{\frac{x}{h}+1}\Delta\left[V_2(1+\alpha_2)^{-\frac{x}{h}}\right],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$V_{m-1}=(1+\alpha_m)^{\frac{x}{h}+1}\Delta\left[y(1+\alpha_m)^{-\frac{x}{h}}\right].$$

D'où, si toutes les quantités $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m$ sont inégales,

$$y=C_1(1+\alpha_1)^{\frac{x}{h}}+C_2(1+\alpha_2)^{\frac{x}{h}}+\ldots+C_m(1+\alpha_m)^{\frac{x}{h}}.$$

Si l'on a : $\alpha_m=\alpha_{m-1}=\alpha_{m-2}=\ldots=\alpha_{m-p}=a$, on aura la solution

$$y=C_1(1+\alpha_1)^{\frac{x}{h}}+C_2(1+\alpha_2)^{\frac{x}{h}}+\ldots+C_{m-p-1}(1+\alpha_{m-p-1})^{\frac{x}{h}}$$
$$+(1+a)^{\frac{x}{h}}(C_{m-p}+C_{m-p+1}x+\ldots+C_m x^p).$$

L'équation $V = \psi(x)$ admet pour solution générale

$$y = \sum \left\{ m_i \mathop{\mathrm{S}}_{z=0}^{z=x} \psi(z) \frac{d^{m_i - 1}\left[\dfrac{(1+\alpha_i)^{\frac{x-z}{h}-1}}{\varphi^{(m_i)}(\alpha_i)}\right]}{d\alpha_i^{m_i-1}} + (1+\alpha_i)^{\frac{x}{h}}(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots + C_{m_i} x^{m_i - 1}) \right\},$$

le signe $\sum$ s'appliquant aux racines α_i de l'équation $\varphi(\alpha) = 0$, racines dont m_i désigne l'ordre de multiplicité, et le signe S caractérisant l'intégration de la quantité sous ce signe, considérée comme une différence finie, z ayant une différence constante et égale à h

On établit aisément cette formule en se servant de la suivante ([1])

$$\mathrm{S}^n f(x) = \mathop{\mathrm{S}}_{z=0}^{z=x} f(z) \frac{\left(\dfrac{x-z}{h} - 1\right)\left(\dfrac{x-z}{h} - 2\right)\cdots\left(\dfrac{x-z}{h} - n + 1\right)}{1.2.3\ldots(n-1)} + C_1 + C_2 x + \ldots + C_n x^{n-1},$$

qui est analogue à la formule

$$\int^n f(x)\,dx = \int_0^x \frac{f(z)\,dz\,(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} + C_1 + C_2 x + \ldots + C_n x^{n-1},$$

et qui se démontrerait aussi facilement.

Si $\psi(x)$ est un polynome, on a la solution particulière suivante de l'équation $V = \psi(x)$, en posant $\dfrac{1}{\varphi(\alpha)} = F(\alpha)$,

$$y = F(0)\psi(x) + \frac{F'(0)}{1}\Delta\psi(x) + \frac{F''(0)}{1.2}\Delta^2\psi(x) + \ldots,$$

ou, si $\varphi(\alpha) = \alpha^p f(\alpha)$, et que l'on pose

$$\frac{1}{f(\alpha)} = F(\alpha),$$

$$y = F(0)\,\mathrm{S}^p\psi(x) + \frac{F'(0)}{1}\mathrm{S}^{p+1}\psi(x) + \ldots + \frac{F^{(p-1)}(0)}{1.2\ldots(p-1)}\mathrm{S}\,\psi(x) + \frac{F^{(p)}(0)}{1.2\ldots p}\psi(x) + \frac{F^{(p+1)}(0)}{1.2\ldots(p+1)}\Delta\psi(x) + \ldots.$$

([1]) La formule qui figurait ici dans le manuscrit et, par suite, la précédente ont été légèrement rectifiées. (*Note des éditeurs.*)

Comme dans le cas de l'équation différentielle, cette série, quand elle est convergente, est une solution de l'équation. Il est bien entendu que, dans toutes les formules relatives aux équations aux différences finies, les quantités C ne sont point des constantes, mais des fonctions quelconques périodiques pour un accroissement h donné à x.

Ajoutons que les deux formes de solution (1) et (4), qui s'appliquent aux équations aux différences finies ou mêlées aussi bien qu'aux équations différentielles, s'appliquent aussi aux équations aux dérivées partielles.

Soit, par exemple, l'équation

$$A\frac{\partial^m z}{\partial x^m}+B\frac{\partial^m z}{\partial y^m}+C\frac{\partial^m z}{\partial x^{m-1}\,\partial y}+\ldots+K\frac{\partial z}{\partial x}+H\frac{\partial z}{\partial y}+Lz=\psi(x,y),$$

A, B, C ... K, H, L étant des constantes. Si l'on pose

$$A\alpha^m+B\beta^m+C\alpha^{m-1}\beta+\ldots+K\alpha+H\beta+L=\varphi(\alpha,\beta),$$

et $\frac{1}{\varphi(\alpha,\beta)}=F(\alpha,\beta)$, on aura cette solution particulière de l'équation proposée :

$$z=F(0,0)+\frac{\partial F(0,0)}{\partial\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial F(0,0)}{\partial\beta}\frac{\partial\psi}{\partial y}$$
$$+\frac{1}{1.2}\left[\frac{\partial^2 F(0,0)}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F(0,0)}{\partial\alpha\,\partial\beta}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 F(0,0)}{\partial\beta^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right]+\ldots.$$

Cette série s'arrêtera si $\psi(x,y)$ est un polynome.

Si l'on pose

$$\psi(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}dn\int_{-\infty}^{+\infty}dm\int_{-\infty}^{+\infty}dq\int_{-\infty}^{+\infty}dp$$
$$\times\psi(m,p)\cos n(x-m)\cos q(y-p),$$

on aura

$$z=\frac{1}{16\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}dn\int_{-\infty}^{+\infty}dm\int_{-\infty}^{+\infty}dq\int_{-\infty}^{+\infty}dp\,\psi(m,p)$$
$$\times\left[\frac{e^{[n(x-m)+q(y-p)]\sqrt{-1}}}{\varphi(n\sqrt{-1},q\sqrt{-1})}+\frac{e^{-[n(x-m)+q(y-p)]\sqrt{-1}}}{\varphi(-n\sqrt{-1},-q\sqrt{-1})}\right.$$
$$\left.+\frac{e^{[n(x-m)-q(y-p)]\sqrt{-1}}}{\varphi(n\sqrt{-1},-q\sqrt{-1})}+\frac{e^{-[n(x-m)-q(y-p)]\sqrt{-1}}}{\varphi(-n\sqrt{-1},q\sqrt{-1})}\right].$$

On fera aisément disparaître les imaginaires de cette formule en posant

$$\varphi(n\sqrt{-1}, q\sqrt{-1}) = A + B\sqrt{-1}, \qquad \varphi(n\sqrt{-1}, -q\sqrt{-1}) = A' + B'\sqrt{-1},$$

ce qui donnera

$$z = \frac{1}{16\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} dn \int_{-\infty}^{+\infty} dm \int_{-\infty}^{+\infty} dq \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, \psi(m, p)$$
$$\times \left\{ \frac{A\cos[n(x-m)+q(y-p)] + B\sin[n(x-m)+q(y-p)]}{A^2+B^2} + \frac{A'\cos[n(x-m)-q(y-p)] + B'\sin[n(x-m)-q(y-p)]}{A'^2+B'^2} \right\}.$$

SUR LE

CARACTÈRE BIQUADRATIQUE DU NOMBRE 2.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 66, 1868 (I), p. 190.

Dans la première Partie du Mémoire intitulé : *Theoria residuorum biquadraticorum*, Gauss a donné un théorème relatif au caractère biquadratique du nombre 2 pour les modules premiers de la forme $4\mu+1$, considérés comme somme de deux carrés. Jacobi a démontré ensuite ce théorème d'une manière plus simple. La présente Note a pour objet d'étendre ce théorème aux modules non premiers décomposables en deux carrés premiers entre eux.

Soit p un nombre premier $4\mu+1$; il est égal à la somme de deux carrés

$$p = a^2 + b^2.$$

On prendra pour a la racine carrée de a^2, qui est de la forme $4l+1$, a^2 étant le carré impair. D'ailleurs, si f désigne une des deux racines de $z^2 \equiv -1 \pmod p$, on a

$$a^2 f^2 \equiv b^2 \pmod p.$$

Ayant choisi la racine f arbitrairement, on prend pour b la racine de b^2 qui donne $af \equiv b \pmod p$. Cela posé, le théorème de Gauss est représenté par la congruence

$$2^{\frac{p-1}{4}} \equiv f^{\frac{b}{2}} \pmod p.$$

Je désignerai par $\left(\left(\frac{x}{p}\right)\right)$ la quantité $x^{\frac{p-1}{4}} \pmod p$. Mais je préciserai ce nombre de la manière suivante : Je poserai toujours $\left(\left(\frac{x}{p}\right)\right) = 1, f, f^2$

ou f^3, nombre à l'un desquels $x^{\frac{p-1}{4}}$ est toujours congru (mod p), x étant premier avec p. $\left(\left(\frac{x}{p}\right)\right)$ ne sera donc défini complètement que quand on aura fixé la racine f choisie de $z^2 \equiv -1 \pmod{p}$.

Considérons un module P ne contenant que des facteurs premiers différents : $P = p p_1 p_2 \ldots p_n$, tous ces facteurs étant de la forme $4l + 1$. Soit F une racine commune aux congruences

$$z^2 \equiv -1 \pmod{p}, \qquad z^2 \equiv -1 \pmod{p_1}, \qquad \ldots, \qquad z^2 \equiv -1 \pmod{p_n}.$$

Considérons les valeurs des quantités $\left(\left(\frac{x}{p}\right)\right)$, $\left(\left(\frac{x}{p_1}\right)\right)$, $\ldots$, $\left(\left(\frac{x}{p_n}\right)\right)$, relatives à cette racine F, et désignons par $\left(\left(\frac{x}{P}\right)\right)$ le produit de ces quantités. C'est à cette dernière quantité que se rapportera le théorème qui fait l'objet de cette Note. On dira que x appartient à la première, à la deuxième, à la troisième ou à la quatrième classe, suivant que l'exposant de la puissance de F à laquelle $\left(\left(\frac{x}{P}\right)\right)$ est égale, est 0, 1, 2 ou 3 (mod 4). On voit aisément que chaque classe contiendra $\frac{(p-1)(p_1-1)\ldots(p_n-1)}{4}$ nombres distincts, et que les $(p-1)(p_1-1)\ldots(p_n-1)$ nombres premiers avec P trouveront chacun leur place dans ces classes. Cette répartition varie avec le choix de F, et plus encore que dans le cas d'un module premier, cas dans lequel Gauss l'a adoptée. Néanmoins, il est aisé de voir que tout nombre qui appartient à la première ou à la troisième classe appartiendra toujours à l'une de ces deux classes, et de même pour les deux autres classes. On voit encore qu'il y a $\frac{(p-1)(p_1-1)\ldots(p_n-1)}{2^{n+2}}$ nombres qui appartiennent toujours à la première classe, et autant qui appartiennent toujours à la troisième. Parmi les premiers, sont compris $\frac{(p-1)(p_1-1)\ldots(p_n-1)}{2^{n+2}}$ résidus biquadratiques.

Le nombre P est décomposable en deux carrés de 2^n manières différentes. Je vais démontrer qu'à chaque décomposition $P \equiv A^2 + B^2$ correspond un couple de valeurs de F égales et de signe contraire telles, que l'on a $AF \equiv \pm B \pmod{P}$, congruence que j'écrirai : $AF \equiv B \pmod{P}$; cette seconde congruence est aussi générale que la première, à cause de l'indétermination du signe de B. A est toujours la racine carrée de la forme $4l+1$ du carré impair A^2.

Admettons que le théorème soit vrai pour le module $P_1 = p_1 p_2 \ldots p_n$ et prouvons qu'il subsiste pour le module $P = p P_1$. Soit donc

$$P_1 = A_1^2 + B_1^2 \qquad \text{et} \qquad p = a^2 + b^2;$$

et F_1 le nombre qui donne

$$A_1 F_1 \equiv B_1 \quad (\text{mod}\, P_1).$$

On déduira de là deux décompositions de P en deux carrés

$$P = (A_1 a + B_1 b)^2 + (A_1 b - B_1 a)^2,$$
$$P = (A_1 a - B_1 b)^2 + (A_1 b + B_1 a)^2.$$

Il suffit de considérer la seconde décomposition, qui contient la première lorsqu'on remplace b par $(-b)$. Ayant donc choisi une des valeurs de b, déterminons la racine f de $z^2 \equiv -1 \pmod{p}$ qui donne $af \equiv b \pmod{p}$, a étant toujours de la forme $4l+1$.

Posons

$$A = A_1 a - B_1 b, \qquad B = A_1 b + B_1 a;$$

déterminons F par les congruences simultanées

$$F \equiv F_1 \quad (\text{mod}\, P_1), \qquad F \equiv f \quad (\text{mod}\, p),$$

et l'on aura

$$AF \equiv A_1\, af - B_1\, bf \equiv A_1 b + B_1 a \equiv B \qquad (\text{mod}\, p),$$
$$AF \equiv A_1 a F_1 - B_1 b F_1 \equiv A_1 b + B_1 a \equiv B \qquad (\text{mod}\, P_1),$$

et, p et P_1 étant premiers entre eux,

$$AF \equiv B \qquad (\text{mod}\, P).$$

D'ailleurs, le théorème étant démontré dans le cas où P_1 est premier, il est démontré dans le cas général.

Ces préliminaires étant posés, on peut énoncer le théorème suivant :

F *étant la racine de la congruence* $z^2 \equiv -1$ (mod P) *qui sert de base à la répartition des classes, et* $P = A^2 + B^2$ *étant la décomposition de* P *en deux carrés qui correspond à* F, *le nombre* 2 *appartient à la première, la deuxième, la troisième ou la quatrième classe, suivant que* B *est congru à* 0, 1, 2 ou 3 (mod 4). *Les racines carrées* A *et* B *de* A^2 *et de* B^2 *sont choisies* de *telle sorte que* A *soit*

de la forme $4l+1$, *et qu'elles satisfassent à la congruence* $AF \equiv B \pmod{P}$.

Ce théorème peut s'exprimer algébriquement par la congruence

$$\left(\left(\frac{2}{P}\right)\right) \equiv F^{\frac{B}{2}} \pmod{P}.$$

D'après la définition de $\left(\left(\frac{x}{p}\right)\right)$, et le théorème de Gauss, on a

$$\left(\left(\frac{2}{P}\right)\right) \equiv F^{\frac{b}{2}+\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2}+\ldots+\frac{b_n}{2}} \pmod{P}.$$

Il faut donc prouver simplement que l'on a

$$\frac{B}{2} \equiv \frac{b}{2} + \frac{b_1}{2} + \ldots + \frac{b_n}{2} \pmod{4}.$$

Si l'on considère, comme précédemment, P comme le produit de P_1 par p, on a

$$B = A_1 b + B_1 a,$$

et comme A_1 et a sont congrus à 1 (mod 4), il en résulte

$$\frac{B}{2} \equiv \frac{B_1}{2} + \frac{b}{2} \pmod{4}.$$

De même, si l'on considère P_1 comme résultant du produit de p_1 par $P_2 = p_2 p_3 \ldots p_n$, on aura

$$\frac{B_1}{2} \equiv \frac{B_2}{2} + \frac{b_1}{2} \pmod{4},$$

et ainsi de suite. Si l'on additionne membre à membre toutes les congruences ainsi obtenues, on obtiendra celle qu'il fallait démontrer.

Le théorème subsiste dans le cas où le module contient des facteurs premiers égaux entre eux, pourvu que l'on ne considère que des décompositions de ce module en deux carrés premiers entre eux ; mais la démonstration, quoique fort simple, dépasserait les limites de cet extrait.

SUR LE NOMBRE DES DROITES

QUI SATISFONT A

QUATRE CONDITIONS DONNÉES.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 68, 1869 (I), p. 142.

Parmi les droites qui satisfont à deux conditions données, combien y en a-t-il qui satisfassent à deux conditions nouvelles? En cherchant à résoudre ce problème, je suis parvenu au résultat suivant. Si M et N sont les nombres trouvés en particularisant de deux manières différentes le second couple de conditions, celui que l'on trouvera dans tout autre cas est de la forme $\alpha M + \beta N$, α et β étant des nombres qui ne dépendent pas du premier couple de conditions. L'objet de cette Note est la démonstration de ce théorème.

On voit immédiatement qu'on n'augmente ni ne diminue la généralité de la proposition en particularisant les deux couples de conditions qui, joints successivement au premier, donnent lieu aux *caractéristiques* M et N. Je supposerai donc que pour l'un de ces couples : « Les droites sont dans un plan donné », et pour le second : « Les droites passent par un point donné », et je désignerai par μ et ν les caractéristiques correspondantes.

Cela posé, on verra aisément que le théorème énoncé peut être mis sous cette forme :

Le nombre de droites qui satisfont à deux couples de conditions dont les caractéristiques sont μ, ν et μ_1, ν_1, est égal à $\mu\mu_1 + \nu\nu_1$.

Je vais démontrer ce théorème.

Soient

$$y = ax + b, \qquad z = cx + d$$

les équations d'une droite et

$$\Phi(a, b, c, d) = 0, \qquad \Psi(a, b, c, d) = 0 \tag{1}$$

deux équations auxquelles satisfont ses paramètres. Supposons d'abord que ce sont des équations générales de degré m et m'. La condition que la droite soit dans un plan $(Ax + By + Cz = 1)$ est exprimée par les deux équations linéaires

$$(\alpha) \qquad A + Ba + Cc = 0, \qquad Bb + Cd = 1.$$

La condition que la droite passe par un point est aussi exprimée par deux équations linéaires. Donc les caractéristiques sont

$$\mu = \nu = mm'.$$

Cherchons les droites situées dans un plan perpendiculaire à l'axe Ox. On les obtiendra en donnant à a et b des valeurs infinies ayant un rapport fini. Les équations (1) donneront pour c et d, mm' systèmes de valeurs infinies ayant des rapports finis. En sorte que les droites cherchées sont les intersections du plan proposé avec mm' plans parallèles. Ces mm' droites se confondent donc avec la droite à l'infini du plan coordonné zOy.

Si l'on suppose deux autres conditions :

$$(2) \qquad \Phi_1 = 0, \qquad \Psi_1 = 0,$$

qui soient des équations générales des degrés m_1, m'_1, les caractéristiques de ce couple de conditions sont $\mu_1 = \nu_1 = m_1 m'_1$, et la droite à l'infini du plan zOy compte pour $m_1 m'_1$ droites du système.

Si l'on suppose en même temps les quatre conditions (1) et (2), cette droite compte pour $mm' m_1 m'_1$ solutions du problème. De plus, les quatre équations (1) et (2) déterminent $mm' m_1 m'_1$ systèmes de valeurs des paramètres, c'est-à-dire ce nombre de droites. Le nombre total des droites cherchées est donc $2\, mm' m_1 m'_1 = \mu\mu_1 + \nu\nu_1$.

Supposons actuellement que les conditions (1) soient des équations particulières des degrés m, m'. Cherchant à déterminer μ, on tire des équations (α) la valeur de c en fonction de a et celle de d en fonction de b, et l'on substitue ces valeurs dans les équations (1). Les courbes planes représentées par ces équations, où a et b sont censées des coordonnées rectilignes, se coupent en mm' points ; et, si μ est inférieur à mm', c'est que les coordonnées de quelques-uns de ces points sont indépendantes de A, B, C. Il y a donc des systèmes de valeurs de a et b telles qu'elles satisfont aux conditions (1), quelles que soient les valeurs de c et d.

Soient a_1 et b_1 les coordonnées de ces points constants, et ω le nombre de points communs aux deux courbes pour lequel il compte. Toutes les droites contenues dans le plan

$$y = a_1 x + b_1$$

comptent chacune pour ω droites satisfaisant aux conditions (1). Il peut exister plusieurs pareils plans (P), parallèles aux axes Oz ou Oy, et l'on aura

$$\mu = mm' - \sum \omega.$$

On verra d'une manière analogue que la caractéristique ν ne peut différer de mm' que par suite de l'existence de points fixes (M) tels, que toutes les droites qui passent par l'un d'entre eux comptent chacune pour un certain nombre de droites. Soit ρ le nombre relatif à un de ces points, on aura

$$\nu = mm' - \sum \rho.$$

Supposons que les mêmes faits se présentent dans les conditions (2), en sorte qu'on ait

$$\mu_1 = m_1 m'_1 - \sum \omega_1, \qquad \nu_1 = m_1 m'_1 - \sum \rho_1.$$

Le nombre de droites satisfaisant aux quatre conditions exprimées par les quatre équations (1) et (2) est égal à $2mm' m_1 m'_1$, moins le nombre des solutions étrangères, qui sont les suivantes :

1° Les intersections de chaque plan (P) avec chaque plan (P′), qui comptent pour $\sum \omega \sum \omega_1$ solutions ;

2° Les droites qui sont dans chaque plan (P) et qui satisfont effectivement au deuxième couple de conditions, et celles qui sont dans chaque plan (P′) et satisfont effectivement au premier couple de conditions : ces droites comptent pour $\mu_1 \sum \omega + \mu \sum \omega_1$ solutions;

3° Les droites qui passent par un point (M) et un point (M′) : elles comptent pour $\sum \rho \sum \rho_1$ solutions ;

4° Les droites qui passent par un point singulier d'un système et

satisfont effectivement aux conditions de l'autre système : elles comptent pour $\nu_1 \sum \rho + \nu \sum \rho_1$ solutions ;

En sorte que le nombre des solutions effectives est

$$\left(mm' - \sum \omega\right)\left(m_1 m'_1 - \sum \omega_1\right) + \left(mm' - \sum \rho\right)\left(m_1 m'_1 - \sum \rho_1\right) = \mu\mu_1 + \nu\nu_1$$

Le théorème est donc complètement démontré.

Parmi les applications que l'on peut faire de ce théorème, je citerai les suivantes :

Le nombre des tangentes communes à quatre surfaces des degrés p, p', p'', p''', est

$$2pp'p''p'''(p-1)(p'-1)(p''-1)(p'''-1);$$

Le degré de la surface gauche engendrée par les tangentes communes aux trois premières de ces surfaces est

$$2pp'p''(p-1)(p'-1)(p''-1);$$

Le nombre des droites ayant un contact du second ordre avec deux surfaces des degrés p, p' est

$$9pp'(p-2)(p'-2) + pp'(p-1)(p'-1)(p-2)(p'-2);$$

Le nombre des droites bitangentes à ces deux surfaces est

$$\frac{1}{4}pp'(p-2)(p'-2)(p^2-9)(p'^2-9)$$
$$+\frac{1}{4}pp'(p-1)(p'-1)(p-2)(p'-2)(p-3)(p'-3);$$

Le nombre de leurs normales communes est

$$(p^3-p^2+p)(p'^3-p'^2+p') + pp'(p-1)(p'-1);$$

Si l'on considère deux courbes gauches de degré p et p', dont les perspectives ont A et A' points doubles, le nombre des droites qui rencontrent deux fois les deux courbes est

$$\mathrm{AA}' + \frac{1}{4}pp'(p-1)(p'-1);$$

Si C et C' désignent les classes de ces courbes, le nombre de leurs normales communes est

$$(p+\mathrm{C})(p'+\mathrm{C}') + pp'.$$

On peut, au moyen de ces résultats, parvenir à des résultats relatifs à une seule surface ou une seule courbe, et trouver facilement, par exemple : le nombre des droites qui sont quatre fois tangentes à une même surface ; le nombre des binormales d'une surface, d'une courbe, etc.

Je n'insisterai pas sur ce sujet, qui rentre dans une théorie générale des surfaces et des courbes dont je m'occupe actuellement.

MÉMOIRE

SUR LES

COURBES GAUCHES ALGÉBRIQUES.

(Extrait par l'auteur.)

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 70, 1870 (I), p. 380.

Dans le Mémoire que j'ai l'honneur d'adresser à l'Académie (¹), je me suis posé la question suivante : *Trouver toutes les lignes gauches d'un degré donné;* et je suis parvenu à indiquer le moyen de résoudre entièrement ce problème.

La même question peut être posée sous une autre forme : *Trouver toutes les courbes algébriques tracées sur les surfaces d'un degré donné.* On aperçoit immédiatement que la solution complète de l'un de ces deux problèmes entraîne celle de l'autre.

La solution de ce second problème est contenue dans l'énoncé suivant : *Si l'on prend sur une surface de degré n chaque ligne* A, *de degré p, ayant au moins*

$$\frac{(p-n+1)(p-n+2)}{2}+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$$

points doubles apparents (*points doubles de la perspective ne correspondant pas à des points doubles de la courbe*), *et qu'on y fasse passer une autre surface, cette surface coupe la surface de degré n, en outre, suivant une autre courbe* B. *Les courbes* B *qu'on obtient ainsi en faisant varier p, et le degré de la seconde*

(¹) Au sujet de ce Mémoire, *voir* la *Notice sur les travaux mathématiques de G.-H. Halphen* (ci dessus p. 23) (Note des éditeurs).

surface sont toutes différentes et constituent toutes les lignes existant sur la surface proposée. Le degré de la seconde surface est le plus petit degré des surfaces autres que celle de degré n qui passent par la courbe B.

Si l'on connaît donc toutes les courbes A, on pourra en déduire toutes les courbes tracées sur une surface de degré n. Or j'ai donné le moyen de trouver toutes ces lignes A. On peut donc considérer la question comme entièrement résolue.

A l'égard des courbes tracées sur les surfaces du second ordre, ce théorème contient le cas particulier suivant, qui me paraît digne de remarque : *Les surfaces de degré minimum, qui passent par une ligne algébrique quelconque tracée sur une surface du second ordre, coupent, en outre, cette dernière seulement suivant des droites d'un même système.*

Cette proposition conduit à répartir toutes les lignes algébriques tracées sur une surface du second ordre entre deux systèmes, comme les droites. On en déduit aussi le résultat suivant :

Il existe, sur les surfaces du second ordre, des lignes gauches de degré p, dont le nombre des points doubles apparents est l'une quelconque des valeurs de l'expression

$$\frac{p(p-1)}{2}-q(p-q),$$

q étant un entier quelconque variant de p au plus grand entier contenu dans $\frac{p+1}{2}$, et il n'en existe pas d'autres. Ces courbes sont sur des surfaces de degré q.

Le nombre minimum compris dans l'expression $\frac{p(p-1)}{2}-q(p-q)$, qui est le plus grand entier contenu dans $\left(\frac{p-1}{2}\right)^2$, est le nombre minimum des points doubles apparents des courbes gauches de degré p.

Soit s le nombre des points doubles apparents d'une courbe de degré p. Tant que s est inférieur au plus grand entier contenu dans $\frac{(p-1)(p-2)}{3}$, il n'y correspond que des courbes tracées sur des surfaces du second ordre.

Si s a une des valeurs quelconques comprises entre le plus grand entier contenu dans $\frac{(p-1)(p-2)}{3}$ et $\frac{p(p-1)}{2}$, il y correspond toujours

des courbes de degré p, dont les dernières sont composées ; et, parmi toutes ces lignes, il y en a, pour chaque valeur de s, une située sur une surface du troisième degré.

Tant que s est inférieur à $\frac{3p(p-4)}{8}$, $\frac{3(p-1)(p-3)}{8}$, ou $\frac{3(p-2)^2}{8}$, suivant que p est congru à $0, \pm 1$, ou $2 \pmod 4$, il n'y a pas d'autres courbes que celles qui sont situées sur des surfaces du deuxième ou du troisième ordre. Là commencent les courbes tracées sur les surfaces du quatrième degré.

Tant que s est inférieur à $\frac{(n-1)(p-r)(p-n+r)}{2n}$, n étant un entier inférieur à $\sqrt{p}$, et r le reste de la division de p par n, il n'y a pas de courbes qui ne soient situées sur des surfaces de degré $(n-1)$, ou de degré moindre. Là commencent les courbes tracées sur les surfaces du $n^{\text{ième}}$ ordre.

Parmi les courbes gauches de degré p, celles dont le nombre des points doubles apparents est un des entiers de $\frac{(p-2)(p-3)}{2}+1$ à $\frac{p(p-1)}{2}$ [quand ce nombre est compris entre $\frac{(p-1)(p-2)}{2}+1$ et $\frac{p(p-1)}{2}$, la courbe est composée] sont particulièrement remarquables par cette propriété que, s étant le nombre des points doubles apparents de l'une d'elles, sa perspective est une courbe de degré p, quelconque, ayant s points doubles, ce qui n'arrive pas pour les autres courbes gauches. J'ai démontré que *ces courbes sont déterminées par* $2p$ *points*.

Les cas particuliers déjà connus de ce théorème sont les suivants : p droites sont déterminées par $2p$ points ; les deux courbes gauches du quatrième degré sont déterminées par 8 points, la courbe gauche du troisième degré est déterminée par 6 points.

SUR LES

DROITES QUI SATISFONT A DES CONDITIONS DONNÉES.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 73, 1871 (II), p. 1441.

I. Une droite, étant déterminée par *quatre* conditions, peut être assujettie à des conditions simples, doubles, triples, quadruples.

Quand des droites satisfont à une condition *simple*, il y en a un nombre fini passant par un point donné et situées dans un plan contenant ce point. Nous appellerons ce nombre le *degré* de la condition simple.

Quand des droites satisfont à une condition *double*, il y en a un nombre fini dans un plan donné. Ce nombre est l'*ordre* de la condition double. Il y a un nombre fini des mêmes droites passant par un point donné. C'est la *classe* de la condition. Si la condition *double* se compose de deux conditions *simples* séparées, ces deux nombres, *ordre* et *classe*, sont égaux tous deux au produit des degrés des deux conditions *simples*.

Quand des droites satisfont à une condition triple, elles forment une surface gauche. Le *degré* de cette surface marque le nombre de ces droites qui rencontrent une droite donnée.

Quand des droites sont déterminées par des conditions données, composées d'au moins *deux* groupes séparés, leur nombre est une fonction des éléments caractéristiques de ces conditions. La recherche de ce nombre peut se réduire à *deux* cas :

1° Les droites satisfont à une *condition triple* et à une *simple;*
2° Les droites satisfont à *deux doubles conditions*.

Je me propose ici de montrer que le premier de ces deux problèmes est résolu par le théorème suivant :

Théorème. — *Le nombre des génératrices rectilignes d'une surface réglée, qui satisfont à une condition simple, est le produit du degré de la surface par le degré de la condition.*

Je vais démontrer ce théorème.

II. Soit O un point fixe dans un plan fixe P. Considérons une droite quelconque D, et, dans le plan de cette droite et du point O, la perpendiculaire menée en ce point à l'intersection des deux plans. Soit Ω le point de rencontre de cette perpendiculaire et de la droite D.

Soit une surface réglée Σ, de degré p. Appliquons la construction ci-dessus, le point O et le plan P restant fixes, à toutes les génératrices rectilignes D de la surface Σ. Le lieu des points Ω est une ligne L de cette surface, et dont le degré est $2p$.

En effet, il est clair, tout d'abord, que les p génératrices D de la surface Σ, qui rencontrent la perpendiculaire A élevée en O au plan P, ont leurs points Ω sur cette droite. En second lieu, si l'on mène par A un plan quelconque, on voit que les droites D qui ont leurs points Ω dans ce plan, en dehors de A, sont celles qui rencontrent le rayon mené de O, dans le plan P, perpendiculairement au plan considéré. Leur nombre est également p. Donc tout plan mené par A rencontre la courbe L en $2p$ points. Tel est donc le degré de L.

On pourrait remarquer aussi que les seuls points de la ligne L dans le plan P sont sur les asymptotes des cercles de ce plan et de centre O, sur chacune desquelles se trouvent p points de cette ligne.

A chaque point Ω de la ligne L *correspond* un plan mené par $O\Omega$, dont la trace sur le plan P est perpendiculaire à cette droite, et qui contient une droite D de la surface Σ.

Considérons maintenant parmi les droites qui satisfont à une condition *simple*, de degré m, celles D_1, qui, passant par un point Ω, sont dans le plan correspondant. D'après la définition du *degré* m, le nombre de ces droites est m. Elles forment, avec la droite D, m couples de droites *conjuguées* (D, D_1).

Sur un rayon issu de O, dans le plan P, se trouvent les traces de p droites D et de mp droites conjuguées D_1. De plus, il y a $2mp$ droites D_1 passant au point O : ce sont les arêtes du cône, du degré m, lieu des droites satisfaisant à la condition de degré m et passant au point O, qui rencontrent la ligne L. Par conséquent, toute droite

issue de O, dans le plan P, rencontre la surface Σ_1 des droites D_1 en $3mp$ points. Tel est donc le degré de cette surface.

Il est clair que, parmi les couples de droites *conjuguées* (D, D_1) se trouve chacun de ceux composés de ces droites *confondues*, c'est-à-dire de droites D satisfaisant à la condition simple donnée. Chaque couple de droites *conjuguées* ayant un point Ω commun, on aura le nombre des couples de droites *conjuguées confondues*, par celui des couples de droites *dont les traces sur le plan* P *sont confondues*, diminué de celui des couples dont le point Ω est dans le plan P.

Soient x, y les distances des projections, sur un axe du plan P, des traces de deux droites conjuguées, à une origine sur cet axe. A une valeur de x (projection de la droite D) répondent p droites D, et par suite mp couples de droites conjuguées, ou mp valeurs de y (projection de D_1). A une valeur de y, répondent $3mp$ droites D_1, par suite $3mp$ valeurs de x. Il y a donc $4mp$ systèmes de valeurs x, y égales.

Parmi ces systèmes, il y en a mp qui correspondent à des couples de droites conjuguées dont les traces sont sur la perpendiculaire menée par O à l'axe.

Il y en a $2mp$ dont les points Ω sont dans le plan P. Ces points sont les $2p$ points de la ligne L dans le plan P, à chacun desquels correspondent m couples.

Il reste donc, en tout, mp couples de droites *conjuguées confondues*, ce qui démontre le théorème annoncé.

III. *Remarques.* — 1° Le théorème est évident quand la condition simple consiste en ce que les droites rencontrent une courbe de degré m.

2° La considération de la ligne L d'une surface Σ peut servir à démontrer ce théorème : *Deux surfaces gauches corrélatives ont des lignes doubles de même degré.*

En effet, la ligne L correspond *point à point* à une section plane de la surface Σ. D'autre part, on peut mener du point O la droite A, perpendiculaire au plan P, rencontrant cette courbe en p points ; et, de même, les deux asymptotes des cercles du plan P et de centre O, rencontrant chacune cette courbe en p points, et, en plus, des droites rencontrant cette courbe en deux points, autant de fois qu'il y a de plans passant par O et contenant deux droites D de la surface Σ. Par

conséquent, en appliquant à la ligne L et à une section de la surface Σ le théorème de la *correspondance*, et en désignant par s le nombre des points doubles de cette section, par s' le nombre des plans menés par O et contenant deux droites D, on aura

$$p(p-3)-2s=2p(2p-3)-2s'-3p(p-1) \quad \text{ou} \quad s=s'.$$

D'ailleurs s' n'est autre chose que le nombre des points doubles des sections de la surface corrélative de Σ. Donc le théorème est démontré.

Cette propriété est d'ailleurs fort évidente si l'on considère que deux sections planes de surfaces gauches corrélatives sont des courbes se correspondant point à point et de même degré. Elles sont, par suite, de la même classe.

3° Je terminerai en citant les valeurs des *degrés* de quelques conditions *simples* :

Droites rencontrant sous un angle donné une surface de degré p et dont les sections sont de la classe q,

$$m=2(p+q);$$

Droites rencontrant sous des angles égaux deux surfaces de degrés p, p', et dont les sections sont de classes q et q',

$$m=2(pp'+pq'+p'q);$$

Droites rencontrant sous *deux* angles égaux une surface de degré p, et dont les sections sont de classe q,

$$m=p(p-1)+2p(2q-1);$$

Etc.

SUR LES

DROITES QUI SATISFONT A DES CONDITIONS DONNÉES.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 74, 1872 (I), p. 41.

Dans une récente Communication, j'ai montré que le problème de la recherche du nombre des droites déterminées par des conditions composées d'au moins deux groupes séparés, se réduit à deux cas :

1° Les droites satisfont à une condition triple et à une simple;

2° Les droites satisfont à deux conditions doubles; et j'ai donné le théorème qui résout la première partie du problème.

Je me propose ici de démontrer le théorème suivant, qui résout le second cas, et que j'ai déjà communiqué à l'Académie (1), mais avec une démonstration relative à un cas de la question et très différente de la démonstration générale qui fait le sujet de cette Note :

THÉORÈME. — *Le nombre des droites qui satisfont à deux doubles conditions est égal au produit des ordres de ces conditions, augmenté du produit de leurs classes.*

Démonstration. — Soit O un point fixe dans un plan fixe P. Considérons une droite quelconque D, et, dans le plan de cette droite et du point O, la perpendiculaire menée en ce point à l'intersection des deux plans. Soit Ω le point de rencontre de cette perpendiculaire et de la droite D. Appliquons cette construction à toutes les droites D qui satisfont à une double condition d'ordre μ et de

(1) *Comptes rendus*, t. XLVIII, p. 142; 1869.

classe ν, le point O et le plan P restant fixes. Le lieu des points Ω est une surface S, dont le degré est $\mu + 2\nu$.

En effet, il est clair, tout d'abord, que les droites D qui rencontrent la perpendiculaire A élevée en O, au plan P, ont leurs points Ω sur cette droite; et, comme, par chaque point, il en passe un nombre égal à ν, la droite A est multiple d'ordre ν de la surface S. En second lieu, si l'on mène par A un plan quelconque, on voit que les droites D qui ont leurs points Ω dans ce plan, en dehors de A, sont celles qui rencontrent le rayon mené de O, dans le plan P, perpendiculairement au plan considéré. Ces droites forment une surface de degré $\mu + \nu$, dont l'intersection par ce plan est une courbe de ce degré, ayant le point O pour point multiple d'ordre ν. Donc tout plan mené par A coupe la surface S suivant une ligne composée de degré $\mu + 2\nu$. Tel est le degré de cette surface.

On peut remarquer aussi que l'intersection de la surface S et du plan P se compose : 1° des μ droites D situées dans ce plan; 2° des deux asymptotes des cercles du plan P et de centre O, multiples d'ordres ν. Il en est de même des intersections de cette surface et de chacun des plans menés par A et une de ces asymptotes : elles se composent chacune de μ droites D et de deux droites multiples d'ordre ν.

On peut remarquer également que le point O est multiple d'ordre 2ν sur la surface S, et que le lieu des tangentes en ce point se compose de ν cônes du second ordre, passant tous par la droite A et les deux asymptotes, et chacun par une des ν droites qui passent en O. En sorte que, si l'on considère deux telles surfaces S, S_1, la ligne d'intersection L qu'elles ont en commun, outre la droite A et les deux asymptotes, a en O un point multiple d'ordre $\nu\nu_1$.

Considérons effectivement une pareille surface S_1, déterminée par la même construction opérée sur les droites D_1 satisfaisant à une autre double condition, d'ordre μ_1 et de classe ν_1. La ligne d'intersection L est de degré d :

$$d = (\mu + 2\nu)(\mu_1 + 2\nu_1) - 3\nu\nu_1.$$

A chaque point Ω de cette ligne L correspond un plan passant par la droite $O\Omega$, dont la trace sur le plan P est perpendiculaire à cette droite $O\Omega$, et qui contient un couple de droites conjuguées (D, D_1).

Il est clair que, parmi ces couples de droites conjuguées, se trouve

chacun de ceux de droites D, D_1 confondues, c'est-à-dire de droites satisfaisant à la fois aux deux doubles conditions données. Comme deux droites conjuguées ont un point Ω commun, on aura le nombre des couples de droites conjuguées confondues par celui des couples de droites dont les traces sur le plan P sont confondues, diminué de celui des couples dont le point Ω est dans ce plan.

Les droites D dont les points Ω sont sur la ligne L forment une surface Σ, qui a pour ligne multiple d'ordre μ_1 chacune des μ droites D du plan P. A chacune des $\nu\nu_1$ branches de la ligne L au point O correspond un couple de droites D, D_1, passant en ce point, et une nappe de la surface Σ. De plus, chacune des droites D, passant au point O, rencontre, en outre, en μ_1 autres points la surface S_1, de degré $\mu_1 + 2\nu\nu_1$, avec point multiple d'ordre $2\nu_1$ en O. Donc, chacune des ν droites D passant en O est multiple d'ordre $\mu_1 + \nu_1$ sur Σ ; et le point O est multiple d'ordre $\nu(\mu_1 + \nu_1)$ de cette surface.

De même, les droites conjuguées D_1 forment une surface Σ_1, qui a pour ligne multiple d'ordre μ chacune des μ_1 droites D_1 du plan P, et pour point multiple d'ordre $\nu_1(\mu + \nu)$ le point O.

Nous avons vu plus haut que les droites D dont les traces sont sur un rayon issu de O, dans le plan P, ont leurs points Ω sur une courbe de degré $\mu + \nu$, avec point multiple d'ordre ν en O, et située dans le plan mené en O perpendiculairement à ce rayon. De même les droites D_1 qui rencontrent le même rayon ont leurs points Ω_1 sur une courbe du même plan, de degré $\mu_1 + \nu_1$, avec point multiple d'ordre ν_1 en O Par suite, les points Ω des couples de droites conjuguées, dont les traces sont sur ce rayon, sont les intersections de ces deux courbes, autres que le point O, et leur nombre n est

$$n = (\mu + \nu)(\mu_1 + \nu_1) - \nu\nu_1.$$

Si l'on ajoute à ce nombre l'ordre de multiplicité du point O sur la surface Σ, on a le degré de la ligne suivant laquelle le plan P coupe cette surface, en outre des μ droites D de ce plan. De même pour la surface Σ_1. En sorte que les degrés des deux lignes sont respectivement

$$n + \nu(\mu_1 + \nu_1) \quad \text{et} \quad n + \nu_1(\mu + \nu).$$

Soient x et y les distances, à une origine prise sur un axe du plan P, des projections, sur cet axe, des traces de deux droites conjuguées

D et D_1. A chaque valeur de x répondent les droites D de la surface Σ qui rencontrent la perpendiculaire à l'axe à cette distance x de l'origine, les μ droites du plan étant exceptées. Leur nombre est $n+\nu(\mu_1+\nu_1)$. A chaque valeur de x répond ce nombre de valeurs de y. De même, à chaque valeur de y répondent $n+\nu_1(\mu+\nu)$ valeurs de x. Il y a donc

$$2n+\nu(\mu_1+\nu_1)+\nu_1(\mu+\nu)$$

systèmes de valeurs x, y égales.

Parmi ces systèmes sont compris ceux qui correspondent aux couples de droites conjuguées dont les traces sont sur la perpendiculaire à l'axe menée par O, et dont le nombre est n. Parmi ces systèmes sont compris aussi ceux qui correspondent aux couples dont les points Ω sont dans le plan P. Ces points Ω sont les intersections du plan P et de la courbe L, autres que les $\mu\mu_1$ points de croisement des μ droites D et des μ_1 droites D_1 de ce plan. Leur nombre est donc $d-\mu\mu_1$. Il reste donc

$$n+\nu(\mu_1+\nu_1)+\nu_1(\mu+\nu)-d+\mu\mu_1=\mu\mu_1+\nu\nu_1$$

couples de *droites conjuguées confondues*; ce qui démontre le théorème annoncé.

SUR LES COURBES TRACÉES

SUR LES

SURFACES DU SECOND ORDRE.

Bulletin de la Société mathématique, t. I, 1872, p. 19.

Dans un Mémoire que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie des Sciences, au commencement de l'année 1870, et où il est traité de la théorie générale des courbes gauches algébriques, j'ai démontré divers théorèmes relatifs aux courbes tracées sur les surfaces du second ordre. Le plus saillant d'entre eux est le suivant : *Les surfaces de degré minimum, qui passent par une ligne algébrique quelconque tracée sur une surface du second ordre, coupent cette dernière, en outre, seulement suivant les droites d'un même système.*

Je me propose de donner ici une démonstration de ce théorème, très simple et différente de celle qui est contenue dans le Mémoire précité. Je m'appuierai sur le lemme suivant :

Si, par l'intersection complète de deux surfaces S *et* S_1, *d'un degré égal au produit des degrés de ces surfaces, on mène une troisième surface* S_2, *de degré supérieur à celui de* S_1, *la courbe, suivant laquelle les surfaces* S *et* S_2 *se coupent en outre, est l'intersection complète de la surface* S *et d'une autre surface.*

En effet, en figurant par $S=0$, $S_1=0$, $S_2=0$ les équations de ces surfaces, on a, d'après l'hypothèse, $S_2=AS+BS_1$, A et B étant des polynomes dont le premier s'évanouit si le degré de S_2 est inférieur à celui de S. Cette relation prouve que l'intersection de S_2 et de S se compose de celles de cette dernière surface avec les surfaces $S_1=0$ et $B=0$.

Cela posé, soit une courbe algébrique P, de degré p, sur une surface de second ordre. Soit q le nombre de ses points de rencontre avec les génératrices rectilignes d'un système, et, par suite, $p-q$ le nombre de ses points de rencontre avec celles de l'autre système. Si la courbe proposée est l'intersection complète de la surface du second ordre et d'une autre surface, ces deux nombres sont égaux tous deux au degré de cette dernière surface. Nous allons démontrer le théorème réciproque, c'est-à-dire que :

Si une courbe tracée sur une surface du second ordre rencontre en un même nombre de points les génératrices rectilignes des deux systèmes, elle est l'intersection complète de la surface du second ordre et d'une autre surface.

Soit donc une courbe P_1 de degré $2q$, rencontrant en q points toutes les génératrices rectilignes d'une surface de second ordre S, sur laquelle elle est tracée. Par cette courbe on peut mener une surface Σ de degré $2q-1$, par exemple un cône ayant son sommet sur la courbe. Les surfaces S et Σ se coupent, en outre, suivant une courbe P_2 de degré $2(q-1)$, qui rencontre également toutes les génératrices rectilignes de S en un même nombre de points. Admettons que le théorème soit vrai pour les courbes de degré $2(q-1)$. Il en résultera que P_2 est une intersection complète. Donc, d'après le lemme, la courbe P_1, suivant laquelle se coupent en outre les surfaces S et Σ passant par P_2, est aussi une intersection complète. Donc, si le théorème est vrai pour les courbes de degré $2(q-1)$, il l'est aussi pour celles de degré $2q$. Or, il l'est évidemment pour celles du degré 2, qui sont planes. Donc le théorème est démontré.

Revenons maintenant à une courbe P quelconque, de degré p, rencontrant les droites de la surface respectivement en q et $p-q$ points. Soit, pour fixer les idées, q le plus grand de ces deux nombres q et $p-q$. A la courbe P adjoignons $q-(p-q)$ ou $2q-p$ droites de la surface, rencontrées chacune par cette courbe en q points. Il est clair que l'ensemble de la courbe P et de ces droites forme une ligne P_1 de degré $2q$, rencontrant en q points toutes les génératrices rectilignes. La ligne P_1 est donc une intersection complète. Il existe donc des surfaces de degré q, passant par la courbe P, et coupant en outre la surface S suivant des droites d'un même système. Il est clair d'ailleurs que l'on ne peut mener par P des surfaces de degré

moindre que q, puisque cette courbe est rencontrée en q points par des droites. De plus, toute surface de degré q, menée par P, coupe, en outre, la surface du second ordre suivant une courbe P', de degré $2q-p$, qui rencontre les génératrices rectilignes d'un système en $2q-p$ points, et ne rencontre pas celles de l'autre système. Or, une courbe gauche qui rencontre une droite en un nombre de points égal à son degré se réduit forcément à des droites. Donc toute surface de degré q menée par P coupe la surface S, en outre, suivant des droites d'un même système; ce qui démontre entièrement le théorème annoncé.

SUR LE MOUVEMENT D'UNE DROITE.

Bulletin de la Société mathématique, t. I, 1873, p. 114.

M. Mannheim a trouvé cette remarquable propriété que, *si quatre points d'une droite se meuvent dans des plans, tous les points de la droite décrivent des ellipses.*

Je me propose de faire connaître quelques autres propriétés de ce mouvement.

Étant donnés cinq plans $P_1, \ldots, P_5$ et une droite D, il est facile de voir qu'il existe une développable du quatrième degré et de la troisième classe tangente à ces plans et bitangente à la droite, et qu'il n'en existe qu'une. Soit S cette surface. Par chaque point, on peut lui mener trois plans tangents, et, par suite, trois droites bitangentes. Par suite aussi, par chaque point d'une bitangente à cette surface, passe un seul plan tangent à S, qui ne contienne pas cette bitangente de la surface. Donc tous les plans tangents divisent homographiquement les bitangentes de la surface.

La congruence formée par ces bitangentes contient toutes les droites qui sont partagées par les cinq plans homographiquement à la droite D. Car on voit aisément que, par un point d'un de ces plans, on ne peut mener qu'une seule droite satisfaisant à cette condition et non contenue dans ce plan ; et que, par le même point, ne passe aussi qu'une seule bitangente à S non contenue dans ce même plan. Ces deux droites coïncident donc. Par suite :

Théorème I. — *Les droites, qui sont partagées par cinq plans donnés homographiquement à une droite donnée, forment une congruence dont la focale est une surface développable du quatrième degré et de la troisième classe. Tous les plans tangents*

de cette surface divisent homographiquement toutes les droites de la congruence.

En particulier, si l'un des plans, P_5, est à l'infini, la congruence est formée des droites divisées par quatre plans donnés semblablement à une droite donnée, et l'on voit que tous les points homologues d'un même point de la droite donnée sont dans un même plan.

Si, parmi les droites de cette dernière congruence, on choisit celles qui sont divisées en parties égales à celles de D, ces droites forment une surface, qui est celle engendrée par une droite dont quatre points se meuvent dans quatre plans. Le théorème I nous apprend que, dans ce cas, chaque point se meut également dans un plan. Parvenu à ce résultat par d'autres considérations, M. Mannheim, s'appuyant alors sur un théorème de Dupin, en conclut que chaque point décrit une ellipse. Je vais démontrer la même proposition sans avoir recours au théorème de Dupin.

Revenons à la première congruence considérée. Les droites qui la constituent déterminent une correspondance point à point entre deux plans tangents quelconques P de la surface focale S, en sorte qu'à une droite d'un de ces plans correspond une droite dans chacun des autres. Si, dans un de ces plans, P_1, on considère une droite L_1, les droites de la congruence qui rencontrent L_1 et ne sont pas dans le plan P_1, forment un hyperboloïde tangent à chaque plan P. Les droites qui correspondent à L_1 dans le plan P sont les génératrices rectilignes d'un système. Les droites de la congruence sont celles de l'autre système. Deux hyperboloïdes, déterminés par deux droites L_1, L'_1 du plan P_1, se coupent suivant la droite de la congruence qui passe au point commun à ces deux droites et n'est pas située dans le plan P_1.

Il est facile de déterminer la seconde droite suivant laquelle le plan P_1 coupe l'hyperboloïde déterminé par L_1. Cette droite passe par un point de L_1 où deux des trois plans tangents à S se confondent avec P_1. C'est le point où L_1 rencontre la génératrice rectiligne T_1 de la surface S, suivant laquelle le plan P_1 touche cette surface. Le même plan coupe S, en outre, suivant une conique C_1 tangente à T_1. La droite cherchée est donc l'autre tangente à C_1, issue du point commun à L_1 et à T_1. Il en est de même dans chaque plan P. Il coupe l'hyperboloïde suivant deux droites, l'une L, et l'autre tangente à la conique C et passant au point de rencontre de L et de T.

Supposons de nouveau que le plan P_5 soit à l'infini. L'hyperboloïde considéré devient un paraboloïde. Les deux droites de ce paraboloïde, contenues dans le plan P_5, se coupent sur la droite T_5. Donc :

Théorème II. — *Tous les paraboloïdes contenus dans la congruence des droites divisées par quatre plans semblablement à une droite donnée sont tels que, pour chacun d'eux, l'intersection des plans directeurs est parallèle à un plan fixe.*

Par un point O menons des parallèles aux génératrices d'un de ces paraboloïdes, et portons sur ces droites des longueurs OM égales aux segments interceptés sur les génératrices par deux plans P, et de même sens. On voit immédiatement que le lieu des points M est une droite parallèle à l'intersection des plans directeurs. Si l'on prend un autre paraboloïde et qu'on fasse la même construction, on obtiendra une autre droite, qui rencontrera la précédente, attendu que les deux paraboloïdes ont une génératrice commune. Donc le plan de ces deux droites est parallèle au plan fixe défini dans le dernier théorème. Donc :

Théorème III. — *Si l'on transporte parallèlement à elles-mêmes toutes les droites de la congruence, en réunissant en un même point tous les homologues d'un certain point, les homologues de tout autre point sont dans un même plan de direction constante.*

Dans la nouvelle figure ainsi formée, une série de plans Q parallèles entre eux correspondent un à un aux plans P de la première. Les droites de la congruence considérée et les droites menées par le point O se correspondent une à une, et déterminent sur deux plans P, Q correspondants une correspondance point à point ; de sorte que deux courbes correspondantes sur ces deux plans sont du même degré. On voit aussi très aisément que les droites à l'infini de ces deux plans se correspondent, en sorte que les asymptotes de deux courbes correspondantes sont des droites homologues. Il en résulte immédiatement que les points de concours des asymptotes des courbes tracées sur les plans P, et qui correspondent à une courbe tracée sur l'un d'eux, décrivent des droites de la congruence. Si ce sont des coniques, leurs centres sont en ligne droite.

Les droites de la congruence, pour lesquelles les segments compris

entre deux plans P sont égaux, sont parallèles à des droites issues de O et formant un cône de révolution, dont l'axe est perpendiculaire aux plans Q. Ce cône est coupé par chaque plan Q suivant un cercle. A chacun de ces cercles répond, dans chaque plan P, une conique. Le lieu des centres de ces coniques est la droite de la congruence qui est parallèle à l'axe du cône; cette droite est, par suite, la droite de la congruence sur laquelle les plans P interceptent les plus petits segments. On peut donc compléter le théorème de M. Mannheim de la manière suivante :

Théorème IV. — *Si deux droites sont partagées par quatre plans en segments proportionnels, et qu'on les fasse mouvoir toutes deux de manière que les extrémités de ces segments restent dans les plans donnés :* 1° *tous leurs points décrivent des ellipses;* 2° *les ellipses décrites par deux points homologues sont dans le même plan, concentriques et homothétiques;* 3° *le lieu des centres de ces ellipses est la droite unique partagée par les plans donnés en segments proportionnels à ceux des droites données et les plus petits possible;* 4° *chacune des deux droites fait, dans son mouvement, un angle constant avec cette ligne des centres.*

MÉMOIRE

SUR LA

DÉTERMINATION DES CONIQUES

ET DES

SURFACES DU SECOND ORDRE.

Bulletin de la Société mathématique, t. I, 1873, p. 130 et 226; t. II, 1873, p. 11.

INTRODUCTION.

Quand on considère des courbes ou des surfaces pour la détermination desquelles M conditions sont nécessaires, il y a lieu de se demander le nombre de ces courbes ou de ces surfaces qui satisfont à M conditions données. Il peut arriver que quelques-unes de ces conditions aient entre elles une telle dépendance qu'il ne soit pas possible de les considérer comme des conditions séparées sans introduire des solutions étrangères au problème proposé. On peut employer les noms de condition double, triple, etc., à désigner l'ensemble de plusieurs conditions inséparables.

D'une manière générale, les M conditions données peuvent se composer de m_1 conditions simples, m_2 conditions doubles, ..., m_i conditions multiples d'ordre i, ..., indépendantes les unes des autres, de sorte que l'on ait $m_1 + 2m_2 + \ldots + im_i + \ldots = \mathrm{M}$. Chaque groupement des M conditions en conditions séparées donne lieu à un problème particulier, dont la solution fournira un théorème enseignant, dans chaque cas, *quels sont les nombres relatifs à toute condition simple, double, etc., qu'il faut connaître, et comment il faut combiner ces nombres pour obtenir celui qu'on cherche;* en d'autres termes, *quelle fonction représente ce dernier nombre.*

C'est ainsi que, relativement à la détermination du nombre des droites qui satisfont à deux conditions dans un plan, il suffit de connaître, pour chaque condition, le nombre des droites qui y satisfont et passent par un point.

Relativement à la détermination des plans, les théorèmes sont également bien connus. Pour la détermination des droites dans l'espace, les problèmes sont résolus par deux théorèmes que j'ai communiqués à l'Académie des Sciences en 1871 et en 1872 (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXIII et LXXIV).

C'est en abordant ce genre de problèmes relativement aux coniques dans le plan que M. Chasles a tout d'abord ouvert la voie à cet ordre de recherches. Le premier problème est celui où l'une des conditions est simple. Les quatre autres conditions, qui peuvent être dépendantes ou indépendantes les unes des autres, déterminent un *système*. La solution du problème est contenue dans le théorème suivant :

Dans un système plan, le nombre des coniques qui passent en un point étant μ *et le nombre de celles qui touchent une droite étant* ν, *le nombre de celles qui satisfont à une condition quelconque est* $\alpha\mu + \beta\nu$, *les nombres* α *et* β *ne dépendant que de la condition donnée* (*).

Ce beau théorème, que M. Chasles a découvert par l'induction, n'a pas encore été démontré.

Je me propose d'en donner une démonstration dans la première Partie de ce Mémoire.

Dans la seconde Partie, j'aborderai le problème dans lequel les *cinq* conditions se partagent en deux, l'une triple, l'autre double. Ce problème est résolu par un théorème analogue au précédent; mais la formule est à *trois* termes. L'énoncé de ce théorème est contenu implicitement dans une Note de M. Chasles (*Comptes rendus*, t. LIX, p. 345), ainsi que l'a fait remarquer M. Cremona, en le donnant explicitement (*Comptes rendus*, t. LIX, p. 776). Si la condition double se compose de deux conditions séparées, ce théorème découle facilement du précédent. Mais, s'il n'en est pas ainsi, il constitue un

(*) Les nombres μ et ν sont appelés première et deuxième caractéristique du système.

deuxième théorème distinct, non encore démontré, et dont on n'a même presque fait aucune vérification.

Dans la deuxième Partie de ce Mémoire, je démontrerai ce théorème, et je ferai voir que l'ensemble de ces deux propositions fournit la solution complète des problèmes relatifs aux coniques dans le plan, de telle façon que, dans tous les cas, une condition simple, ainsi qu'une condition quadruple, est caractérisée par deux nombres, et une condition double ou triple par trois nombres.

Dans la troisième Partie de ce Mémoire, j'étudierai les problèmes relatifs à la détermination des coniques dans l'espace et des surfaces du second ordre; et je démontrerai, à cette occasion, plusieurs théorèmes nouveaux.

La première Partie contient, tout d'abord, quelques théorèmes étrangers à la question proposée, mais qui seront d'un usage fréquent dans tout le cours du Mémoire.

PREMIÈRE PARTIE.

I. — Théorèmes généraux sur les intersections des courbes planes algébriques.

Soit, sur une courbe algébrique plane, un point O tel que la droite Oy ait r de ses points d'intersection avec la courbe réunis en O; soit Ox une autre droite. L'équation de la courbe, rapportée aux axes Ox, Oy, est de la forme

$$y^r(\mathrm{A} + \mathrm{B}y + \ldots + \mathrm{K}y^{\mathrm{R}}) + x\mathrm{P} = 0; \tag{1}$$

A, B, ..., K sont des polynomes en x seul, dont le premier ne s'évanouit pas avec x; P est un polynome dont le degré en y est inférieur à r.

Pour une valeur infiniment petite de x, l'équation (1) détermine r racines y infiniment petites. Le produit des autres racines est $\pm\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{K}}$. Soit maintenant s le moindre degré de x dans les termes indépendants de y, en sorte que ces termes soient $x^s(a+bx+\ldots)$. Le produit de toutes les racines de (1) est $\pm\frac{x^s(a+bx+\ldots)}{\mathrm{K}}$. Le produit des racines infiniment petites est donc égal à $\pm\frac{x^s(a+bx+\ldots)}{\mathrm{A}}$, c'est-à-dire de l'ordre de x^s. Prenant x pour infiniment petit du premier ordre,

désignons par α_1, α_2, ... les ordres de ces racines. Faisons le produit des r binomes $(y - x^\alpha)$. Nous obtenons un polynome en y dont les r racines ont chacune un rapport fini avec une racine infiniment petite de (1). Les produits de ces deux groupes de racines ont donc un rapport fini, c'est-à-dire que la somme des nombres α est égale à s.

Or s marque le nombre des points d'intersection de la courbe et de Ox, confondus en O. Donc :

Théorème I. — *Le nombre des intersections d'une courbe et d'une droite, confondues en un point* O, *est égal à la somme des ordres des segments infiniment petits interceptés par la courbe et la droite sur une sécante quelconque, dont la distance au point* O *est infiniment petite du premier ordre.*

On peut faire la remarque suivante : Une racine y étant de l'ordre α, on peut, pour trouver son rapport à x^α, se borner à considérer, dans (1), les termes en $y^i x^j$, tels que $j + i\alpha$ ait la même valeur pour tous ces termes. On en conclut aisément que les produits de ces rapports par x^α, ou les racines y de l'ordre α, bornées à leur premier terme, sont déterminés par une équation dont les coefficients ne contiennent que des puissances entières de x. On peut donc dire que : *si* ρ *est le nombre des segments ci-dessus de l'ordre* α, *le produit* $\rho\alpha$ *est toujours un nombre entier.*

Ce théorème est susceptible d'être étendu au cas de deux courbes, par l'analyse suivante :

Soient deux courbes S et S' dans le même plan. On peut faire correspondre deux à deux les points de ces deux courbes qui ont même ordonnée y, et imaginer la courbe Σ dont les coordonnées rectilignes ξ, η sont les abscisses x, x' de deux points correspondants. Un point commun aux deux courbes S et S' correspond à un point de Σ situé sur la bissectrice des axes. Supposons que le point O, origine des coordonnées x, y, soit commun aux deux courbes S, S'. La courbe Σ passe en Ω origine des coordonnées ξ, η.

D'après le théorème I, on trouvera le nombre des points communs à Σ et à la bissectrice des axes en considérant une valeur de ξ infiniment petite du premier ordre, cherchant l'ordre de chacune des valeurs de $(\eta - \xi)$ infiniment petites correspondantes, et faisant la somme de ces ordres. Cette somme sera le nombre cherché. En se reportant aux courbes S et S' on voit que cela revient à : mener une

parallèle à Oy, d'abscisse x du premier ordre; prendre les points m, infiniment voisins de O, où cette droite coupe S; par chaque point m, mener une parallèle à Ox; considérer sur chaque parallèle les points m' infiniment voisins de O et appartenant à S'; faire la somme des ordres des segments mm', interceptés sur ces parallèles.

En particulier, si les droites Ox, Oy ne sont pas tangentes à la courbe S', les points m' situés sur chaque parallèle à Ox sont en même nombre que les points m'_1 infiniment voisins de O situés sur la parallèle à Oy et sur S'; chaque segment mm'_1 est du même ordre qu'un segment mm', et les nombres de ces deux groupes de segments sont les mêmes. On peut donc remplacer la somme des ordres des segments mm' par celle des segments mm'_1. Donc :

Théorème II. — *Le nombre des intersections de deux courbes, réunies en un point* O, *est égal à la somme des ordres des segments infiniment petits interceptés par les deux courbes sur une sécante dont la distance au point* O *est infiniment petite du premier ordre, et qui ne coïncide avec aucune tangente à l'une des courbes en ce point.*

De la remarque faite à propos du théorème I, on peut conclure ici que: *si* ρ *est le nombre des segments d'ordre* α, *le produit* $\rho\alpha$ *est toujours un nombre entier.*

Au lieu de deux courbes quelconques, considérons maintenant deux courbes S et S' telles qu'à chaque point m de la première correspondent a points m' de la seconde, situés sur la droite qui joint m à un point fixe C, où ne passe pas S; et que les groupes de a points m', correspondant aux différents points m en ligne droite avec C, soient tous différents.

D'après cette définition, si p est le degré de S et n l'ordre de multiplicité du point C dans S', cette dernière courbe coupe les droites issues du point C en $ap+n$ points. Ce nombre marque donc son degré.

Projetons en μ, μ' sur une droite CA, deux points correspondants m, m', et imaginons la courbe Σ dont les coordonnées rectilignes sont Cm et Cm'. Cette courbe est de degré $2ap+n$, et a, à l'origine des coordonnées, un point multiple provenant des couples de points m, m' situés sur la perpendiculaire élevée en C sur CA. On voit très facilement que ce point compte pour ap intersections de Σ et de la

bissectrice des axes. Il reste donc $ap+n$ autres points communs à ces deux lignes. Donc :

Théorème III. — *Si, à chacun des points d'une courbe de degré p, situés sur une droite issue d'un point fixe, où ne passe pas cette courbe, correspond un groupe distinct de a points sur la même droite, et que le point fixe soit multiple d'ordre n sur le lieu de ces derniers, le degré de ce lieu, ainsi que le nombre des couples de points correspondants confondus, est égal à $ap+n$.*

Les données restant les mêmes, si un point O est la réunion de plusieurs couples de points correspondants, on cherchera leur nombre en appliquant le théorème I à la courbe Σ. On sera conduit alors à mener une sécante à distance infiniment petite du premier ordre du point O, à considérer chaque point m d'intersection de cette sécante et de S infiniment voisin de O, à mener le rayon Cm et à faire la somme des ordres des segments mm' compris entre deux points correspondants infiniment voisins.

La sécante peut être prise non tangente à la courbe S. Si, de plus, le rayon CO n'est pas tangent à cette courbe, un rayon issu de C, et à distance du premier ordre de O, coupe S en des points à distance du premier ordre de ce point O, et en même nombre que la sécante considérée. Il y a donc sur ce rayon le même nombre de segments compris entre des points correspondants infiniment voisins de O, et du même ordre que sur les différents rayons considérés en premier lieu. Donc :

Théorème IV. — *S'il existe une correspondance entre les points de deux courbes situés sur les droites issues d'un point fixe* C, *et que* O *soit un point commun aux deux courbes, où aucune des tangentes à l'une d'elles ne passe en* C, *le nombre des couples de points correspondants, confondus en* O, *est égal à la somme des ordres des segments compris entre deux points correspondants infiniment voisins de* O, *et situés sur une droite issue de* C *dont la distance au point* O *est infiniment petite du premier ordre.*

On remarquera encore que : *si ρ est le nombre des segments d'ordre α, le produit $\rho\alpha$ est toujours un nombre entier.*

II. — Démonstration du théorème de M. Chasles sur les systèmes de coniques dans le plan.

Étant donné un système plan de coniques, prenons dans le plan du système une droite arbitraire Δ, et une origine a sur cette droite. Soient m et m' les points où une conique du système rencontre Δ. Considérons la courbe dont les coordonnées rectilignes sont $x = \frac{1}{2}(am + am'), y = \frac{am.am'}{K}$, K étant une longueur constante. A chaque conique du système correspond un point de cette courbe, et à chaque point de la courbe correspond une conique. Pour abréger le langage, j'appellerai cette courbe *indicatrice* du système relative à la droite Δ. Je vais démontrer qu'*elle a pour degré la première caractéristique du système*.

Soit μ cette caractéristique. Considérons, pour un instant, la courbe dans les coordonnées ξ, η sont am et am'. Elle est de degré 2μ, symétrique par rapport à la bissectrice des axes de coordonnées, et elle a, à l'infini, sur chacun des axes, un point multiple d'ordre μ. Les points de cette courbe, pour lesquels $am + am'$ a une valeur donnée, sont sur une droite perpendiculaire à l'axe de symétrie. Ils sont donc en nombre 2μ et disposés symétriquement par rapport à cet axe. Ils répondent à μ coniques. En second lieu, les points, pour lesquels $am.am'$ a une valeur donnée, sont sur une hyperbole qui coupe la courbe en 4μ points, dont 2μ sont à l'infini et 2μ disposés symétriquement par rapport à l'axe de symétrie. Ces derniers répondent donc également à μ coniques. Donc, dans l'indicatrice, à chaque valeur de x ou de y répondent μ coniques du système et μ valeurs de y ou de x. D'ailleurs, x et y ne deviennent infinis qu'ensemble, pour les coniques ayant une asymptote parallèle à Δ. Donc l'indicatrice est de degré μ.

Un couple quelconque de points m et m' de la droite Δ peut être représenté sur le plan par un point dont les coordonnées sont : $x = \frac{1}{2}(am + am'), y = \frac{am.am'}{K}\cdot$ Deux points m et m' qui coïncident sont représentés par un point situé sur la parabole P dont l'équation est $Ky = x^2$. Si le point (x, y) décrit une ligne droite

$$Ax + By + C = 0,$$

les points m et m' sont liés par la relation

$$\frac{A}{2}(am + am') + B.am.am' + C = 0,$$

qui est l'équation générale de deux divisions homographiques *en involution* sur la droite Δ. Donc : *Chaque droite du plan représente deux divisions en involution sur* Δ, *et inversement.* Par suite, *les deux points d'intersection d'une droite et de la parabole* P *représentent les deux points doubles de l'involution. Toute droite tangente à cette parabole représente une involution où les deux points doubles coïncident, c'est-à-dire une seule série de points variables sur* Δ, *et un point fixe dont la distance à l'origine sur* Δ *est égale à l'abscisse du point de contact.* Et, par suite, *chaque point du plan représente deux points sur* Δ, *dont les distances à l'origine sur cette droite sont les abscisses des points de contact des tangentes à la parabole issues du point considéré.*

Considérons maintenant les μ intersections d'une droite D et de l'indicatrice J d'un système de coniques. Ces μ points répondent aux μ coniques qui divisent harmoniquement le segment de Δ compris entre les points de cette droite correspondant aux points d'intersection de D et de la parabole P. Si la droite D est tangente à P, ces μ coniques passent au point de Δ correspondant au point de contact. Ainsi *les* μ *points d'intersection de l'indicatrice et d'une tangente à la parabole répondent à* μ *coniques se coupant sur* Δ.

Si la tangente à la parabole est en même temps tangente à l'indicatrice, deux de ces coniques sont infiniment voisines. Ainsi l*e point de contact avec la parabole d'une tangente commune à cette courbe et à l'indicatrice représente un point où* Δ *coupe l'enveloppe du système de coniques.*

Les 2μ points d'intersection de l'indicatrice et de la parabole répondent aux coniques qui coupent Δ en deux points réunis. Parmi ces coniques, les unes sont des coniques ordinaires tangentes à Δ, les autres sont des coniques réduites à une droite, que j'appellerai, pour abréger, des *droites-coniques.*

Il faut remarquer que les points répondant aux premières sont de simples points d'intersection des deux courbes. Car, s'il y avait contact, cela indiquerait que la droite Δ touche une conique du système en un point où cette conique touche l'enveloppe du système. La

droite Δ serait donc tangente à cette enveloppe, ce qui n'aura pas lieu si la droite Δ est quelconque. En second lieu, si un de ces points était multiple dans l'indicatrice, cela indiquerait qu'il y correspond, ou une conique multiple tangente à Δ, ou deux coniques tangentes à Δ au même point; ce qui n'aura pas lieu non plus, si la droite Δ est quelconque. Par suite, si ω désigne le nombre des points d'intersection des deux courbes afférents aux droites-coniques, et ν la deuxième caractéristique du système, on a $\nu = 2\mu - \omega$.

Au contraire, aux points correspondants à des droites-coniques, il peut arriver que, quelle que soit la droite Δ, l'indicatrice soit multiple et touche la parabole P. Quand ce fait se produit, la droite-conique figure pour plusieurs unités dans le nombre ω. On dit alors d'habitude qu'elle est *multiple*. Il me paraît convenable de désigner par *ordre de multiplicité* de la droite-conique le nombre des branches de l'indicatrice au point correspondant. J'appellerai *valeur* de la droite-conique le nombre des unités pour lesquelles elle figure dans ω. Cette valeur peut différer beaucoup de l'ordre de multiplicité, et être multiple quand ce dernier est l'unité. L'application du théorème II va servir à mettre en évidence les éléments géométriques qui déterminent la valeur d'une droite-conique dans un système.

Soit, sur l'indicatrice J, un point O répondant à une droite-conique, et, par suite, situé sur la parabole P. Menons une sécante arbitraire à distance du premier ordre du point O. Soit π le point voisin de O où elle coupe P, et p un des points voisins de O où elle coupe J. Sur la droite Δ, soit M le point représenté par O, μ par π et m, m' les deux points représentés par p. Le segment $M\mu$ est infiniment petit du premier ordre. Soit μ_1 le point de Δ représenté par le second point d'intersection de la sécante et de P. Le segment $M\mu_1$ est fini.

Pour trouver la valeur de la droite-conique, il suffit de faire la somme des ordres des segments $p\pi$. Soit θ l'angle de la sécante et de l'axe Ox. Chaque segment $p\pi$ est égal à la différence des abscisses des points p, π divisée par $\cos\theta$; c'est-à-dire, en désignant par C le milieu de mm', à $\frac{C\mu}{\cos\theta}$. Mais $C\mu = \frac{\overline{Cm}^2}{C\mu_1}$. Chaque segment a donc pour longueur $\frac{\overline{Cm}^2}{C\mu_1 \cos\theta}$, et est de l'ordre de $\overline{Cm}^2$. Ainsi, *pour trouver la valeur de la droite-conique, il suffit de chercher les coniques infiniment aplaties qui divisent harmoniquement un segment dont*

une extrémité est à distance infiniment petite du premier ordre de la droite-conique, et de faire la somme des ordres des carrés des segments interceptés par ces coniques. Si la sécante est perpendiculaire à l'axe Ox, le point μ_1 est à l'infini; mais $C\mu_1 \cos\theta$ reste fini et devient égal à K. Par suite, *la même règle s'applique en considérant les coniques qui interceptent sur une droite des segments dont le milieu est à distance du premier ordre de la droite-conique.*

On parvient au même résultat en considérant directement les segments interceptés par les courbes sur une sécante parallèle à Oy, à distance λ du premier ordre de O. Un point p infiniment voisin de O sur cette sécante et sur l'indicatrice répond à une conique coupant Δ en deux points m, m', dont le milieu est à distance λ du point M. En désignant par σ le demi-segment mm', on a

$$\frac{am + am'}{2} = a\text{M} + \lambda, \qquad \frac{am.\,am'}{\text{K}} = \frac{(a\text{M} + \lambda)^2}{\text{K}} - \frac{\sigma^2}{\text{K}};$$

$\dfrac{am.am'}{\text{K}}$ et $\dfrac{(a\text{M} + \lambda)^2}{\text{K}}$ sont les ordonnées de deux points de la sécante situés sur l'indicatrice et sur la parabole. Le segment intercepté par ces deux courbes est donc $\dfrac{\sigma^2}{\text{K}}$.

Les coefficients angulaires des différentes tangentes à l'indicatrice en O sont les différentes valeurs de $\dfrac{\lambda(2a\text{M} + \lambda) - \sigma^2}{\text{K}\lambda}$, ou $\left(\dfrac{2a\text{M}}{\text{K}} - \dfrac{\sigma^2}{\text{K}\lambda}\right)$. Je vais montrer que $\dfrac{\sigma^2}{\lambda}$ ne peut être infini, si la droite Δ est quelconque; c'est-à-dire qu'il ne saurait y avoir, dans ce cas, une tangente en O parallèle à l'axe des y.

Dans une conique, dont les axes sont a et b, si une droite Δ fait, avec l'axe b, l'angle φ, le diamètre conjugué de sa direction Δ' fait, avec l'axe a, l'angle χ, tel que l'on ait $\tang\chi = -\dfrac{b^2}{a^2}\tang\varphi$. Si la conique est infiniment aplatie, c'est-à-dire si le rapport $\dfrac{b}{a}$ est infiniment petit et égal à ε, χ est de l'ordre de ε^2, dès que φ est fini. Si D est une droite faisant un angle infiniment petit ψ avec l'axe a, et coupant cet axe en un point d, les droites D et Δ' interceptent sur Δ un segment de l'ordre de $(\psi - \chi)$, si le point d n'est pas infiniment voisin de Δ, ce qui n'arriverait que pour des droites particulières Δ.

Supposons maintenant que D soit la droite-conique d'un système,

et que la conique infiniment aplatie considérée soit une conique du système, voisine de D; le segment dont il vient d'être question est précisément la longueur λ. Donc λ est de l'ordre de $(\psi-\chi)$; d'ailleurs, σ est de l'ordre de ε. Puisque χ est de l'ordre de ε^2, le rapport de σ^2 à λ ne peut être infini que si ψ est du même ordre que χ, et si la différence $(\psi-\chi)$ est d'ordre supérieur, ce qui nécessiterait une direction déterminée pour la droite Δ. Donc, la droite Δ étant quelconque, la droite menée par O parallèlement à l'axe des y n'est pas tangente à l'indicatrice.

On voit, de plus, que le cas où λ est de l'ordre de σ^2 est le seul où l'indicatrice ne soit pas tangente à la parabole. Pour que ce fait se produise, il faut et il suffit que l'angle ψ soit d'un ordre égal ou supérieur à celui de σ^2. On en conclut : *si une droite-conique a pour valeur l'unité, le déplacement angulaire du grand axe, dans les coniques voisines, est d'un ordre égal ou supérieur au second, relativement à l'angle des asymptotes.*

Si λ est de l'ordre de σ, et qu'il n'y ait qu'une branche d'indicatrice au point O, il y a simple contact entre cette courbe et la parabole; la valeur de la droite-conique est 2. C'est le cas où *le déplacement angulaire de l'axe est du même ordre que l'angle des asymptotes.*

Soit λ infiniment petit par rapport à σ, mais d'ordre moindre que 2 relativement à σ, par exemple d'ordre $\left(2-\frac{p}{q}\right)$, $\frac{p}{q}$ étant une fraction irréductible de numérateur impair. σ^2 est alors de l'ordre de $\lambda^{\frac{2}{2-\frac{p}{q}}}$, ou de l'ordre $\frac{2q}{2q-p}$, λ étant censé du premier. Or, d'après une remarque faite à la suite du théorème II, le nombre ρ des segments interceptés entre l'indicatrice et la parabole, qui sont de l'ordre $\frac{2q}{2q-p}$, est tel que $\rho\frac{2q}{2q-p}$ est un nombre entier. Donc ρ est un multiple de $(2q-p)$; et, par suite, la valeur de la droite-conique est égale ou supérieure à $2q$, suivant qu'il n'y aura pas ou qu'il y aura d'autres segments.

Si le numérateur p est pair et égal à $2p'$, on trouvera de même que la valeur de la droite-conique est au moins égale à q.

Dans le premier cas, q est au moins égal à 2, dans le second à 3. Donc la valeur de la droite-conique est toujours supérieure à 2.

Soit maintenant λ infiniment grand par rapport à σ, de façon que σ

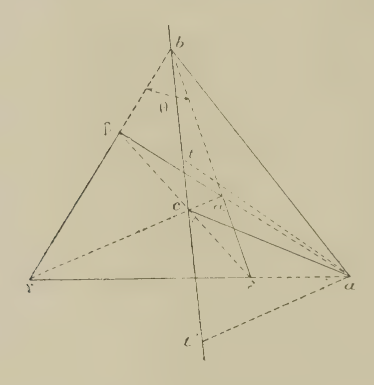
soit de l'ordre $\left(\frac{p}{q}\right)$ $(p>q)$, λ étant du premier, $\frac{p}{q}$ étant irréductible; on voit comme ci-dessus que : 1° si q est impair, la valeur de la droite-conique est au moins $2p$, qui ne peut être moindre que 4; 2° si q est pair, elle est au moins égale à p qui ne peut être moindre que 3.

Les éléments géométriques qui déterminent la valeur d'une droite-conique étant ainsi nettement mis en évidence de la manière la plus générale, il va être facile de trouver le nombre des coniques d'un système qui satisfont à une condition donnée.

Soit un système de coniques A dans le plan. Prenons une conique fixe quelconque Σ. Par les points d'intersection de chaque conique A et de Σ menons les coniques A_1 qui satisfont à une condition donnée. Soit a le nombre des coniques qu'on peut mener par quatre points et satisfaisant à cette condition. Les coniques A_1 forment un système dont chaque conique répond à une conique A coupant Σ aux mêmes points; et à chaque conique A répondent a coniques A_1. Deux pareilles coniques A et A_1 seront dites *correspondantes*. Sur une sécante Δ, deux coniques correspondantes et la conique fixe Σ déterminent une involution, dont deux points, ceux de Σ, sont fixes. Par suite, les indicatrices J, J_1 de ces deux systèmes, relatives à une même droite Δ, sont deux courbes dont les points se correspondent de la manière définie au théorème III. De plus, l'indicatrice J_1, ainsi que l'indicatrice J, ne passe pas au point C, représentatif des deux points de Σ sur Δ. Donc, d'après le théorème III, l'indicatrice J_1 est de degré $a\mu$, puisque J est de degré μ; en second lieu, le nombre des couples de points correspondants confondus sur ces deux courbes est aussi $a\mu$. Si ces $a\mu$ points répondent à des coniques ordinaires A, ils répondent en même temps à des coniques ordinaires A_1 qui se confondent avec leurs correspondantes A. Ce sont des coniques communes aux deux systèmes. Mais il n'en est pas ainsi, en général; et quelques-uns de ces points répondent à des coniques infiniment aplaties. Il faut donc trouver le nombre de ces points, et, en le retranchant de $a\mu$, on aura le nombre des coniques ordinaires du système A qui satisfont à la condition donnée.

Soit $\alpha\beta\gamma\delta$ un quadrilatère (*fig.* 1), a le point de concours des côtés $\alpha\beta$, $\gamma\delta$; b celui des côtés $\beta\gamma$, $\delta\alpha$; et c le point de concours des diagonales $\alpha\gamma$, $\beta\alpha$. A la condition, pour une conique, de passer par

les points α, β, γ, δ, on peut substituer celle de passer en l'un d'eux α, et de toucher en t, t', sur la droite bc, deux droites at, at' formant avec ab et ac un faisceau harmonique. Si l'on cherche les coniques qui passent aux quatre points donnés et satisfont à une condition donnée, cette condition servira à déterminer l'arbitraire qui subsiste dans le couple de droites at, at'.



Si les droites $b\beta$ et $b\alpha$ font un angle infiniment petit θ, les mêmes choses subsistent. Mais, par la nature de la condition considérée, il peut arriver que, parmi les couples de droites at, at' que cette condition détermine, les uns diffèrent du couple $a\alpha$, $a\delta$, les autres en soient infiniment peu différents. Pour qu'une conique ainsi déterminée ne soit pas infiniment aplatie, il faut et il suffit que les droites at, at' fassent respectivement avec les droites $a\alpha$, $a\delta$ des angles infiniment petits du second ordre par rapport aux longueurs $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, ou par rapport à l'angle θ, si l'on suppose le point b à distance finie des côtés du quadrilatère. Le nombre des couples de droites at, at', satisfaisant à cette condition, marquera le nombre des coniques ordinaires passant aux quatre points donnés et satisfaisant à la condition donnée.

Les autres couples de droites at, at' déterminent des coniques infiniment aplaties. Si les droites at, at' font avec $a\alpha$, $a\delta$ respectivement des angles finis, la conique infiniment aplatie correspondante a ses sommets, qui sont infiniment voisins de t et t', à des distances finies des côtés $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ du quadrilatère. Si, au contraire, ces angles sont de l'ordre des longueurs $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, les sommets sont infiniment voisins des

côtés $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ du quadrilatère. Mais il est aisé de voir que ce dernier fait ne se produira que si le quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$ a quelque liaison avec la condition donnée, et non pas s'il est absolument quelconque.

Considérons, en effet, le système des coniques qui satisfont à la condition donnée, ont la droite bc pour polaire du point a et touchent la droite at au point t sur bc. Le point de contact des secondes tangentes menées de a aux coniques de ce système décrit une ligne, et vient en t' quand la conique variable devient infiniment aplatie. Ce point t' est donc déterminé par la condition, le point a, la droite bc, et le point t. Donner ce dernier équivaut à donner le côté $\alpha\beta$ du quadrilatère. Mais, avec ces données, le quadrilatère n'est pas déterminé, et le côté $\gamma\delta$ peut être sur une droite quelconque issue de a. Donc, pour que les droites at, at' fassent, avec les droites $a\alpha$, $a\gamma$, des angles du même ordre que les côtés $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ respectivement, le quadrilatère doit être particularisé; et ce fait ne saurait se produire s'il est absolument quelconque relativement à la condition donnée.

En particulier, si ce quadrilatère est formé par les points d'intersection d'une conique fixe Σ avec une conique infiniment aplatie d'un système A, on voit qu'on peut évidemment choisir la conique Σ de manière à ce que ce fait ne se produise pas.

Ceci établi, soit b le nombre des couples de droites at, at', faisant avec $a\alpha$, $a\gamma$ des angles finis, déterminés par la condition donnée. A chaque conique infiniment aplatie du système A, correspondent $a-b$ coniques ordinaires, et b coniques infiniment aplaties. Puisqu'il n'y a aucune liaison entre le système proposé et la condition donnée, les couples de droites at et at', relatives à deux coniques infiniment aplaties correspondantes, diffèrent. D'ailleurs, la conique Σ étant quelconque, les segments $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ interceptés sur cette conique par une conique infiniment aplatie A sont infiniment petits de l'ordre de l'angle de ses asymptotes; et, en second lieu, les points t et t' de contact des tangentes, issues d'un point a, à la conique infiniment aplatie A_1, étant à distance finie, les mêmes segments sont aussi de l'ordre de l'angle des asymptotes de cette dernière conique. Donc, sur une droite quelconque Δ, deux coniques infiniment aplaties correspondantes A et A_1, déterminent deux segments infiniment voisins et du même ordre, qui est celui de l'angle des asymptotes de A. D'ailleurs, les extrémités de ces segments sont à des distances du même ordre, puisque les sommets des deux coniques infiniment aplaties diffèrent.

Il en résulte aisément que la distance du milieu de ces segments est de l'ordre de leurs carrés.

En effet, dans une conique infiniment aplatie, les polaires de tous les points du plan non infiniment rapprochés du grand axe font entre elles des angles de l'ordre du carré de l'angle des asymptotes. Dans les deux coniques A et A_1, les polaires d'un même point du plan, ou les diamètres conjugués d'une même direction, font donc des angles du second ordre (l'angle des asymptotes de A étant admis être du premier ordre) avec la droite bc qui est, pour toutes deux, la polaire du point a. Les diamètres conjugués d'une même droite Δ, relativement aux deux coniques, font donc entre eux un angle du second ordre relativement aux segments interceptés sur cette droite.

Revenons maintenant à la considération des indicatrices, J et J_1, des deux systèmes A et A_1. Puisque, à chaque conique infiniment aplatie A correspondent b coniques également aplaties A_1, et que la distance des milieux des cordes interceptées par une conique A et une conique A_1 correspondantes sur Δ est de l'ordre du carré de ces cordes, il en résulte qu'à chaque point p de J, infiniment voisin du point O, correspondent b points p_1 de J_1, situés sur la droite Cp, et dont les distances au point p sont de l'ordre du carré de la corde interceptée sur Δ par la conique répondant au point p.

Par suite, la distance de deux pareils points p, p_1 est du même ordre que la distance du point p au point π où la même droite coupe la parabole P, puisqu'on a démontré plus haut que $p\pi$ est de l'ordre du carré de cette corde.

Si l'on mène par C une sécante dont la distance à O soit du premier ordre, comme la droite CO n'est pas tangente à J, la somme des ordres des segments pp_1 terminés par des points correspondants de J et de J_1 sur cette sécante marque, d'après le théorème IV, le nombre des couples de points correspondants confondus en O. Mais chacun de ces segments est de l'ordre d'un segment $p\pi$; et à chacun des segments $p\pi$ répondent b segments pp_1 du même ordre que $p\pi$.

La somme dont il s'agit est donc marquée par celle des ordres des segments $p\pi$ répétée b fois, c'est-à-dire b fois la valeur de la droite-conique répondant au point O.

Par suite, le nombre total des couples de points correspondants confondus, qui répondent à des droites-coniques des deux systèmes, est égal à b fois la somme des valeurs des droites-coniques du pre-

mier système. En désignant cette somme par ω, on a, pour le nombre des coniques ordinaires communes aux deux systèmes $N = a\mu - b\omega$; et, en mettant pour ω sa valeur $(2\mu - \nu)$, on a $N = (a - 2b)\mu + b\nu$. Cette formule exprime le théorème de M. Chasles, qui se trouve ainsi entièrement démontré (*).

DEUXIÈME PARTIE.

I. — Droites-coniques dans les complexes plans de coniques.

Je donne le nom de *complexe* plan de coniques à l'ensemble de ces courbes qui satisfont à des conditions données en nombre inférieur à 4. Le nombre de ces conditions sera *l'ordre* du complexe. Je désignerai habituellement un complexe par une lettre entre parenthèses, affectée d'un indice égal à son ordre. La même lettre, sans parenthèses, désignera une conique de ce complexe. Ainsi C_3 sera une conique appartenant à un complexe du 3me ordre (C_3).

Un complexe du 3me ordre peut, d'une infinité de manières, être formé par une série de systèmes. Tous ces systèmes peuvent contenir des droites-coniques, et quelques-unes d'entre elles peuvent rester les mêmes dans tous les systèmes. Soit D_1 une de ces dernières, et D_2 une droite-conique variant avec le système considéré. Il y a, dans le complexe, un nombre fini de droites telles que D_1, et une série de droites telles que D_2, enveloppant une ligne (D_2). En outre, il peut arriver que quelques-uns des systèmes variables contiennent des droites-coniques de plus. Soit D'_1 une de ces droites. Il y a, dans le complexe, un nombre fini de droites telles que D'_1.

Un complexe du 3me ordre (C_3) peut donc contenir à la fois des droites-coniques isolées ou de 1re *espèce,* telles que D_1 ou D'_1, et des droites-coniques, telles que D_2, enveloppant une ligne, ou *de* 2me *espèce*.

Pour engendrer un même complexe (C_3), on peut choisir les systèmes générateurs de telle manière que les droites-coniques de

(*) Depuis que ces lignes ont été écrites, une démonstration analytique de ce théorème a été donnée par M. Clebsch dans les *Mathematische Annalen*. Je suis, depuis longtemps, en possession d'une démonstration analytique très simple de la même proposition, que j'aurai occasion d'exposer en un autre moment.

1re espèce soient toutes d'un seul type, D_1 ou D'_1, à volonté. Par exemple, le système des coniques C_3 qui passent en un point ne contient aucune des droites-coniques isolées de (C_3), à moins que le point choisi ne soit sur une de ces droites. En le faisant mouvoir sur une ligne continue, on détermine une suite de systèmes qui engendrent (C_3). Dans ce mode de génération, toutes les droites-coniques de 1re espèce de (C_3) appartiennent au type D'_1.

Au contraire, en engendrant le complexe (C_3) par des systèmes de coniques C_3 tangentes à une série de droites, on range toutes ces droites-coniques dans le type D_1, ainsi que je vais le prouver. Si le contraire a lieu, une droite-conique D de 1re espèce de (C_3) n'appartient pas au système des coniques C_3 tangentes à une droite arbitraire. C'est-à-dire que, parmi les coniques C_3 infiniment voisines de D, il n'y en a aucune dont le sommet soit infiniment voisin de la droite arbitraire. Donc chacun des deux sommets de ces coniques est infiniment voisin d'une position limite qu'il atteint quand la conique se réduit à D. On exprime cette propriété en disant que les sommets de la droite-conique D sont déterminés. Soit a l'un de ces sommets. Le système (S) des coniques C_3, tangentes à une droite quelconque L menée par a, contient la droite-conique D. Le système (S') des coniques C_3, tangentes à une droite arbitraire L', ne passant pas en a, ne la contient pas. Soit ν la 2me caractéristique de ce système (S'). Pour qu'il y ait moins de ν coniques de ce système tangentes à une droite L'', il faut que cette dernière passe en un sommet d'une droite-conique de (S'), et cette condition est suffisante. D'autre part, le système (S) a, pour 2me caractéristique, un nombre inférieur à ν. Il y a donc moins de ν coniques C_3 tangentes à L et à L'. Or cela est impossible, puisque la droite L est une droite quelconque menée par a, et que, par suite, elle ne passe pas en un sommet d'une droite-conique du système (S'). L'hypothèse est donc impossible. Donc tous les systèmes tels que (S') contiennent toutes les droites-coniques du complexe.

Comme conséquence de cette propriété, on voit que, sur une droite-conique de 2me espèce, les deux sommets sont déterminés, tandis que, sur une droite-conique de 1re espèce, ces points renferment une arbitraire.

Soit, par exemple, le complexe des coniques tangentes à trois courbes A_1, A_2, A_3. Les tangentes à l'une de ces courbes, A_1, sont des droites-

coniques de 2me espèce, dont les sommets sont sur les deux autres. Les tangentes communes à deux d'entre elles sont des droites-coniques de 1re espèce, dont un sommet est sur la troisième et l'autre arbitraire. Le même complexe contient encore un autre groupe de droites-coniques. Ce sont les droites qui passent par un point d'intersection de deux des trois courbes. Ce sont des droites-coniques de 2me espèce. Parmi ces droites, celles qui sont tangentes à la 3me courbe, tout en appartenant à une série de droites-coniques de 2me espèce, peuvent être considérées comme étant de la 1re espèce, attendu qu'elles ont un sommet indéterminé.

Par des raisonnements analogues, on est conduit à distinguer, dans un complexe du 2me ordre, trois espèces de droites-coniques : la 1re, formée de droites isolées, dont les sommets sont arbitraires; la 2me, formée de droites enveloppant une ligne, et dont les sommets contiennent une arbitraire; la 3me, embrassant toutes les droites du plan; sur chacune de ces droites, les sommets sont déterminés.

Dans un complexe du 1er ordre, on distinguera deux espèces de droites-coniques : la 1re, formée de droites enveloppant une ligne et dont les sommets sont arbitraires; la 2me, embrassant toutes les droites du plan; sur chacune de ces dernières, les sommets contiennent une arbitraire.

Dans la 1re Partie de ce Mémoire (p. 111), on a eu lieu de considérer des conditions telles qu'une droite quelconque du plan, prise pour une conique, y satisfait. Une telle condition définit un complexe du 1er ordre contenant des droites-coniques de 2me espèce. Le nombre b ou β, défini dans l'endroit cité, est précisément le nombre des seconds sommets qui correspondent, sur une de ces droites-coniques, à un premier sommet donné. Ce nombre est nul, si le complexe ne contient que des droites-coniques de 1re espèce. Par exemple, le complexe des coniques normales à une courbe donnée contient la 2me espèce de droites-coniques : un de leurs sommets est sur la courbe donnée, et le nombre β est égal au degré de cette courbe. Le même complexe contient aussi la 1re espèce de droites-coniques; ce sont les normales à la courbe donnée.

Toutes ces circonstances s'expliquent d'elles-mêmes par la remarque suivante : les coniques d'un complexe (C_n), pour lesquelles le rapport des axes est un nombre donné ε, contiennent $(4-n)$ arbitraires. Il y a donc $(4-n)$ arbitraires dans la position d'un de leurs

axes et des sommets de cet axe. Si toutes ces arbitraires subsistent dans la position de cet axe, les sommets y sont déterminés. Si l'axe ne contient que $(3-n)$ arbitraires, les sommets, situés sur un de ces axes, renferment une arbitraire. Si l'axe ne contient que $(2-n)$ arbitraires, les sommets y sont indéterminés. Ces considérations sont applicables au cas où ε est nul, c'est-à-dire quand, au lieu de coniques ordinaires, il s'agit de droites-coniques.

II. — Droites-coniques dans un système commun a deux complexes.

Soient (C_1), (C_3) deux complexes du premier et du troisième ordre. L'ensemble des conditions qui les déterminent équivaut à quatre conditions, en sorte qu'il existe un système de coniques communes à ces deux complexes. Désignons, suivant les notations de M. Chasles, par :

$$N(C_3, 2p) = \rho, \qquad N(C_3, 1p, 1d) = \sigma, \qquad N(C_3, 2d) = \tau,$$

le nombre des coniques du complexe (C_3) qui passent par deux points, ou passent par un point et touchent une droite, ou touchent deux droites. Les caractéristiques des deux systèmes $(C_3, 1p)$ et $(C_3, 1d)$ sont respectivement ρ, σ et σ, τ. Par suite, α et β étant deux nombres ne dépendant que du complexe (C_1), on a :

$$N(C_1, C_3, 1p) = \alpha\rho + \beta\sigma; \qquad N(C_1, C_3, 1d) = \alpha\sigma + \beta\tau.$$

Ces deux nombres sont les caractéristiques μ, ν du système (C_1, C_3) des coniques communes aux deux complexes. Par suite, la valeur totale des droites-coniques de ce système est :

$$2\mu - \nu = \alpha(2\rho - \sigma) + \beta(2\sigma - \tau).$$

Les deux nombres $(2\rho - \sigma)$ et $(2\sigma - \tau)$ sont les valeurs totales des droites-coniques des deux systèmes $(C_3, 1p)$ et $(C_3, 1d)$. Cette égalité exprime ainsi un théorème facile à énoncer.

Les droites-coniques du système (C_1, C_3) ont trois provenances différentes : 1° elles sont de 1re espèce dans (C_3), ce qui exige qu'elles soient en même temps de 2me espèce dans (C_1), si les deux complexes sont entièrement indépendants l'un de l'autre; 2° elles sont de 2me espèce dans (C_3) et de 1re dans (C_1); 3° elles sont de 2me espèce dans les deux complexes.

Si le complexe (C_1) ne contient pas de droites-coniques de 2me espèce, il n'y a, dans le système (C_1, C_3), que des droites-coniques de 2me espèce de (C_3). Dans les deux complexes, les droites-coniques à considérer enveloppent des lignes, en sorte que les droites-coniques du système sont des tangentes communes à ces deux lignes. Dans ce cas, d'après une remarque déjà faite, le nombre β est nul, et la valeur totale des droites-coniques du système (C_1, C_3) est simplement : $\alpha(2\rho - \sigma)$. Cette propriété n'est qu'un cas particulier de la proposition suivante :

Dans un système de coniques commun à deux complexes du 1er *et du* 3me *ordre* (C_1), (C_3), *la valeur totale des droites-coniques provenant des droites-coniques de* 1re *espèce du complexe* (C_1), *est le produit d'un nombre ne dépendant que de ce complexe par la valeur totale des droites-coniques du système* $(C_3, 1p)$; *et, plus généralement, si les droites-coniques de* 1re *espèce du complexe* (C_1) *forment plusieurs séries distinctes, la valeur totale des droites-coniques du système, qui proviennent d'une de ces séries, est de la même forme.*

Je vais démontrer cette importante proposition.

Pour y parvenir, je considérerai une droite-conique du système (C_1, C_3), qui soit de 1re espèce dans (C_1), et je chercherai sa valeur. J'emploierai, à cet effet, le résultat énoncé dans la 1re Partie (p. 107) : Soit D cette droite-conique ; je prendrai, sur une droite arbitraire Δ, un point a, à distance infiniment petite du 1er ordre de D ; je chercherai les coniques infiniment aplaties du système (C_1, C_3) qui interceptent sur Δ des segments dont les milieux soient en a, et je ferai la somme des ordres des carrés de ces segments. Cette somme sera la valeur de la droite conique D dans le système (C_1, C_3).

Considérons d'abord séparément les coniques du complexe (C_3) qui interceptent sur Δ des segments dont les milieux soient en a. Elles forment un système (S), dont les droites-coniques sont les droites-coniques de 2me espèce de (C_3), passant en a, c'est-à-dire les tangentes menées de a à l'enveloppe de ces droites. Considérons l'une de ces tangentes, et soit a' le point où elle coupe une droite Δ' parallèle à Δ. La droite aa' est une droite-conique du système (S). Si l'on prend sur Δ' un point m, il y a un certain nombre de coniques du système (S) qui interceptent sur Δ' des segments dont les milieux

soient en m; et, si m est à une distance infiniment petite du 1[er] ordre de a', un certain nombre de ces coniques sont infiniment aplaties. Soit α l'ordre du carré du segment intercepté par l'une d'elles; la somme des nombres tels que α est, d'après le principe rappelé plus haut, la valeur de la droite-conique aa' dans le système S.

Le point a a été pris à distance infiniment petite du 1[er] ordre de la droite D, qui est une tangente à l'enveloppe des droites-coniques de 2[me] espèce de (C_3). Une des tangentes à cette enveloppe, issues du du point a, fait un angle infiniment petit du 1[er] ordre avec D. Soit aa' cette tangente : les deux points a et a' sont respectivement à distance infiniment petite du 1[er] ordre des points A et A$'$, où D rencontre Δ et Δ'.

Construisons une courbe plane qui représente la liaison existant entre la position du point m sur Δ' et le segment σ intercepté sur la même droite par une conique du système (S), le milieu de ce segment étant en m. Pour cela, prenons $A'm$ et σ^2 pour les coordonnées (x, y) de cette courbe (P). La droite aa' étant une droite-conique du système, l'ordonnée y de la courbe (P) s'annule quand le point m vient en a', c'est-à-dire quand x devient égal à $A'a'$. Ainsi la courbe (P) passe au point de l'axe des x dont l'abscisse est $A'a'$, longueur infiniment petite du 1[er] ordre; et de ce point partent diverses branches de courbe. Pour chacune de ces branches, l'abscisse étant infiniment petite du 1[er] ordre, l'ordonnée est infiniment petite d'un ordre égal à l'un des nombres α.

Prenons une conique dans le système (S), interceptant sur Δ' un segment de milieu m; et considérons les coniques du complexe (C_1) qui la touchent aux extrémités du diamètre am. Ce diamètre est commun à toutes les coniques ainsi construites et à la conique du système (S) considérée. En faisant varier cette dernière, les autres coniques forment un système (S$'$), et chacune d'elles touche, aux extrémités du diamètre mené par a, une conique du système (S). Deux telles coniques seront dites *conjuguées*. Si deux coniques conjuguées interceptent des segments égaux sur Δ', elles coïncident.

En cherchant donc les couples de coniques conjuguées des systèmes (S) et (S$'$) qui interceptent, sur Δ', des segments égaux, on trouvera les coniques du système (C_1, C_3) qui interceptent, sur la droite Δ, des segments dont les milieux sont en a. Pour l'objet que l'on se propose ici, il faut chercher celles de ces coniques qui sont

infiniment aplaties, et faire la somme des ordres des carrés des segments qu'elles interceptent sur Δ, ou sur Δ'.

Pour qu'à une conique du système (S), ayant la droite am pour diamètre conjugué de la direction de Δ, soit conjuguée une conique infiniment aplatie du système (S'), il faut et il suffit que la droite am soit infiniment voisine d'une droite-conique de 1re espèce du complexe (C_1), ainsi qu'il est très aisé de le voir. Par suite, D étant une droite-conique de 1re espèce de ce complexe, quand m est infiniment voisin de A', on a, dans le système (S'), quelques coniques infiniment aplaties. On obtient, dans le même système, une droite-conique, quand le point m vient coïncider avec le point a'', où Δ' est rencontrée par la tangente, infiniment voisine de D, menée de a à l'enveloppe des droites-coniques de 1re espèce de (C_1).

Quand le point m est infiniment voisin de A', à chaque conique (S) infiniment aplatie sont conjuguées des coniques (S') infiniment aplaties. L'une d'elles intercepte sur Δ' un segment σ', dont l'ordre α' ne dépend absolument que du complexe (C_1). La somme des nombres tels que α', multipliée par le nombre des coniques S, ayant am pour diamètre conjugué de la direction de Δ, est la valeur de la droite-conique aa'', dans le système (S').

Construisons, pour le système (S'), comme pour le système (S), une courbe (P') dont les coordonnées (x', y') soient $A'm$ et le carré σ'^2 du segment σ' intercepté sur Δ' par les coniques (S') ayant am pour diamètre conjugué de la direction de Δ.

Cette courbe passe au point de l'axe des x', dont l'abscisse est $A'a''$. De ce point partent diverses branches. Sur une même parallèle à l'axe des y', les points de cette courbe (P') se partagent en autant de groupes qu'il y a de coniques du système (S) correspondant à l'abscisse de cette parallèle. Soit r le nombre de ces groupes, qui n'est autre que la 1re caractéristique du système (S). Si la parallèle à l'axe des y' est à distance du 1er ordre de l'origine, chacun des r groupes de points, où elle coupe (P'), contient un certain nombre de points infiniment voisins de l'origine; et, pour chacun de ce spoints, l'ordonnée est d'un ordre égal à l'un des nombres α'.

Si l'on fait coïncider les axes des deux courbes (P) et (P'), les points de ces courbes qui se correspondent et qui sont confondus à distance infiniment petite de l'origine, répondent aux coniques infiniment aplaties du système (C_1, C_3) qui interceptent sur Δ des segments

dont les milieux sont en a. Nous avons à chercher la somme des ordres des carrés des segments interceptés par ces coniques sur Δ', c'est-à-dire *la somme des ordres des ordonnées des points des courbes* (P) *et* (P') *correspondants qui sont confondus à distance infiniment petite de l'origine.* Pour y parvenir, considérons isolément deux branches correspondantes des deux courbes; soient α et α', les ordres des ordonnées de ces branches pour une abscisse du 1[er] ordre. On voit aisément que, si α est le plus grand de ces deux nombres, le nombre des points d'intersection des deux branches infiniment voisins de l'origine est α', et que l'ordre des ordonnées de chacun d'eux est α. La somme des ordres de leurs ordonnées est donc $\alpha\alpha'$. Par suite, la somme cherchée n'est autre chose que $\Sigma\alpha\Sigma\alpha'$. Telle est la valeur de la droite-conique D dans le système (C_1, C_3).

Considérons maintenant, dans le complexe (C_1) une série continue et indécomposable de droites-coniques de 1[re] espèce, enveloppant une ligne indécomposable de classe K'. Pour chaque droite de cette série, le nombre $\Sigma\alpha'$ reste le même. Désignons-le par A'. De même, considérons dans (C_3) une série indécomposable de droites-coniques de 2[me] espèce, enveloppant une ligne de classe K. Pour chaque droite de cette série, le nombre $\Sigma\alpha$ reste le même. Désignons-le par A. Les deux enveloppes ont $K'K$ tangentes communes. Chacune d'elles est, dans le système (C_1, C_3), une droite-conique dont la valeur est $A'A$. Les deux séries considérées fournissent donc à ce système des droites-coniques ayant pour valeur totale le nombre $A'K'.AK$. Prenons successivement dans (C_3) toutes les séries distinctes de droites-coniques de 2[me] espèce, pour les combiner avec la même série de droites-coniques de (C_1). Nous concluons facilement que la série considérée de droites-coniques de 1[re] espèce de (C_1) fournit au système des droites-coniques ayant pour valeur totale le nombre $A'K'.\Sigma AK$. Prenons, en particulier, pour (C_1) le complexe des coniques passant en un point. Les nombres K' et A' sont faciles à déterminer. Ce sont les nombres 1 et 2. Donc $2\Sigma AK$ est la valeur totale des droites-coniques du système $(C_3, 1\,p)$, ou $(2\rho - \sigma)$. Donc la valeur totale des droites-coniques du système, qui proviennent d'une série de droites-coniques de 1[re] espèce de (C_1) est $\frac{A'K'(2\rho-\sigma)}{2}$, ce qui démontre la proposition énoncée plus haut.

III. — Théorème de M. Cremona.

De même qu'on vient de trouver directement la valeur totale des droites-coniques d'un système (C_1, C_3) qui sont de 1[re] espèce dans le complexe C_1, on peut aussi trouver directement celle des droites-coniques du même système qui sont de 2[me] espèce dans ce complexe. Ce problème ne présente pas de difficultés plus grandes que le précédent; mais je ne m'y arrêterai pas. Je n'ai traité le problème qui fait l'objet principal du précédent Chapitre, que pour en conclure la démonstration du théorème de M. Cremona, dont je vais m'occuper actuellement.

Ainsi qu'on l'a vu plus haut, les caractéristiques du système (C_1, C_3), commun aux deux complexes (C_1), (C_3), sont :

$$\mu = \alpha\rho + \beta\sigma, \qquad \nu = \alpha\sigma + \beta\tau.$$

Si donc on assujettit les coniques de ce système à une autre condition simple, définissant un complexe (C'_1), le nombre des coniques satisfaisant à la question est :

$$N(C_1, C'_1, C_3) = \alpha'\mu + \beta'\nu = \alpha\alpha'\rho + (\alpha\beta' + \alpha'\beta)\sigma + \beta\beta'\tau.$$

Ce nombre s'exprime donc linéairement par les 3 nombres ρ, σ, τ, qu'on peut appeler les *caractéristiques* du complexe (C_3).

Le théorème énoncé par M. Cremona consiste en ce que cette propriété subsiste dans le cas où, au lieu de joindre à la condition triple définissant le complexe C_3 deux conditions simples, on lui joint une condition double indécomposable en deux conditions simples. On peut donc l'énoncer ainsi :

Le nombre des coniques satisfaisant à une condition triple et à une condition double indépendantes est de la forme $\gamma\rho + \delta\sigma + \varepsilon\tau$, *les nombres* ρ, σ, τ *ne dépendant que de la condition triple (ce sont les caractéristiques du complexe défini par cette condition), et les nombres* γ, δ, ε *ne dépendant que de la condition double.*

Ainsi que je l'ai fait observer dans l'Introduction de ce Mémoire, ce théorème est implicitement contenu dans les travaux de M. Chasles. C'est de là que M. Cremona l'a tiré, ainsi qu'il le dit expressément (*Comptes rendus*, t. LIX, p. 776), et il s'est borné à l'énon-

cer explicitement. Je vais actuellement démontrer ce théorème. Cette démonstration se fera aisément en suivant une méthode analogue à celle que j'ai employée pour démontrer, dans la 1re Partie, le théorème de M. Chasles, et en s'appuyant sur la proposition qui a fait l'objet principal du Chapitre précédent.

Soient donnés deux complexes (C_3), (C_2) du 3me et du 2me ordre, dont on cherche le nombre des coniques communes. Il existe une infinité, à une arbitraire, de couples de coniques (C_3), (C_2) de ces deux complexes, dont les 4 points d'intersection sont sur une conique fixe Σ. Ces couples forment deux systèmes de coniques se correspondant une à une, de telle sorte qu'à une conique de l'un des systèmes correspond une seule conique de l'autre, laquelle coupe la conique fixe Σ aux mêmes 4 points. Considérons, pour ces deux systèmes, les indicatrices relatives à une droite arbitraire Δ, ces indicatrices étant les lignes définies dans la 1re Partie (p. 104). Ces deux indicatrices se correspondent *point à point* ; et, suivant une remarque faite plus haut (1re Partie, p. 109), la droite qui joint deux points correspondants passe au point fixe C, représentatif des deux points d'intersection de la droite Δ et de la conique fixe Σ. Les indicatrices ne passent pas en ce point. Donc, d'après le théorème III (1re Partie, p. 103), le degré de ces deux courbes est le même, et marque aussi le nombre des couples de points correspondants de ces deux courbes qui sont confondus. Ce même nombre est la 1re caractéristique de chacun des deux systèmes considérés ; c'est aussi le nombre des couples de coniques correspondantes de ces deux systèmes qui sont confondues. En en retranchant le nombre des couples de points correspondants confondus sur les deux indicatrices, et afférents aux droites-coniques communes aux deux systèmes, on aura donc le nombre cherché des coniques propres communes aux deux complexes (C_2) et (C_3).

En suivant le raisonnement fait dans la 1re Partie, on voit que deux droites-coniques correspondantes confondues ont même valeur dans les deux systèmes; cette valeur commune est, en même temps, le nombre des couples de points correspondants des deux indicatrices confondus, et absorbés par cette droite-conique. On aura donc le nombre total de ces points, en faisant la somme des valeurs des droites-coniques communes aux deux systèmes, considérées dans l'un ou l'autre de ces systèmes à volonté. Je vais chercher cette somme, dans le système engendré par les coniques C_3, satisfaisant à la condition

simple de rencontrer Σ en 4 points tels qu'on y puisse faire passer une conique du complexe (C_2).

En désignant, comme ci-dessus, par ρ, σ, τ, les caractéristiques du complexe (C_3), on a, pour celles du système considéré (S) :

$$\mu = m\rho + n\sigma, \qquad \nu = m\sigma + n\tau,$$

m et n étant deux nombres ne dépendant que de la condition simple qui vient être énoncée, c'est-à-dire ne dépendant que du complexe (C_2). La valeur totale des droites-coniques de ce système est

$$2\mu - \nu = m(2\rho - \sigma) + n(2\sigma - \tau).$$

Mais ce nombre diffère de celui que l'on cherche, attendu qu'il existe, dans le système (S), des droites-coniques n'appartenant pas à l'autre système. Les droites-coniques du complexe du 1er ordre (C_1), défini par la condition simple que les coniques qui le composent coupent Σ en 4 points par où on peut mener une conique du complexe (C_2), contient, en effet, les droites-coniques de (C_2); mais, en outre, la corde de contact de toute conique C_2, bitangente à Σ, est une droite-conique de ce complexe. Ces cordes de contact enveloppent une ligne. Elles forment donc une série distincte de droites-coniques de 1re espèce du complexe de 1er ordre (C_1). On trouvera donc, d'après le théorème du Chapitre précédent, la valeur totale de ces droites-coniques du système (S) ou (C_1, C_3), en multipliant $(2\rho - \sigma)$ par un nombre B, ne dépendant que du complexe (C_1).

Par suite, la valeur totale des droites-coniques communes aux deux systèmes est

$$\omega = 2\mu - \nu - B(2\rho - \sigma).$$

D'ailleurs, μ est le nombre total des couples de points correspondants confondus sur les deux indicatrices. Donc le nombre des coniques communes aux deux complexes est

$$N(C_2, C_3) = \mu - \omega = (2B - m)\rho + (m - n - B)\sigma + n\tau = \gamma\rho + \delta\sigma + \varepsilon\tau,$$

ce qui démontre entièrement le théorème énoncé.

Il est facile de trouver la signification géométrique du nombre B. Prenons, pour le complexe (C_3), celui des coniques qui touchent une conique fixe aux deux points d'intersection de cette conique avec une droite mobile passant en un point fixe. On reconnaît aisément que

les caractéristiques de ce complexe sont : $\rho = \sigma = \tau = 2$. On a donc :

$$N(C_2, C_3) = 2B,$$

c'est-à-dire que $2B$ est la classe de l'enveloppe des cordes de contact des coniques du complexe (C_2) bitangentes à une conique fixe.

Il est bon d'observer que, si le complexe (C_2) ne contient pas de droites-coniques de 3me espèce, c'est-à-dire couvrant le plan, le complexe (C_1) ne contient pas de droites-coniques de 2me espèce, et le nombre n ou ε est nul.

Si, de plus, le complexe (C_2) ne contient que des droites-coniques de 1re espèce, c'est-à-dire isolées, le nombre ω est nul. Dans ce cas, le nombre n étant nul aussi, on en conclut $m = B$, et le nombre $N(C_2, C_3)$ se réduit à $m\rho$, c'est-à-dire que ε et δ sont nuls.

On peut aisément obtenir les expressions des nombres B, m, n en fonction des nombres $N(C_2, 3p)$, $N(C_2, 2p, 1d)$, $N(C_2, 1p, 2d)$, ... en supposant successivement que les complexes (C_3) sont $(3p)$, $(2p, 1d)$, $(1p, 2d)$, et en partant des relations :

$$N(5d) = N(5p) = 1, \qquad N(4p, 1d) = N(4d, 1p) = 2,$$
$$N(3p, 2d) = N(3d, 2p) = 4.$$

On obtient ainsi :

$$N(C_2, 3p) = m + 2n,$$
$$N(C_2, 2p, 1d) = 2m,$$
$$N(C_2, 1p, 2d) = 4B + 2n,$$

d'où l'on peut déduire B, m, n. La première de ces relations exprime que $N(C_2, 3d)$ est égal à $N(C_1, 4p)$; il est aisé d'établir *a priori* cette relation; je ne m'y arrêterai pas.

IV. — Représentation symbolique des théorèmes relatifs a la détermination des coniques sur le plan.

Les caractéristiques d'un système plan de coniques, supposé indéterminé, étant μ, ν, M. Chasles a donné le nom de *module* d'une condition simple à l'expression $\alpha\mu + \beta\nu$, où α et β sont des nombres relatifs à cette condition, et qui représente le nombre des coniques satisfaisant à cette condition et faisant partie du système $(\mu\nu)$.

Je remplace les lettres μ, ν par les lettres p, d, initiales des mots *point*, *droite*.

Le module d'un complexe (C_1), du 1[er] ordre, est donc la forme binaire du 1[er] degré $m_1 = \alpha p + \beta d$; et ce module jouit de la propriété que, si l'on y remplace p et d par $N(C_4, 1p)$, $N(C_4, 1d)$, (C_4) étant un système quelconque, on obtient, par cette substitution, le nombre $N(C_1, C_4)$.

De cette façon, un complexe (C_1) est caractérisé par les deux nombres α, β. On peut désirer d'exprimer ces nombres en fonction de ceux des coniques du complexe (C_1) qui satisfont à 4 conditions élémentaires.

Pour abréger, désignons par le symbole $p^i d^{4-i}$ le nombre des coniques d'un complexe (C_1), qui passent en i points et touchent $(4-i)$ droites; en d'autres termes, posons : $N(C_1, ip, (4-i)d) = p^i d^{4-i}$. On obtient immédiatement les relations suivantes :

$$p^4 = \alpha + 2\beta, \qquad p^3 d = 2\alpha + 4\beta, \qquad p^2 d^2 = 4\alpha + 4\beta,$$
$$pd^3 = 4\alpha + 2\beta, \qquad d^4 = 2\alpha + \beta,$$

d'où l'on conclut qu'il y a toujours, entre les 5 nombres représentés par les symboles $p^i d^{4-i}$, les 3 relations :

$$(1) \qquad p^3 d - 2p^4 = 0, \qquad pd^3 - 2d^4 = 0, \qquad 4p^4 + 4d^4 - 3p^2 d^2 = 0;$$

et que α et β s'expriment linéairement en fonction de ces nombres de la manière suivante :

$$\alpha = \frac{2d^4 - p^4}{3} + \lambda_1(p^3 d - 2p^4) + \lambda_2(pd^3 - 2d^4) + \lambda_3(4p^4 + 4d^4 - 3p^2 d^2),$$

$$\beta = \frac{2p^4 - d^4}{3} + \mu_1(p^3 d - 2p^4) + \mu_2(pd^3 - 2d^4) + \mu_3(4p^4 + 4d^4 - 3p^2 d^2),$$

les lettres λ et μ désignant des arbitraires.

Si l'on porte ces valeurs de α et β dans la relation

$$N(C_1, C_4) = \alpha N(C_4, 1p) + \beta N(C_4, 1d),$$

et qu'on y remplace ces deux nombres $N(C_4, 1p)$, $N(C_4, 1d)$ par A et B, on obtient :

$$N(C_1, C_4) = \left[4u_3 - 2u_1 + \frac{2B - A}{3}\right] p^4$$
$$+ u_1 p^3 d - 3u_3 p^2 d^2 + u_2 pd^3 + \ldots + \left[4u_3 - 2u_2 + \frac{2A - B}{3}\right] d^4,$$

où l'on a posé : $u_1 = \lambda_1 A + \mu_1 B$, $u_2 = \lambda_2 A + \mu_2 B$, $u_3 = \lambda_3 A + \mu_3 B$.

Cette expression contient trois arbitraires u_1, u_2, u_3, dont on peut disposer, par exemple, pour annuler 3 termes à volonté.

En y considérant p et d comme des variables, cette expression est une forme binaire du 4me degré, que je nomme *le module du système* (C_4). On voit que ce module, dont les coefficients ne dépendent que du système (C_4), jouit de cette propriété que si l'on y remplace chaque expression $p^i d^{4-i}$ par le nombre $N[C_1, ip, (4-i)d]$, C_1 étant un complexe du 1er ordre quelconque, le résultat de cette substitution est le nombre $N(C_1, C_4)$.

Si l'on désigne par le symbole $p^i d^{5-i}$ le nombre des coniques qui passent en i points et touchent $5-i$ droites, on obtient le nombre $N(C_4, 1p)$, en augmentant, dans le module m_4 de (C_4), tous les exposants de p d'une unité, c'est-à-dire en multipliant symboliquement m_4 par p. On a donc :

$$N(C_4, 1p) = pm_4;$$

et de même :

$$N(C_4, 1d) = dm_4.$$

Par suite, on a :

$$N(C_1, C_4) = \alpha pm_4 + \beta dm_4$$

ou :

$$N(C_1, C_4) = m_1 m_4,$$

puisque le module m_1 de C_1 est $\alpha p + \beta d$.

Ainsi *le nombre des coniques communes à un système* (C_4) *et à un complexe* (C_1) *du* 1er *ordre est représenté par le produit des modules du système et du complexe, où l'on remplace chaque terme, tel que* $p^i d^{5-i}$, *par le nombre des coniques qui passent en* i *points et touchent* $5-i$ *droites.*

Procédons d'une manière analogue sur le résultat fourni par le théorème de M. Cremona. Représentons par p^2, pd, d^2, les nombres $N(C_3, 2p)$, $N(C_3, 1p, 1d)$ et $N(C_3, 2d)$. On aura :

$$N(C_2, C_3) = \gamma p^2 + \delta pd + \varepsilon d^2,$$

où γ, δ, ε sont des coefficients ne dépendant que de (C_2). En considérant, dans l'expression du second membre, p et d comme des variables, on a une forme binaire du 2me degré, que j'appelle *le module* m_2 *du complexe* (C_2). La propriété de ce module est exprimée par la

relation :

$$N(C_2, C_3) = \gamma N(C_3, 2p) + \delta N(C_3, 1p, 1d) + \varepsilon N(C_3, 2d),$$

qui a lieu, quel que soit le complexe du 3me ordre (C_3).

Soit maintenant représenté par $p^i d^{3-i}$ le nombre des coniques du complexe (C_2) qui passent en i points et touchent $(3-i)$ droites. Si l'on veut exprimer γ, δ, ε par les nombres $p^i d^{3-i}$, on fera varier le complexe (C_3), et l'on obtiendra les relations :

$$\begin{aligned} p^3 &= \gamma + 2\delta + 4\varepsilon, \\ p^2 d &= 2\gamma + 4\delta + 4\varepsilon, \\ pd^2 &= 4\gamma + 4\delta + 2\varepsilon, \\ d^3 &= 4\gamma + 2\delta + \varepsilon, \end{aligned}$$

d'où l'on conclura d'abord qu'il y a toujours, entre les nombres $p^i d^{3-i}$, la relation suivante :

$$(2) \qquad U = 2p^3 - 3p^2 d + 3pd^2 - 2d^3 = 0.$$

On tirera de trois de ces relations les expressions de γ, δ, ε que l'on pourra compléter en ajoutant à chacune d'elles un terme tel que λU, λ étant une arbitraire. Que l'on porte ces valeurs dans la relation :

$$N(C_2, C_3) = \gamma N(C_3, 2p) + \delta N(C_3, 1p, 1d) + \varepsilon N(C_3, 2d);$$

on obtiendra le nombre $N(C_2, C_3)$ sous la forme d'un polynome homogène du 3me degré en p, d, dont les coefficients contiennent une arbitraire, et ne dépendent que du complexe (C_3). Je nomme ce polynome *le module* m_3 *du complexe* (C_3). Ce module jouit de la propriété analogue à celle des précédents.

En conservant les mêmes conventions que ci-dessus, on aura :

$$N(C_3, 2p) = p^2 m_3, \qquad N(C_3, 1p, 1d) = p\,dm_3, \qquad N(C_3, 2d) = d^2 m_3.$$

On en conclut :

$$N(C_2, C_3) = (\gamma p^2 + \delta pd + \varepsilon d^2) m_3 = m_2 m_3.$$

Ainsi *le nombre* $N(C_2, C_3)$ *est représenté par le produit des modules des deux complexes* (C_2), (C_3), *où l'on remplace, après la multiplication, chaque nombre* $p^i d^{5-i}$ *par le nombre des coniques qui passent en* i *points et touchent* $5-i$ *droites.*

On voit la complète analogie de cette proposition avec celle qui est

relative au nombre $N(C_1, C_1)$. Mais, pour compléter cette théorie, il faut chercher quel est le module d'un complexe ou d'un système composé des coniques communes à deux complexes distincts. Soit m_i le module d'un complexe (C_i) d'ordre i, on aura, en général :

$$N[C_i, jp, (5-i-j)d] = p^j d^{5-i-j} m_i.$$

On en conclut que, si $m_{i'}$ est le module d'un autre complexe $(C_{i'})$ dont l'ordre i' est inférieur à $5-i$, on a, en général :

$$N[C_i, C_{i'}, jp, (5-i-i'-j)d] = p^j d^{5-i-i'-j} m_i m_{i'}.$$

Et enfin, si $m_{5-i-i'}$ est le module d'un complexe $(C_{5-i-i'})$, d'ordre $(5-i-i')$, on a :

$$N(C_i, C_{i'}, C_{5-i-i'}) = m_{5-i-i'} m_i m_{i'}.$$

On conclut donc de cette relation que le produit $m_i m_{i'}$ est le module du complexe $(C_i, C_{i'})$. On voit que cette proposition comprend, comme cas particulier, celles relatives au cas où la somme des deux nombres i et i' est égale à 5. Le module $m_i m_{i'}$ devient alors le nombre $N(C_i, C_{5-i})$.

On peut donc enfin résumer toutes les propositions ci-dessus de la manière suivante :

Théorème I. — *Chaque condition, relative à des coniques sur un plan est caractérisée par une forme binaire, de degré égal à la multiplicité de cette condition. Cette forme est appelée* module *de la condition. Ce module jouit de la propriété suivante : si n est son degré, p et d les deux variables qui y entrent, et qu'on y remplace chaque terme tel que $p^i d^{n-i}$ par le nombre des coniques qui passent en i points, touchent $(n-i)$ droites et satisfont à une autre condition, dont la multiplicité est $(5-n)$, le résultat de cette substitution est le nombre des coniques qui satisfont à la fois à la condition proposée et à cette dernière.*

Théorème II. — *Le module d'une condition composée est le produit des modules des conditions composantes.* En particulier, *le produit des modules de plusieurs conditions dont la somme des ordres de multiplicité est égale à 5, représente le nombre des coniques qui satisfont à ces conditions, si l'on y remplace chaque*

terme $p^i d^{5-i}$ par le nombre des coniques qui passent en i points et touchent $(5-i)$ *droites.*

Je terminerai cette deuxième partie en appliquant ces deux derniers théorèmes à quelques exemples, dont j'emprunterai les données à M. Chasles (*Comptes rendus de l'Académie*, t. LIX, p. 345 et suiv.).

1° Soit le complexe (C_3) des *coniques qui touchent une conique fixe en un point fixe et en un point variable.* Le résultat, relatif à ce complexe, donné par M. Chasles (*loc. cit.*, p. 351), est le suivant : (C_2) étant un complexe du 2me ordre, et μ', ν' les caractéristiques du système $(C_2, 2p)$; ν'' la 2me caractéristique du système $(C_2, 1p, 1d)$, on a :

$$N(C_2, C_3) = \frac{1}{4}(2\mu' - \nu') + \frac{1}{2}\nu''.$$

Avec nos notations, ce résultat s'énonce de la manière suivante : Le module m_3 de (C_3) est :

$$m_3 = \frac{1}{4}(2p^3 - p^2 d) + \frac{1}{2}pd^2.$$

2° Complexe (C_2) des coniques bitangentes à une conique fixe (*loc. cit.*, p. 352) :

$$m_2 = \frac{1}{2}(2p^2 - pd) + d^2.$$

3° Complexe (C'_3) des coniques osculatrices à une conique fixe en un point fixe (p. 353) :

$$m'_3 = \frac{1}{4}(3p^2 d - 2p^3) = \frac{1}{4}(3pd^2 - 2d^3) \qquad \text{[en vertu de la relation (2)].}$$

4° Complexe (C'_2) des coniques osculatrices à une conique fixe en un point variable (p. 354) :

$$m'_2 = 3pd.$$

5° Complexe (C''_3) des coniques surosculatrices à une conique fixe en un point variable (p. 356) :

$$m''_3 = \frac{1}{2}(2p^3 - p^2 d) + d^2 p.$$

Si l'on veut avoir les caractéristiques du système (C_2, C'_2) des

coniques bitangentes à une conique fixe et osculatrice à une autre conique fixe, on formera le module $m_2 m'_2$ de ce système ; et les deux caractéristiques seront : $pm_2 m'_2$ et $dm_2 m'_2$.

Le module $m_2 m'_2$ est :

$$m_2 m'_2 = 3pd\left[\frac{1}{2}(2p^2 - pd) + d^2\right] = 3p^3 d - \frac{3}{2}p^2 d^2 + 3pd^3 = 4(p^4 + d^4),$$

en vertu des relations (1). Les deux caractéristiques du système sont : $4(p^5 + d^4 p)$ et $4(p^4 d + d^5)$, ou 12.

On aura de même :

$$N(C_2, C_3) = m_2 m_3 = \frac{1}{2}p\left(p^2 - \frac{1}{2}pd + d^2\right)^2 = p(p^4 + d^4) = 3,$$

$$N(C_2, C'_3) = m_2 m'_3 = \frac{1}{4}\left(p^2 - \frac{1}{2}pd + d^2\right)^2 (3p^2 d - 2p^3) = \frac{1}{4}p^2 d^2 (3d - p) = 2,$$

$$N(C_2, C''_3) = m_2 m''_3 = 2N(C_2, C_3) = 6,$$

$$N(C'_2, C_3) = m'_2 m_3 = 6,$$

$$N(C'_2, C'_3) = m'_2 m'_3 = 6,$$

$$N(C'_2, C''_3) = m'_2 m''_3 = 12.$$

TROISIÈME PARTIE.

I. — Des systèmes de coniques dans l'espace.

Pour déterminer une conique dans l'espace, 8 conditions sont nécessaires. Les coniques qui satisfont à 7 conditions communes forment un *système*. M. Chasles a consacré à l'étude de ces systèmes un travail inséré aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. LXI, p. 389. Il y fait remarquer, tout d'abord, que la perspective plane d'un système de coniques de l'espace est un système plan de coniques. Les deux caractéristiques de ce dernier marquent le nombre des coniques, du système de l'espace, *qui rencontrent une droite* ou *touchent un plan*. Les droites-coniques du système plan sont, les unes, les perspectives des droites-coniques du système de l'espace ; les autres, les perspectives des coniques propres dont le plan passe par l'œil. Le nombre de ces dernières doit encore, d'après M. Chasles, être considéré comme une caractéristique du système de l'espace : c'est la classe de la surface développable enveloppée par les plans des coniques du système. Ce nombre ne marque pas la valeur totale des droites-coniques du système plan qui sont la perspective de ces

coniques de l'espace. Je montrerai, en effet, qu'il en est précisément la moitié. Cette proposition, très simple à établir par l'application des principes posés dans la 1re Partie de ce Mémoire, me permettra de trouver, pour les systèmes de coniques de l'espace, un théorème analogue à celui de M. Chasles relativement aux systèmes plans. Ce théorème est entièrement nouveau; car l'état actuel de la question ressort très clairement des lignes suivantes, empruntées au travail de M. Chasles, cité plus haut : « *En énonçant ici quelques propriétés générales des systèmes de coniques, qui s'expriment par une fonction linéaire des nombres qui caractérisent le système, nous n'entendons pas induire à penser qu'il doit toujours en être ainsi, comme cela a lieu dans la théorie des coniques sur le plan pour les deux nombres que nous avons appelés les* caractéristiques *du système* (¹). »

Cette proposition, que l'illustre créateur de la théorie des caractéristiques n'a pas cru devoir énoncer, est cependant exacte, et l'on peut dire que :

Dans un système de coniques de l'espace, μ étant le nombre de celles qui rencontrent une droite, ν le nombre de celles qui touchent un plan, ρ le nombre de celles dont le plan passe par un point; $\alpha\mu+\beta\nu+\gamma\rho$ est le nombre de celles qui satisfont à une condition indépendante du système, les nombres α, β, γ ne dépendant que de cette condition.

Je vais démontrer, tout d'abord, que, ainsi que je l'ai annoncé plus haut, *dans un système plan, perspective d'un système de l'espace, une droite-conique, perspective d'une conique dont le plan passe par l'œil, a pour valeur le nombre* 2.

Soit Q un plan fixe, O un point dans ce plan, m et m' les points où une conique C du système rencontre le plan Q. Quand la conique C varie, les droites Om et Om' forment deux faisceaux se correspondant, de telle manière qu'à une droite de l'un des faisceaux correspondent μ droites de l'autre. Deux droites correspondantes coïncident : 1° si la conique touche le plan Q; 2° si la conique C se réduit à une droite-conique; 3° si son plan passe au point O. Par conséquent, si ν et ω sont les nombres des coïncidences dues aux

(¹) *Loc. cit.*, p. 394.

deux premiers cas, $2\mu - \nu - \omega$ est celui des coïncidences dues au troisième. Je vais montrer que ce dernier nombre est aussi égal à 2ρ.

Soient, en effet, M et M′ les deux points, en ligne droite avec O, en lesquels rencontre Q une conique C du système dont le plan passe en O. Construisons une courbe plane (A) dont les coordonnées x, y soient les tangentes des angles que font avec cette droite OM deux droites correspondantes Om, Om'. Cette courbe passe à l'origine des coordonnées. Comme, de plus, il n'y a, en outre de la conique C, que $\mu - 2$ coniques du système qui rencontrent OM, chacun des deux axes de coordonnées a deux de ses points d'intersection avec (A) confondus à l'origine. Déterminons les tangentes en ce point. Soit B le point où la droite MM′ touche l'enveloppe des droites mm'. On voit bien aisément que les tangentes x et y des angles que font avec OM deux droites Om, Om', correspondantes et infiniment voisines de OM, OM′, sont liées par la relation : $\frac{x}{y} = \frac{\mathrm{OM'}}{\mathrm{OM}} \frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{BM'}}$. Il en résulte, comme le point est quelconque sur le plan Q, que ce rapport a une valeur quelconque, et que l'origine des coordonnées est un point double de la courbe A, où les tangentes, symétriques par rapport à la bissectrice des axes, font des angles quelconques avec les axes. Par suite, le point O absorbe 2 points d'intersection de la courbe (A) avec la bissectrice des axes. Donc la droite OM compte pour 2 couples de droites correspondantes confondues. Il en est de même des autres droites analogues, passant par les couples de points m, m', appartenant aux $\rho - 1$ autres coniques, dont les plans contiennent le point O. Donc le nombre des coïncidences absorbées par ces droites est égal à 2ρ. On a donc enfin $2\mu - \nu - \omega = 2\rho$.

Cette relation démontre la proposition annoncée. Mais il ne sera pas inutile de donner une autre démonstration, grâce à laquelle on verra plus nettement que ω est bien la valeur totale des droites-coniques du système plan, perspectives de droites-coniques.

Si l'on cherche les coniques du système de l'espace, telles que les deux droites Om, Om', menées du point O aux points d'intersection d'une même conique avec le plan Q, forment un faisceau harmonique avec deux droites On, On', on les trouve par les points d'intersection de la courbe (A) avec une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux axes des x et des y, et dont le centre est sur la bissectrice de ces axes. On a ainsi 2μ points d'intersection des deux

courbes, qui répondent à μ coniques du système. Si l'une des droites On coïncide avec Om, l'hyperbole passe à l'origine des coordonnées, qui compte alors pour 2 points d'intersection des deux lignes. On en conclut donc que la conique C, qui passe aux points M et M', compte pour 1 conique du système satisfaisant à la question. Par suite, si la droite On est donnée infiniment voisine de Om, il existe *une seule* conique du système, qui coupe le plan Q en deux points m et m' infiniment voisins de On.

Faisons la perspective du système, en plaçant l'œil en O. Soient P le plan de la conique C, et D la trace de ce plan sur le tableau. D est la droite-conique, perspective de C. D'après ce qui vient d'être dit, si l'on considère un segment, situé sur la trace du plan Q, et dont une extrémité soit infiniment voisine de D, il y a *une seule* conique du système infiniment aplatie qui divise harmoniquement ce segment. Pour avoir la valeur de la droite-conique D, il faut, d'après les principes posés plus haut (1re Partie, p. 106), placer l'extrémité de ce segment à distance infiniment petite du 1er ordre de D, et chercher quel est l'ordre du carré du segment intercepté par la conique infiniment aplatie. Or x et y étant, comme plus haut, les tangentes des angles que font avec OM les droites Om, Om' correspondantes, on a vu que si ces variables sont infiniment petites, leur rapport est un nombre quelconque. Par suite la conjuguée harmonique d'une droite On' arbitraire du plan Q, par rapport à ces deux droites Om, Om', infiniment voisines de OM, fait, avec OM, un angle du même ordre que x et y. Par suite, dans le système plan, une conique infiniment aplatie, voisine de D, intercepte sur la droite donnée un segment du même ordre que la distance de l'extrémité de cette droite à D. Cette dernière distance étant du 1er ordre, le carré du segment est du 2e ordre; et la droite conique D a le nombre 2 pour valeur. Donc, si ω est la valeur totale des droites-coniques du système plan, perspectives de droites-coniques, la valeur totale de toutes ces droites-coniques est $\omega + 2\rho$. On a donc

$$\nu = 2\mu - 2\rho - \omega.$$

Passons maintenant à la recherche du nombre des coniques d'un système de l'espace, qui satisfont à une condition simple.

Soit Σ une surface du 2me ordre, passant par l'œil O. Pour chaque conique C du système proposé, construisons les a coniques B qui

satisfont à la condition donnée et passent aux quatre points d'intersection de C et de Σ. Nous formons ainsi un second système (B), dont chaque conique correspond à une conique du système proposé (C). Soient L et L′ les deux droites de la surface Σ passant en O. Sur la droite d'intersection du plan de deux coniques B et C correspondantes et du plan des droites L et L′, ces deux coniques et ces deux droites déterminent une involution. Par suite, si l et l' sont les traces des droites L et L′ sur le tableau, les coniques b et c, perspectives des coniques B et C, déterminent avec les points l et l', une involution sur la droite ll'.

Par suite, les indicatrices, relatives à la droite ll', des deux systèmes (c) et (b), perspectives des systèmes (C) et (B) se correspondent de la manière définie au théorème III (1[re] Partie, p. 103). A chaque point de l'indicatrice de (c) correspondent α points de l'indicatrice de (b), situés sur la droite qui joint le premier au point fixe, qui représente les deux points l et l'. De plus, l'indicatrice de (b) passe en ce point fixe. Il existe, en effet, des coniques B situées sur la surface Σ et rencontrant, par conséquent, les deux droites L et L′. Car les plans des coniques C déterminent, par leurs intersections avec Σ, un système de coniques, dont il existe un nombre fini satisfaisant à la condition donnée.

Si donc n est le nombre de ces coniques, l'indicatrice du système (b) a le point fixe pour point multiple d'ordre n. Par suite, d'après le théorème III, le nombre des couples de points correspondants des deux indicatrices, qui sont confondus, est $\alpha\mu + n$, puisque μ est le degré de l'indicatrice du système (c) (1[re] Partie, p. 103). Donc, si l'on retranche de ce nombre, $\alpha\mu+n$, le nombre des couples de points correspondants confondus, afférents aux droites-coniques communes aux deux systèmes, on aura le nombre cherché des coniques propres communes à ces systèmes.

Désignons par b, comme plus haut (p. 111, le nombre des coniques infiniment aplaties satisfaisant à la condition donnée, et passant en quatre points d'un même plan, formant deux couples de points infiniment voisins. Les droites-coniques du système (c) perspectives des droites-coniques du système (C), auront chacune, parmi leurs correspondantes, b coniques infiniment aplaties ; et d'après le raisonnement fait plus haut (p. 112), ces droites-coniques absorberont $b\omega$ coniques communes aux deux systèmes.

En second lieu, à chaque conique du système (C), dont le plan passe par l'œil, correspondent a coniques du système (B), situées dans le même plan. Par suite, les droites-coniques du système (c), perspectives de coniques propres, absorbent $2a\rho$ coniques communes aux deux systèmes.

Donc le nombre des coniques cherchées est : $a\mu + n - b\omega - 2a\rho$. Il s'agit maintenant de déterminer le nombre n, qui est celui des coniques d'une surface du 2e ordre, dont les plans sont tangents à une développable de classe ρ, et qui satisfont à la condition donnée.

Les coniques, qui satisfont à la condition donnée et sont sur une surface du 2e ordre donnée, contiennent *deux* arbitraires. Leurs plans enveloppent donc une surface. Soit c la classe de cette surface. Il y a $c\rho$ plans tangents communs à cette surface et à la développable de classe ρ. Donc le nombre n est égal à $c\rho$.

On a donc enfin, en tenant compte de la valeur de ω et de celle de n pour le nombre N cherché :

$$N = (a - 2b)\mu + b\nu + (2b + c - 2a)\rho = \alpha\mu + \beta\nu + \gamma\rho,$$

ce qui est l'expression du théorème annoncé plus haut.

Il n'est pas sans utilité de remarquer que les nombres α et β sont ici les mêmes que ceux qui figurent dans l'expression $\alpha\mu + \beta\nu$ du nombre des coniques qui satisfont à une condition donnée, et font partie d'un système plan.

II. — Droites-coniques dans les complexes de l'espace.

Pour déterminer une conique dans l'espace, 8 conditions sont nécessaires. Les coniques qui satisfont à 7 conditions données forment un *système;* à 6 conditions, un *complexe du* 6e *ordre;* ...; à n conditions, un *complexe du* n^{me} ordre.

Les coniques d'un complexe d'ordre n contiennent $8 - n$ arbitraires; celles d'entre elles qui ont un axe d'une grandeur donnée contiennent $7 - n$ arbitraires. La grandeur d'un axe étant donnée, on peut, pour définir une conique, considérer la position de l'autre axe et des sommets situés sur cet axe, et le plan de la courbe. Ces éléments contiennent $7 - n$ arbitraires dans un complexe d'ordre n. Il en est de même si la grandeur donnée d'un axe est nulle. Ainsi les droites-coniques d'un complexe d'ordre n contiennent $7 - n$ arbi-

traires dans la définition de leur position, de leurs sommets, et de leur plan.

Dans un complexe du 1er ordre, les coniques qui sont sur un plan y constituent un complexe plan du 1er ordre. Les droites-coniques de 1re espèce de tous les complexes plans analogues seront les droites-coniques de 1re espèce du complexe de l'espace ; et de même celles de 2me espèce des complexes plans seront celles de 2me espèce du complexe de l'espace. On en conclut aisément que les droites-coniques de 1re espèce sont celles où les sommets sont arbitraires, et qui ne contiennent que 4 indéterminées dans leur position et celle de leur plan. Elles coïncident donc avec toute droite de l'espace, et, dans ce cas, le plan de chacune d'elles est déterminé ; ou bien elles forment un complexe de droites (droites assujetties à une condition), et le plan de chacune d'elles est indéterminé. Les droites-coniques de 2me espèce coïncident avec toute droite de l'espace, le plan de chacune d'elles est indéterminé, et ses deux sommets contiennent une arbitraire.

En général, dans un complexe du n^{me} ordre, on distinguera 3 espèces de droites-coniques, de la manièresu ivante : une droite-conique est une figure formée d'une droite terminée à deux extrémités ou sommets, et d'un plan passant par cette droite. Cette figure contient, dans un complexe du n^{me} ordre, $7-n$ arbitraires. La 1re espèce de droites-coniques est celle qui est composée de telles figures où la droite et le plan contiennent seulement $5-n$ arbitraires : les sommets y sont arbitraires. La 2me espèce est composée de figures où la droite et le plan contiennent $6-n$ arbitraires ; les sommets contiennent une arbitraire. Dans la 3me espèce, la droite et le plan contiennent $7-n$ arbitraires, et les sommets sont déterminés.

Dans un complexe du 6me ordre, il n'y a que deux espèces de droites-coniques, la 2me et la 3me. Enfin, pour la régularité des expressions, nous devrons considérer les droites-coniques d'un système comme de 3me espèce.

D'un complexe de coniques, on peut, d'une infinité de manières, déduire d'autres complexes d'ordre moindre qui comprennent le proposé.

Par les points d'intersection d'une conique A et d'une surface du 2me ordre Σ, faisons passer des coniques B. Supposons que la conique A varie dans toute l'étendue d'un complexe (A) d'ordre i ; les co-

niques B engendrent alors un complexe (B), d'ordre $i-1$. Ce dernier a pour droites-coniques celles de (A), et, en outre, les cordes de contact des coniques A bitangentes à Σ. On voit aisément que ces dernières, avec leurs plans, contiennent $6-i$ arbitraires, c'est-à-dire qu'elles forment une suite de droites-coniques de 1re espèce de (B). Dans cette suite sont comprises les droites-coniques de 1re espèce de (A). Les droites-coniques de 2me espèce de (A) forment une autre série distincte de droites-coniques de 1re espèce de (B); enfin les droites-coniques de 3me espèce de (A) forment des droites-coniques de 2me espèce de (B). Ainsi le complexe (B) ne contient pas de droites-coniques au-dessus de la 2me espèce. Si (A) est dans le même cas, (B) ne contient plus de droites-coniques au-dessus de la 1re espèce.

Par les 4 points (σ) d'intersection d'une conique B avec la surface Σ, il ne passe, en général, qu'une conique A. Par suite, les deux points (p), où une conique A rencontre un plan fixe P, sont déterminés d'une seule manière par les points (σ) ou elle coupe la surface Σ. Pour exprimer algébriquement cette dépendance entre les points (p) et les points (σ), remarquons que, les points (σ) étant donnés, la position des points (p) est définie si l'on donne la distance δ du milieu de leur segment au point ou l'intersection du plan des points (σ) et du plan P rencontre une droite fixe du plan P. La distance δ et la condition que les points (p) et (σ) soient sur une même conique déterminent, en effet, d'une seule manière le couple de points (p). Il existe donc, entre δ et les variables définissant la position des points (σ), une relation du 1er degré en δ, c'est-à-dire de la forme $v\delta - u = 0$, v et u étant des fonctions des variables définissant les points (σ). Il est clair qu'on peut supposer que u et v ne sont pas constamment nuls lorsqu'on assigne aux points (σ) toutes les positions compatibles avec le complexe (A); car, si cela était, on pourrait substituer à la relation $v\delta - u = 0$ une autre relation de même forme, où ce fait n'arriverait pas. Si l'on joint à cette relation les $i-1$ relations $\varpi = 0$ qui ont lieu entre les 7 arbitraires définissant la position des points (σ), on a toutes les équations de condition définissant le complexe (A). Les $i-1$ équations telles que $\varpi = 0$ définissent le complexe (B); et, en général, n équations, n'ayant lieu qu'entre les arbitraires des points (σ), définissent un complexe d'ordre n, tel que, par chaque groupe de points (σ), passent une infinité de coniques du complexe. En d'autres termes, ce complexe peut être considéré comme déduit

d'un complexe d'ordre $n+1$, de la même façon que (B) est déduit de (A).

La relation $v\delta - u = 0$ définit un complexe du 1er ordre (K_1), qui contient le complexe du 2me ordre (K_2) défini par les relations $v = 0$, $u = 0$.

Les deux complexes (B) et (K_1), d'ordres $i-1$ et 1, ont en commun le complexe (A) d'ordre i. Mais, en général, ils ont en commun, en outre, un autre complexe du même ordre. Pour que deux coniques B et K_1 coïncident, il faut, comme on le reconnaît immédiatement, qu'elles coïncident avec une conique A, ou qu'elles appartiennent au complexe (K_2). Donc, si le complexe (A) ne comprend pas toutes les coniques communes à (B) et à (K_1,) il faut que les deux complexes (B) et (K_2) aient en commun un complexe d'ordre i, ou d'ordre inférieur. Ce dernier cas ne saurait avoir lieu : il faudrait, en effet, pour qu'il eût lieu, que les deux équations $v = 0$, $u = 0$ rentrassent dans le système des équations $w = 0$, c'est-à-dire que v et u fussent nuls dès que les points (σ) satisfont aux équations $w = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse faite plus haut.

Si la surface Σ est quelconque, il y a effectivement un complexe autre que (A) commun à (B) et à (K_1). Il suffit, pour le prouver, de montrer qu'il existe des coniques communes à ces deux complexes, qui n'appartiennent pas à (A). Or on en obtient en prenant celles qui satisfont aux relations $w = 0$ et $u = 0$, $v = 0$. Donc les complexes (B) et (K_2) ont effectivement en commun un complexe (A′) d'ordre i. C'est-à-dire que les $i+1$ équations $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, ... se réduisent à i équations, qui n'ont lieu qu'entre les coordonnées des points (σ).

Le complexe (A′), défini de cette façon, peut être considéré comme déduit d'un complexe (A_1), de l'ordre $i+1$, de la même manière que (B) est déduit de (A). Par conséquent, (A′) ne contient pas de droites-coniques de 3me espèce. On peut donc énoncer la proposition suivante :

A tout complexe de coniques, d'ordre i, on peut joindre un autre complexe du même ordre ne contenant pas de droites-coniques de 3me espèce, et tel que l'ensemble de ces deux complexes constitue le complexe complet commun à deux complexes séparés du 1er ordre et d'ordre $i-1$.

Mais on peut aller plus loin et déduire, d'une manière analogue, du complexe (A′) un autre complexe du même ordre qui ne contienne de droites-coniques ni de la 3ᵉ, ni de la 2ᵉ espèce.

D'un complexe (C) d'ordre j, on peut déduire un complexe (D) d'ordre $j-2$, qui contienne (C), en imposant aux coniques (D) de rencontrer une surface du 2ᵉ ordre Σ en 3 points par où l'on puisse mener une conique C. Il est très aisé de voir que la plus haute espèce des droites-coniques de (C) est la 1ʳᵉ; c'est-à-dire que chaque droite-conique de ce complexe, avec son plan, ne contient pas plus de $5-(j-2)$ arbitraires.

Par 3 points (σ) d'intersection d'une conique C avec Σ, il ne passe pas, en général, d'autre conique du complexe (C), en sorte que le 4ᵉ point σ_1 est déterminé d'une seule manière par les 3 autres. Ce 4ᵉ point peut être défini par la condition d'être dans le plan des 3 autres et par une coordonnée qui, cette condition remplie, le détermine d'une seule manière. Cette coordonnée sera, si l'on veut, la position du point où la génératrice rectiligne de Σ, passant en σ_1, rencontre une directrice rectiligne fixe de cette surface. Cette coordonnée x sera donc liée aux arbitraires des 3 autres points par une relation telle que $tx-s=0$, où t et s ne contiennent que les coordonnées de 3 points (σ).

Si l'on applique ces résultats au complexe (A_1) on voit que la relation $tx-s=0$, jointe au complexe (D), définit le complexe (A′). Les équations qui définissent le complexe (D) sont $i-1$ équations telles que $z=0$, z ne contenant que les coordonnées de 3 points (σ), situés sur la surface Σ. On conclura, comme plus haut, que le complexe commun à (D) et au complexe (K_1'), défini par $tx-s=0$, se compose du complexe (A′) et d'un complexe (A″) de même ordre i, et défini par les relations $t=0$, $s=0$, $z=0$, ..., au nombre de $i+1$, qui se réduisent à i relations entre les coordonnées de 3 points (σ). Par suite (A″) se déduit d'un complexe d'ordre $i+2$, comme (D) de (C). Donc ce complexe (A″) ne contient pas de droites-coniques de 3ᵉ, ni de 2ᵉ espèce.

On peut représenter cette dépendance des complexes ci-dessus de la manière suivante : (A) et (A′) constituant le complexe complet commun à (B) et (K_1) on écrira

$$(A)+(A')=(B, K_1),$$

et de même

$$(A') + (A'') = (D, K'_1);$$

d'où

$$(A) + (D, K'_1) = (A'') + (B, K_1).$$

En considérant une conique comme un élément de l'espace, ainsi que Plücker l'a fait pour la ligne droite, on peut désigner les coniques, en nombre fini ou infini, communes à deux complexes, comme *l'intersection* de ces complexes. L'ensemble de *toutes* les coniques communes à deux complexes sera dite l'*intersection complète* de ces complexes. Avec ces définitions, la relation ci-dessus peut être énoncée de la manière suivante :

Théorème I. — *A tout complexe de coniques, d'ordre i, on peut joindre l'intersection complète de deux complexes d'ordre* 1 *et $i-1$, tels que l'ensemble de ces deux complexes, d'ordre i, se compose de l'intersection complète de deux complexes d'ordre* 1 *et $i-1$, et d'un autre complexe d'ordre i, ne contenant pas de droites-coniques de* 3e *ni de* 2e *espèce.*

On peut remarquer, d'après la manière dont ce résultat a été obtenu, que (B) ne contient pas de droites-coniques de 3e espèce, et que (D) n'en contient ni de 2e ni de 3e espèce.

A peine est-il besoin d'ajouter que les mêmes propriétés appartiennent aux complexes plans de coniques.

Le théorème que je viens de démontrer va permettre d'établir avec une grande facilité les trois théorèmes, relatifs aux coniques dans l'espace, qui sont les analogues du théorème de M. Cremona pour les coniques dans le plan. On verra sans peine que la même démonstration pourrait s'appliquer à ce dernier. De même aussi on pourrait démontrer les trois théorèmes dont il s'agit par des procédés analogues à celui que j'ai employé, dans la 2e partie, pour démontrer le théorème de M. Cremona. Mais cette démonstration entraînerait à des développements fastidieux, que l'on évite en suivant la marche qui va être exposée.

III. — Coniques communes a deux complexes.

Le théorème démontré au début de cette 3e partie fait connaître le nombre des coniques communes à un système et à un complexe

du 1er ordre, ou *le nombre des intersections* du système et du complexe. Je vais m'occuper maintenant de la recherche de ce même nombre pour deux complexes dont la somme des ordres est égale à 8. Voici l'énoncé du théorème unique qui renferme la solution du problème :

Théorème II. — *Le nombre des coniques d'un complexe d'ordre i, qui appartiennent en même temps à un autre complexe d'ordre $8-i$, est représenté par un polynome homogène, de degré $8-i$, à 3 variables, d, P, p, dont les coefficients dépendent du second complexe seulement, et dans lequel on remplace chaque expression de la forme $d^j \mathrm{P}^k p^{8-i-j-k}$ par le nombre des coniques du premier complexe qui rencontrent j droites, touchent k plans, et dont les plans passent par $8-i-j-k$ points.*

Si, dans cet énoncé, on suppose i égal à 7, le premier complexe est un *système*, et le théorème ne diffère pas de celui qui a été démontré au Chapitre I de cette 3e Partie.

Pour démontrer d'un seul coup ce théorème dans toute sa généralité, nous allons supposer qu'il soit vrai pour une valeur de i, et en conclure son exactitude pour la valeur immédiatement inférieure.

L'hypothèse consiste donc en ce que le nombre des coniques, communes à un complexe (C_{i+1}) d'ordre $i+1$ et à un complexe d'ordre $7-i$, (C_{7-i}), est représenté par une forme ternaire, en d, P, p, de degré $7-i$, dont les coefficients dépendent seulement du complexe (C_{7-i}). Nous désignerons par m_{7-i} cette forme ternaire, que nous appellerons le *module* du complexe (C_{7-i}).

Soit maintenant un complexe d'ordre i, (C_i). Les coniques de ce complexe, qui rencontrent une droite, forment un complexe (E) d'ordre $i+1$. Le nombre des coniques de (E) qui rencontrent j droites, touchent k plans, et dont les plans passent par $7-j-k-i$ points n'est autre que celui des coniques C_i qui rencontrent $j+1$ droites, touchent k plans, et dont les plans passent par $7-j-k-i$ points, ce que nous représentons symboliquement par $(d^{j+1}\mathrm{P}^k p^{7-j-k-i})$. Par suite, le nombre des coniques communes à (E) et à (C_{7-i}) est, d'après l'hypothèse, représenté symboliquement par le produit dm_{7-i}, où l'on doit remplacer chaque expression $(d^j \mathrm{P}^k p^{8-j-k-i})$ par le nombre des coniques C_i, qui rencontrent j

droites, touchent k plans, et dont les plans passent par $8-j-k-i$ points.

De la même façon, le nombre des coniques communes à (C_i), (C_{7-i}), qui touchent un plan est représenté par le produit Pm_{7-i}; et celui de ces coniques dont les plans passent par un point est représenté par pm_{7-i}. Donc les 3 caractéristiques μ, ν, ρ du système des coniques communes à (C_i) et à (C_{7-i}) sont respectivement : dm_{7-i}, Pm_{7-i}, pm_{7-i}. Par suite, d'après le théorème relatif aux systèmes de coniques, le nombre des coniques communes à ce système et à un complexe (C_1) d'ordre 1 est : $(\alpha d+\beta P+\gamma p)m_{7-i}$, les nombres α, β, γ ne dépendant que du complexe (C_1). Or cette expression est une forme de degré $8-i$ en d, P, p, et elle exprime le nombre des coniques communes au complexe (C_i) et au complexe d'ordre $8-i$, *intersection complète* des deux complexes (C_1) et (C_{7-i}). Donc, en premier lieu, *si le théorème est exact pour une valeur de i, il l'est aussi pour la valeur immédiatement inférieure, quand le second complexe est l'intersection complète d'un complexe du* 1er *ordre et d'un autre complexe.*

Examinons maintenant le cas où le second complexe ne satisfait pas à cette dernière condition. Soit donc (C_{8-i}) un complexe quelconque d'ordre $8-i$, dont nous cherchons le nombre des intersections avec (C_i). Prenons une surface du 2e ordre fixe Σ, et considérons les couples de coniques C_i et C_{8-i}, qui se coupent en 4 points sur Σ. On voit immédiatement que ces couples de coniques forment deux systèmes, tels que, par les points d'intersection des coniques de l'un d'eux avec Σ, passe *une* conique *correspondante* de l'autre système.

Les coniques qui coupent Σ en 4 points appartenant à une conique du complexe (C_{8-i}) forment un complexe (C'_{7-i}) d'ordre $7-i$; et l'un des systèmes (S) est celui des coniques communes à (C_i) et à (C'_{7-i}). De même, les coniques qui coupent Σ en 4 points appartenant à une conique du complexe (C_i) forment un complexe (C'_{i-1}) d'ordre $i-1$; et l'autre système (S') est celui qui est commun à (C_{8-i}) et à (C'_{i-1}).

Soit O un point de Σ, et L, L' les droites de la surface qui passent en O. Il n'y a pas de couples de coniques correspondantes des deux systèmes (S) et (S') qui se coupent à la fois sur L et L'. Par conséquent, les seules coniques de l'un ou l'autre de ces systèmes, qui rencontrent à la fois ces deux droites, sont tout entières sur Σ. Cherchons-en le nombre.

Pour qu'une conique d'un complexe (C_n) soit sur une surface du 2me ordre donnée arbitrairement, il faut que l'ordre n de ce complexe soit non supérieur à 3, puisque la condition, pour une conique, d'être située sur une surface du 2me ordre donnée, est une condition quintuple. Le nombre n étant supposé non supérieur à 3, les coniques C_n qui sont sur Σ contiennent $3 - n$ arbitraires ; et il en est de même de leurs plans.

Dans le cas actuel, on voit qu'il ne peut exister sur Σ que des coniques d'un seul des deux complexes (C_i), (C_{8-i}). Car un seul des deux nombres i, $8 - i$ est inférieur à 4. Si i est égal à 4, il n'existe sur Σ des coniques d'aucun des deux complexes. Examinons les cas où i est un des nombres 5, 6, 7.

Si i est égal à 5, les plans des coniques C_i sont arbitraires ; et, dans un plan donné, il y a un nombre fini de ces coniques. Un plan donné est celui qui passe par 3 points ; par suite, ce nombre est représenté par le symbole (p^3). D'autre part, il y a un nombre fini c de coniques du complexe C_{8-i}, dont l'ordre est ici égal à 3, situées sur Σ. Chacune de ces coniques appartient au système S', et correspond aux (p^3) coniques C_i situées dans son plan. Il y a donc cp^3 couples de coniques correspondantes, tels que, dans chaque couple, la conique du système S' rencontre les deux droites L et L'.

Si i est égal à 6, les plans des coniques du complexe (C_i) enveloppent une surface dont la classe est représentée par le symbole (p^2). D'autre part, les plans des coniques C_{8-i} qui sont sur Σ, enveloppent une développable dont soit c' la classe. Il y a $c'p^2$ coniques de S' rencontrant les droites L et L'. Le cas ou i est égal à 7 a déjà été examiné plus haut (Chap. I).

Ainsi, quand i est au moins égal à 4, le nombre des coniques S' rencontrant les droites L et L' est de la forme cp^{8-i}, c étant un nombre qui ne dépend que du complexe (C_{8-i}). Le cas ou $i = 4$ n'est pas excepté ; car le symbole (p^4) est nul.

Faisons maintenant la perspective plane des deux systèmes S et S' en plaçant l'œil en O. Nous obtenons, sur le tableau, deux systèmes S_1, S'_1 de coniques qui se correspondent une à une, de telle sorte que deux coniques correspondantes, perspectives de deux coniques correspondantes de l'espace, déterminent une involution avec les traces des droites L et L' sur la droite qui joint ces deux traces, l, l'. Il y a de plus cp^{8-i} couples de coniques correspondantes des deux

systèmes S_1, S'_1, tels que, dans chaque couple, la conique de S'_1 passe aux points l et l'.

On déduit de là, comme on l'a fait plus haut, que le nombre des coniques communes aux deux systèmes S_1, S'_1 est égal à la 1re caractéristique du système S_1, augmentée de cp^{8-i}, moins la valeur totale des droites-coniques communes aux deux systèmes, laquelle est la même dans chacun de ces systèmes. Si ρ est la 3me caractéristique du système S, 2ρ est la valeur totale des droites-coniques communes aux deux systèmes, et perspectives de coniques propres. Par suite, en appelant μ la 1re caractéristique du même système, et ω la valeur totale des droites-coniques, communes aux deux systèmes et perspectives de droites-coniques, le nombre cherché est égal à $\mu + cp^{8-i} - 2\rho - \omega$.

Supposons maintenant que le complexe (C_{8-i}) ne contienne pas de droites-coniques au-dessus de la 1re espèce : cela signifie que chacune de ces droites-coniques, avec son plan, contient au plus $5-(8-i)$ arbitraires, ou, en d'autres termes, que l'ensemble de cette droite et de son plan satisfait au moins à $8-i$ conditions. D'autre part, le plus grand nombre d'arbitraires que la même figure contient dans le complexe (C_i) est $7-i$. Donc, si les deux complexes n'ont aucune liaison, il n'y a pas de droites-coniques communes aux deux complexes dont les plans coïncident. Par suite, il n'y a pas dans le système (S) de droites-coniques ayant pour correspondante une droite-conique de (C_{8-i}). Donc, dans l'hypothèse où l'on s'est placé, le nombre ω est nul. Le nombre des coniques communes à (C_i) et (C_{8-i}) est alors simplement égal à $\mu + cp^{8-i} - 2\rho$. Or μ et ρ sont deux caractéristiques du système commun à (C_i) et à (C'_{7-i}). Elles sont donc égales à dm'_{7-i} et pm'_{7-i}, m'_{7-i} étant le *module* du complexe (C'_{7-i}). Les coefficients de ce module ne dépendent que du complexe (C_{8-i}). Par suite, le nombre des coniques communes à (C_i) et (C_{8-i}) est exprimé par la formule $(d-2p)m'_{7-i} + cp^{8-i}$, qui vérifie le théorème. Donc, *si le théorème est exact pour une valeur de i, au moins égale à 5, il l'est aussi pour la valeur immédiatement inférieure, quand le second complexe ne contient pas de droites-coniques d'espèce supérieure à la première.*

Si le complexe (C_{8-i}) contient des droites-coniques d'espèce supérieure à la 1re, on sait, d'après le théorème I, page 140 de cette 3e Partie, qu'on peut y joindre un complexe (D, K'_1) intersection

complète de deux complexes dont l'un (K'_1) est du premier ordre, de telle sorte que l'ensemble (C_{8-i}) et (D, K'_1) soit décomposable en une intersection complète (B, K_1) et un complexe (C'_{8-i}) ne contenant pas de droites-coniques d'espèce supérieure à la première. En désignant par N(A, B, ...) le nombre des coniques communes aux complexes (A), (B), ..., on déduit de la relation :

$$(C_{8-i}) + (D, K'_1) = (C'_{8-i}) + (B, K_1),$$

la suivante :

$$N(C_i, C_{8-i}) + N(C_i, D, K'_1) = N(C_i, C'_{8-i}) + N(C_i, B, K_1).$$

D'après les deux théorèmes précédents, les 3 derniers nombres sont exprimés par des formes de degré $8-i$ en d, p, P, dont les coefficients ne dépendent pas de (C_i). Il en est donc de même du premier de ces nombres. Donc le théorème est démontré pour toutes les valeurs de i au moins égales à 4.

Il est bien facile de l'étendre aux autres valeurs de i. Il suffit pour cela de déduire de la relation : $N(C_i, C_{8-i}) = m_{8-i}$, où i est au moins égal à 4, l'expression du même nombre $N(C_i, C_{8-i})$ en fonction des symboles $(d^j P^k p^{i-j-k})$, qui expriment le nombre des coniques de (C_{8-i}), qui rencontrent j droites, touchent k plans, et dont les plans passent par $i-j-k$ points.

Remplaçons, à cet effet, (C_{8-i}) par le complexe $[jd, kP, (i-j-k)p]$, dans la relation : $N(C_i, C_{8-i}) = m_{8-i}$. On en conclura

$$N[C_{8-i}, jd, kP, (i-j-k)p] = d^j P^k p^{i-j-k} m_{8-i},$$

ou

$$(d^j P^k p^{i-j-k}) = d^j P^k p^{i-j-k} m_{8-i},$$

relation dans le second membre de laquelle chaque symbole $d^{j'} P^{k'} p^{8-i'-k'}$ représente le nombre des coniques qui rencontrent j' droites, touchent k' plans, et dont les plans passent par $8-i'-k'$ points. On pourra former autant de relations analogues qu'il y a de manières de choisir les nombres j, k. Comme $i-j-k$ ne peut être supérieur à 3, on peut choisir ces nombres de toutes les manières qui rendent $j+k$ au moins égal à $i-3$ et au plus égal à i, c'est-à-dire de $4i-2$ manières. D'autre part le module m_{8-i} contient $\frac{(9-i)(10-i)}{2}$ termes, si i est 7, 6 ou 5, et un de moins, si i est égal à 4. On reconnaît sans peine que ce nombre des termes de m_{8-i} est inférieur à

$4i-2$, excepté dans le cas où i est égal à 4 : ces deux nombres sont alors égaux. Des $4i-2$ équations, on peut tirer les valeurs des coefficients de m_{8-i} exprimés en fonction linéaire et homogène des symboles $(d^j P^k p^{i-j-k})$. Si, dans la relation $N(C_i, C_{8-i}) = m_{8-i}$, on regarde les symboles $(d^j P^k p^{8-i-j-k})$ comme des coefficients donnés, définissant le complexe (C_i), et qu'on remplace les coefficients de m_{8-i} par les valeurs tirées des $4i-2$ équations, on aura le nombre $N(C_i, C_{8-i})$ exprimé par une fonction linéaire et homogène des symboles $(d^j P^k p^{i-j-k})$, dont les coefficients ne dépendent pas de (C_{8-i}). Donc le théorème est général.

Dès que i surpasse 5, le nombre des équations par lesquelles on détermine les coefficients de m_{8-i} surpasse celui des inconnues. On en conclut, comme pour le cas des coniques dans le plan (deuxième Partie, p. 125), que les nombres $(d^j P^k p^{i-j-k})$ relatifs à un complexe d'ordre $8-i$ quelconque satisfont à certaines relations, grâce auxquelles le module d'un complexe d'ordre i peut être réduit à un nombre de termes inférieur à celui qui est indiqué par son degré i. Mais la même propriété subsiste encore pour des valeurs de i inférieures à 5, ainsi que je vais le montrer.

On a trouvé plus haut que, si i est au moins égal à 4, le nombre des coniques communes à (C_i) et (C_{8-i}) est représenté par $(d-2p)m'_{7-i}+cp^{8-i}$, si (C_{8-i}) ne contient pas de droites-coniques au-dessus de la première espèce. On voit donc que, dans ce cas, le module de (C_{8-i}), qui est précisément égal à cette expression, ne contient pas la puissance $(8-i)^{\text{ième}}$ de P. Mais m'_{7-i} est le module du complexe (C'_{7-i}) qui ne contient pas non plus de droites-coniques au-dessus de la première espèce. Donc la puissance $(7-i)^{\text{ième}}$ de P manque aussi. En raisonnant de même sur (C'_{7-i}), on arrive à cette conclusion : *Le module d'un complexe, d'ordre non supérieur à 4, qui ne contient pas de droites-coniques au-dessus de la première espèce, ne comprend pas de terme en* P.

Toujours dans l'hypothèse $i \geqq 4$, on peut supposer que le complexe (C_i) est un complexe plan. Tous les symboles $(d^j P^k p^{8-i-j-k})$ qui y sont relatifs s'évanouissent si l'exposant de p n'y est pas nul. Par conséquent, les coefficients d'un module m_{8-i}, qui affectent les termes ne contenant pas p, sont les mêmes que leurs analogues dans le module d'un complexe plan satisfaisant aux conditions qui définissent le complexe (C_{8-i}). Il en résulte, en premier lieu, que si $8-i$ est

égal à 2, et que le complexe (C_2) ne contient pas de droites-coniques de troisième espèce, le module m_2 ne contient pas le terme en P^2, attendu que la propriété analogue a été démontrée plus haut (deuxième Partie, p. 124) pour un complexe plan du deuxième ordre. Le même résultat peut d'ailleurs être démontré au moyen de la relation

$$(C_{8-i}) + (D, K'_1) = (C_{8-i}) + (B, K_1),$$

qui s'applique également aux modules des complexes entrant dans cette relation. Les complexes (C'_{8-i}) et (D) ne contiennent pas de droites-coniques au-dessus de la première espèce. Par conséquent, la relation ci-dessus, appliquée aux modules, montre que les termes en P, dans le module de (C_{8-i}) sont : 1° des termes du premier degré venant du module de (K'_1); 2° ceux qui proviennent du produit des modules de (B) et de (K_1). Si (B) ne contient pas de droites-coniques au-dessus de la première espèce, ces derniers termes se réduisent au premier degré. Ce fait se produit si (C_{8-i}) ne contient pas de droites-coniques au-dessus de la deuxième espèce. On peut donc dire que : *Si un complexe d'ordre non supérieur à 4 ne contient pas de droites-coniques au-dessus de la deuxième espèce, son module ne contient pas* P *au-dessus du premier degré.* Et, en appliquant, dans le cas général, ce résultat au complexe (B), on peut dire que : *Le module de tout complexe d'ordre non supérieur à 4 ne contient pas* P *au-dessus du deuxième degré.*

Prenons $i = 5$; le module de (C_{8-i}) ou (C_3) ne contient pas le terme en P^3. Il en est donc de même du module du complexe des coniques touchant 3 plans. Par suite, *le nombre des coniques d'un complexe du cinquième ordre quelconque qui touchent* 3 *plans est lié, par une relation indépendante de ce complexe, aux autres nombres caractéristiques du même complexe.*

De même, si l'on fait $i = 4$, on conclut encore que *les nombres* (P^4), $(P^3 d)$, $(P^3 p)$, *relatifs à un complexe du quatrième ordre quelconque, sont liés par* 3 *relations indépendantes de ce complexe aux autres nombres caractéristiques du même complexe.*

Toutes ces relations sont linéaires et homogènes. Soit $U = 0$ l'une d'elles ; il est clair qu'on peut prendre pour module de (C_{8-i}) son module, qui ne contient pas P au-dessus du deuxième degré, augmenté d'un terme tel que λU, λ étant une constante arbitraire. On peut donc modifier les énoncés ci-dessus, en disant que *les modules des com-*

plexes d'ordre 3 et 4 contiennent les premiers UNE, *les seconds* TROIS *constantes arbitraires, dont on peut disposer de manière à annuler* UN *ou* TROIS *coefficients.*

Il serait facile de former les relations telles que $U = 0$, soit directement, soit par la considération des complexes plans, grâce à laquelle on peut aussi obtenir une nouvelle démonstration de la même proposition. Je ne m'y arrêterai pas.

Au sujet des modules des complexes d'ordre supérieur à 4, la méthode employée pour les former montre que le nombre de leurs coefficients peut être réduit au même nombre que celui des coefficients d'un module de degré complémentaire à 8.

En suivant exactement la méthode employée dans la deuxième Partie, page 126, on démontrera facilement le théorème suivant, qui complète la théorie actuelle :

THÉORÈME III. — *Le module de l'intersection complète de deux complexes est égal au produit des modules de ces complexes; et, en particulier, le nombre des coniques communes à plusieurs complexes dont la somme des ordres est égale à 8, est représenté par le produit des modules de ces complexes, où l'on doit remplacer chaque terme tel que* $d^j P^k p^{8-j-k}$ *par le nombre des coniques qui rencontrent* j *droites, touchent* k *plans, et dont les plans passent par* $(8-j-k)$ *points.*

Je terminerai ce Chapitre en citant quelques exemples des théorèmes qu'il renferme. J'en emprunterai les éléments au Mémoire de M. Chasles dont il a été déjà question au début de cette deuxième Partie.

Outre les conditions simples de rencontrer des droites, toucher des plans, et que les plans des coniques passent par des points donnés, M. Chasles a considéré les conditions multiples suivantes, en regard de chacune desquelles j'écris son module :

Condition double... O_2 de passer par un point donné .... : $m_2 = p(d - 2p)$

Condition triple.... T_3 de toucher un plan en un point donné...... : $m_3 = \frac{1}{2} p P(d - 2p)$

» A_3 de toucher une droite : $m'_3 = p^2(P - 2p)$

Condition quadruple A_4 de toucher une droite en un point donné... : $m_4 = \frac{1}{2} p^2(P - 2p)(d - 2p)$.

On peut vérifier que les caractéristiques des différents systèmes considérés par M. Chasles, et formés avec ces conditions, concordent avec celles qu'on obtiendrait en les calculant au moyen de ces modules. Par exemple, les caractéristiques du système $(5P, O_2)$ sont, d'après M. Chasles, 8, 4, 6.

D'après les théorèmes ci-dessus, elles sont aussi dP^5m_2, P^6m^2 et pP^5m_2; c'est-à-dire

$$\begin{aligned} dP^5m_2 &= d^2P^5p - 2\,dP^5p^2, \\ P^6m_2 &= d\;\;P^6p - 2\;\;P^6p^2, \\ pP^5m_2 &= d\;\;P^5p - 2\;\;P^5p^3. \end{aligned}$$

Or, d'après les valeurs des caractéristiques des systèmes définis par les seules conditions de rencontrer des droites, toucher des plans, ou que les plans des coniques passent par des points, valeurs prises dans le Mémoire de M. Chasles, on a

$$d^2P^5p = 24,\quad dP^5p^2 = 8,\quad dP^6p = 12,\quad P^6p^2 = 4,\quad dP^5p^2 = 8,\quad P^5p^3 = 1;$$

d'où l'on conclut

$$dP^5m_2 = 8,\qquad P^6m_2 = 4,\qquad pP^5m_2 = 6,$$

conformément au résultat de M. Chasles.

On peut faire d'autres vérifications analogues sur la même condition O_2, en considérant les systèmes $(1d, 4P, O_2)$, $(1p, 4P, O_2)$, ...; et de même sur les autres conditions.

M. Chasles a considéré des combinaisons diverses de ces conditions :

1° Condition triple de passer par un point donné et de rencontrer en un second point une droite donnée menée par le point donné. Il est clair que ceci revient à la simultanéité de la condition O_2 et de la condition $(1p)$. Le module est donc égal à pm_2.

2° Condition quadruple de passer par 2 points donnés. Le module est $m_2^2 = (dp - 2p^2)^2 = dp^2(d - 4p)$. La réduction provient de la suppression du terme $4p^4$, qui peut être considéré comme nul.

3° Condition quadruple de toucher un plan en un point donné, et de rencontrer une seconde fois une droite donnée passant par le point donné. Ceci revient à la simultanéité des conditions T_3 et $(1p)$. Le module est donc pm_3 ; etc.

IV. — Détermination du nombre des surfaces du deuxième ordre qui satisfont a des conditions données.

Quand on cherche les coniques propres d'un système qui satisfont à une condition donnée, on est obligé de mettre à part, pour retrancher leur valeur du nombre total, les coniques du système qui sont réduites à une droite. Cette obligation s'impose toutes les fois que la condition donnée est telle qu'elle soit satisfaite par une droite quelconque, considérée comme une conique aplatie. Il n'y a pas lieu de tenir, de même, compte des coniques réduites à un point (ou à deux droites) : la condition pour une conique de se réduire à deux droites est, en effet, une condition simple. Il en résulte qu'une condition qui serait satisfaite par toute conique réduite à deux droites se décomposerait en une condition ne jouissant pas de cette propriété, et la condition de réduction à deux droites.

En général, si, dans un système de courbes, on veut trouver le nombre des courbes propres satisfaisant à une condition, il faudra mettre à part toutes les courbes composées, quand la possibilité de leur décomposition exige plus d'une condition eu égard à la forme générale des courbes du système. La même remarque s'applique aux systèmes de surfaces : ainsi, dans un système de surfaces du deuxième ordre, il faut mettre à part les surfaces réduites à un plan, et les surfaces réduites à une droite (ou à deux plans). Un plan, qui compte comme une surface du deuxième ordre dans un système, sera appelé *plan-quadratique ;* une droite, qui compte de même pour une surface du deuxième ordre dans un système, sera appelée *droite-quadratique*. J'appelle aussi *point-conique*, dans un système de coniques, un point auquel se réduit une conique du système.

Soit (A) un système de surfaces A du deuxième ordre. Les sections des surfaces A par un plan fixe P forment un système (a) de coniques a. L'indicatrice du système (a), relative à une droite Δ du plan P, est l'*indicatrice* du système (A), relative à cette droite. Soient μ le nombre des surfaces A qui passent par un point, ν le nombre des surfaces A qui touchent une droite. Ces nombres sont les caractéristiques du système (a). Les droites-coniques de (a) sont les intersections de P et des plans quadratiques de (A). Soit ω la valeur totale de ces droites-coniques ; on aura la relation :

$$2\mu - \nu = \omega.$$

Le nombre ω est la *valeur totale des plans quadratiques du système* (A).

Dans un système plan de coniques, (a), on a une relation corrélative de cette dernière. Ce sera :

$$2\nu - \mu = \varphi,$$

le nombre φ désignant la *valeur totale des points-coniques* du système. La valeur d'un point-conique se trouvera en transformant corrélativement la proposition de la première Partie (page 106); c'est-à-dire que, *pour trouver la valeur d'un point-conique, il suffit de chercher les coniques d'axes infiniment petits, dont les tangentes issues d'un point arbitraire divisent harmoniquement un angle ayant son sommet en ce point, et dont un côté est à distance infiniment petite du premier ordre du point-conique, et de faire la somme des ordres des carrés des angles de ces tangentes.*

Dans le système (a) dérivé du système (A), les points-coniques proviennent des droites-quadratiques de (A) et des surfaces A tangentes à P. Soit χ la valeur totale des premières, et ρ celle des secondes; on aura :

$$\rho + \chi = 2\nu - \mu.$$

Cherchons pour combien d'unités chaque point-conique de (a) provenant d'une surface A, tangente à P, figure dans le nombre ρ.

Soient donc A une surface tangente à P au point a, et A′ une surface du système, infiniment peu différente de A. Prenons pour infiniment petit du premier ordre la distance des centres de A et de A′. Le plan P fait un angle du premier ordre avec un plan tangent à A′ en un point infiniment voisin de a. Par suite, les tangentes, menées d'un point arbitraire O du plan P à la section a' de A′ par P, font entre elles un angle de l'ordre $\frac{1}{2}$. La conjuguée harmonique L′ d'une droite arbitraire L, menée en O, par rapport à ces tangentes, est à une distance du centre de a' de l'ordre du carré de l'angle de ces tangentes, c'est-à-dire du premier ordre. D'ailleurs a et le centre de a' sont à une distance du premier ordre. Donc L′ est à une distance du premier ordre de a. Donc, d'après la proposition ci-dessus, chaque conique a' entre pour une unité dans la valeur du point-conique a. Il reste à trouver le nombre des coniques a'. En supposant le point O et la droite L à l'infini, les coniques a' sont assujetties à avoir leurs centres sur une

droite donnée, située à distance infiniment petite du premier ordre de a. Or il n'y a qu'une telle conique du système (a) qui soit infiniment peu différente du point-conique a. Donc la valeur du point-conique a est l'unité. Donc *le nombre* ρ *marque précisément le nombre des surfaces* A *tangentes à un plan*. C'est la troisième caractéristique du système (A). Le nombre χ est *la valeur totale des droites-quadratiques* du système.

Cherchons maintenant le nombre des surfaces A qui satisfont à une condition donnée. Soit Σ une surface fixe du deuxième ordre. Par la biquadratique d'intersection de Σ et de chaque surface A, menons les surfaces, au nombre de m, qui satisfont à la condition donnée. Elles forment un second système (A_1), dont chaque surface correspond à une surface A. Les systèmes de coniques, (a) et (a_1), déterminés par les intersections d'un plan P avec les surfaces des systèmes (A) et (A_1) se correspondent de telle manière que deux coniques correspondantes, a et a_1, se coupent entièrement sur une conique fixe. Soit $m-n$ le nombre des surfaces ordinaires, satisfaisant à la condition donnée, qui passent par une biquadratique et qui diffèrent infiniment peu d'une conique : à chaque droite-conique du système (a) correspond n droites-coniques du système (a_1). On en conclut par un raisonnement répété déjà plusieurs fois que le nombre des coniques communes aux deux systèmes est $m\mu - n\omega$. Mais, parmi ces coniques, se trouvent des points-coniques, provenant des droites-quadratiques communes aux deux systèmes (A) et (A_1). Pour trouver le nombre des coniques absorbées par ces points-coniques, nous allons déterminer le nombre des couples de points correspondants des indicatrices de (a) et de (a_1) qui sont confondus en un point représentatif d'un de ces points-coniques.

Relativement à une droite-quadratique, la conjuguée d'une droite quelconque est la droite-quadratique elle-même. Par suite, relativement à une surface infiniment peu différente, les conjuguées de toutes les droites sont infiniment peu différentes entre elles. Parmi ces conjuguées, se trouve un axe de la surface. Si, par cet axe X, on mène un plan arbitraire, la polaire d'un point quelconque de ce plan, relativement à la conique d'intersection, est infiniment peu différente de X. Cette conique est donc infiniment aplatie. Soit ε le rapport infiniment petit des axes de cette conique. On voit facilement que la conjuguée d'une droite quelconque, relativement à la surface consi-

dérée S, diffère de l'axe X d'un infiniment petit de l'ordre de ε^2. De même aussi la section, faite dans S par un plan arbitraire, est une conique dont chaque point, à distance finie de X, est à une distance de l'asymptote voisine de l'ordre de ε^2.

Prenons sur S une biquadratique résultant de son intersection avec une surface du deuxième ordre arbitraire Σ. Par cette biquadratique, nous menons les m surfaces qui satisfont à une condition donnée. Soit S_1 une de ces surfaces. Les sections faites dans S et S_1 par un plan contenant X sont des coniques c, c_1, se coupant en 4 points sur la biquadratique, et la conique c est infiniment aplatie. Si, par la nature de la condition considérée, il y a t coniques c_1 qui sont aussi infiniment aplaties, chacune de ces t coniques a un axe de l'ordre de ε, et la polaire d'un point de son plan, relativement à cette conique, diffère de la polaire du même point, relativement à c, d'un infiniment petit de l'ordre de ε^2. Il y a alors t surfaces S_1 infiniment peu différentes d'une droite-quadratique. Soit S_1 une de ces surfaces. La section faite dans S_1 par un plan arbitraire est une conique dont le centre diffère de celui de la section faite dans S par le même plan d'un infiniment petit de l'ordre de ε^2, et qui, en ses points à distance finie de X, est à une distance de l'ordre de ε^2 de ses asymptotes.

Mais les deux sections ont 4 points communs à distance finie de X. Donc chaque asymptote de l'une est à une distance d'une asymptote de l'autre infiniment petite de l'ordre de ε^2. Donc enfin les deux points où une droite Δ, à distance finie de X, rencontre S sont respectivement à une distance infiniment petite de l'ordre de ε^2 des deux points où cette droite rencontre S_1. Il en est de même des milieux de ces deux couples de points. La distance de ces points milieux est la différence des abscisses des points des indicatrices des deux systèmes (A) et (A_1), relatives à la droite Δ, qui répondent aux surfaces S et S_1. Donc, si le point de l'indicatrice de (A), répondant à S, est à une distance du premier ordre du point de cette indicatrice, répondant à la droite-quadratique infiniment voisine de S, l'ordre de ε^2 marque le nombre des couples de points correspondants, confondus sur les deux indicatrices, absorbés par le couple de surface S et S_1; et chaque surface S fait disparaître t fois ce nombre de surfaces communes aux deux systèmes.

Or il est bien aisé de voir, d'après l'expression donnée plus haut de la valeur d'un point-conique d'un système de coniques, que, si l'on

prend, sur l'indicatrice de (A), un point à distance infiniment petite du premier ordre du point correspondant à une droite-quadratique, et que ε soit le rapport infiniment petit des axes d'une section faite dans la surface correspondante par un plan mené par l'axe de cette surface, l'ordre de ε^2 est le nombre pour lequel cette surface figure dans la valeur totale de cette droite-quadratique. Par suite, la somme des ordres des quantités telles que ε^2 est la valeur totale de cette droite-quadratique. Donc enfin le nombre des surfaces correspondantes des systèmes (A) et (A_1) confondues, qui sont absorbées par une droite-quadratique, est égal à t fois la valeur de cette droite-quadratique. Donc le nombre des surfaces A qui satisfont à la condition donnée est :

$$N = m\mu - \nu\omega - t\chi = (m - 2n - t)\mu + (n - 2t)\nu + t\rho = \alpha\mu + \beta\nu + \gamma\rho.$$

Ainsi se trouve démontré un important théorème, dû à M. Chasles, mais qui n'avait pas encore reçu de démonstration. Son énoncé sera compris dans celui d'un théorème plus général, dont je vais actuellement m'occuper.

Je nomme *complexe du* $n^{\text{ième}}$ *ordre* de surfaces du deuxième ordre l'ensemble de ces surfaces qui satisfont à n conditions. L'ensemble des surfaces communes à deux complexes d'ordre n et n', ou *intersection complète* de ces complexes, est un complexe d'ordre $n+n'$, si ce nombre est inférieur à 8 ; un système, si ce nombre est égal à 8 ; un nombre fini de surfaces, si $n+n'$ est égal à 9. Cette intersection complète peut être décomposable en plusieurs complexes d'ordre $n+n'$, ou en plusieurs systèmes, ou en plusieurs groupes distincts de surfaces.

Une surface du deuxième ordre peut être définie par les points où elle rencontre 5 droites données D_1, D_2, ..., D_5. Si les 8 points d'intersection avec les 4 premières sont donnés, les 2 points d'intersection avec la cinquième font partie d'une involution, en sorte que ces deux points sont déterminés d'une seule manière par une coordonnée, qui sera, si l'on veut, la distance δ de leur milieu à une origine prise sur D_5.

Si la surface considérée fait partie d'un complexe (A) d'ordre $i \geqq 2$, par chaque système de 8 points situés sur les 4 premières droites et sur une surface A, il ne passe pas, en général, d'autre surface du complexe. En sorte que δ est déterminé d'une seule manière par les 8 points. Il existe donc, pour le complexe (A), une relation telle que

$v\delta - u = 0$, où v et u ne contiennent que les coordonnées des points situés sur les 4 premières droites. Cette relation définit un complexe (K_1) du premier ordre.

Les surfaces du deuxième ordre, passant par chaque système de 8 points où chaque surface A rencontre les 4 premières droites, forment un complexe (B) d'ordre $i-1$. On voit facilement que les complexes (B) et le complexe défini par les relations $v=0$, $u=0$, ont en commun un complexe d'ordre i, (A'), défini par des relations où n'entrent que des points des 4 premières droites. Ce complexe (A'), joint au complexe (A), constitue l'intersection complète de (B) et de (K_1). Pour s'en convainere, il n'y a qu'à raisonner exactement comme on l'a fait plus haut (troisième Partie, p. 138). Cette propriété s'exprime par la relation :

$$(A) + (A') = (B, K_1).$$

On trouvera de même un complexe (A''), défini par des relations entre 7 points seulement, et tel qu'en le joignant au complexe (A') on obtiendra l'intersection de deux complexes (B'), (K'_1), ce dernier du premier ordre. Cette propriété s'exprimera par la relation : $(A') + (A'') = (B', K'_1)$. On aura de même :

$$(A'') + (A''') = (B'', K''_1), \qquad \ldots,$$

le complexe (A''') étant défini par des relations entre 6 points. Comme les complexes A, A', ... sont tous d'ordre i, l'opération s'arrêtera lorsqu'on obtiendra un complexe défini par des relations entre i points. Ce dernier complexe est donc (A^{9-i}). Il est formé par les surfaces qui passent en i points donnés, ou plutôt il est composé d'un certain nombre de tels complexes. On aura donc finalement ;

$$(A) = \pm (A^{9-i}) + (B, K_1) - (B', K'_1) + (B'', K''_1) \ldots.$$

Cette relation montre que l'on pourra trouver le nombre des surfaces communes à (A) et à un complexe donné d'ordre $9-i$, si l'on sait le faire pour le complexe (A^{9-i}) et les complexes (B, K_1), (B', K'_1), etc.

Cela posé, nous allons démontrer que :

Théorème. — *Le nombre des surfaces du deuxième ordre d'un complexe d'ordre i, qui appartiennent en même temps à un autre*

complexe d'ordre $9-i$, *est représenté par un polynome homogène, de degré* $9-i$ *à* 3 *variables*, p, d, P, *dont les coefficients dépendent du second complexe seulement, et dans lequel on remplace chaque expression de la forme* $p^j d^k \mathrm{P}^{9-j-k-i}$ *par le nombre des surfaces du deuxième ordre du premier complexe, qui passent en* j *points, touchent* k *droites et* $9-j-k-i$ *plans.*

Si, dans cet énoncé, on fait $i=8$, on a le théorème sur les systèmes, démontré plus haut.

L'exactitude de ce théorème est évidente si le complexe d'ordre $9-i$ se compose des surfaces qui passent en $9-i$ points. Le polynome de degré $9-i$ se réduit à p^{9-i}.

Admettons l'exactitude du théorème pour une valeur de i. Le nombre des surfaces communes à un complexe d'ordre i et à un complexe (C_{9-i}), d'ordre $9-i$ est représenté par un polynome de degré $9-i$ ou *module* du complexe (C_{9-i}). Soit m_{9-i} ce module. Considérons un complexe d'ordre $i-1$, (C_{i-1}). Les complexes (C_{9-i}) et (C_{i-1}) ont en commun un système, dont on reconnaît facilement que les caractéristiques sont : pm_{9-i}, dm_{9-i}, $\mathrm{P}m_{9-i}$. Par suite, d'après le théorème sur les systèmes, le nombre des surfaces de ce système, qui appartiennent à un complexe du premier ordre (K_1), est de la forme : $(\alpha p+\beta d+\gamma \mathrm{P})m_{9-i}$, qui est un polynome homogène de degré $10-i$. Donc, si le théorème est vrai pour une valeur de i, il l'est aussi pour la valeur immédiatement inférieure, quand le second complexe est l'intersection complète d'un complexe du premier ordre et d'un autre complexe.

Or un complexe quelconque a été réduit à une suite de complexes du même ordre, satisfaisant à cette dernière condition, et à un complexe de surfaces passant en des points fixes. Donc, dans le cas général, si le théorème est exact pour une valeur de i, il l'est aussi pour la valeur immédiatement inférieure. Or, il est vrai pour $i=8$; donc il est entièrement démontré.

A peine est-il besoin d'ajouter que, de même que pour les complexes de coniques, les modules des complexes d'ordre supérieur à 4 peuvent être réduits au même nombre de termes que ceux des complexes d'ordre complémentaire à 9.

En suivant la méthode employée plus haut, on démontrera facilement que :

THÉORÈME IV. — *Le module de l'intersection complète de deux complexes est égal au produit des modules de ces complexes;* et, en particulier, *le nombre des surfaces du deuxième ordre communes à plusieurs complexes, dont la somme des ordres est égale à 9, est représenté par le produit des modules de ces complexes, où l'on remplace chaque terme tel que* $p^j d^k P^{9-j-k}$ *par le nombre des surfaces du deuxième ordre qui passent en* j *points, et touchent* k *droites et* $9-j-k$ *plans.*

On peut facilement obtenir des vérifications de cette théorie au moyen des caractéristiques des systèmes de surfaces du deuxième ordre considérés par M. Chasles (*Comptes rendus*, t. LXII, p. 405). Dans une étude ultérieure, j'aurai occasion de revenir sur les applications des principes posés dans le travail actuel, et de donner à ce sujet les développements convenables.

Il me sera permis, en terminant ce Mémoire, de faire une remarque sur les complexes de surfaces du deuxième ordre. De telles surfaces, étant considérées comme éléments de l'espace, donnent lieu à des complexes de différents ordres, comme les points donnent lieu à des lignes et à des surfaces. Le nombre des intersections de trois surfaces ou d'une ligne et d'une surface est le produit des degrés; il en est de même du degré de la ligne d'intersection de deux surfaces.

De même, dans les complexes considérés, le nombre des intersections est figuré par le produit des modules des complexes, ou bien le module d'un complexe intersection de deux autres est le produit des modules de ces derniers. Et il faut bien remarquer que, si l'on ne veut pas mettre à part les surfaces singulières, plans et droites-quadratiques, tous les modules se réduisent à un seul terme, et ce ne sont plus des produits symboliques, mais de véritables produits que l'on a à considérer.

Les mêmes observations s'appliquent aux complexes de coniques. Je suis même en mesure d'affirmer que des propriétés analogues existent pour les complexes de courbes planes et de surfaces de degrés quelconques.

NOTE

RELATIVE A UNE COMMUNICATION

SUR LES COURBES GAUCHES ALGÉBRIQUES.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 76, 1873 (I), p. 558.

Dans une Note *Sur la classification des courbes du sixième ordre dans l'espace*, insérée aux *Comptes rendus*, séance du 17 février 1873, p. 424, M. Weyr démontre les deux théorèmes suivants :

1° *Le nombre des points doubles apparents d'une courbe gauche du sixième degré est au moins six;*

2° *Une courbe du sixième ordre située sur une surface du second ordre a six, sept ou dix points doubles apparents.*

J'ai l'honneur de faire observer que ces deux théorèmes sont compris dans deux des propositions démontrées dans un Mémoire que j'ai présenté à l'Académie, le 21 février 1870, et énoncées dans l'extrait de ce Mémoire inséré aux *Comptes rendus*, t. 70, p. 380.

SUR LES CARACTÉRISTIQUES,

DANS

LA THÉORIE DES CONIQUES,

SUR LE PLAN ET DANS L'ESPACE,

ET DES SURFACES DU SECOND ORDRE.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 76, 1873 (I), p. 1074.

D'après un théorème bien connu, le nombre des surfaces du second ordre, faisant partie d'un système, et qui satisfont à une condition donnée, est représenté par $\alpha\mu + \beta\nu + \gamma\rho$, les *coefficients* α, β, γ ne dépendant que de la condition, et les nombres μ, ν, ρ étant les *caractéristiques* du système, M. Chasles a appelé *module* de la condition cette expression $\alpha\mu + \beta\nu + \gamma\rho$, où les caractéristiques μ, ν, ρ sont censées indéterminées, et a donné (*Comptes rendus*, t. LXII, p. 405) une formule remarquable où le nombre des surfaces qui satisfont à neuf conditions est exprimé en fonction des coefficients α, β, γ des modules de ces conditions.

Il est facile de montrer, soit directement, soit par cette formule même, que le nombre qu'elle représente peut être mis symboliquement sous la forme d'un produit de facteurs. Ces facteurs seront les modules des conditions où l'on remplacera μ, ν, ρ respectivement par p, d, P. Que l'on fasse le produit des neuf facteurs tels que $\alpha p + \beta d + \gamma \mathrm{P}$, et que l'on convienne de remplacer, dans ce produit, chaque symbole $(p^i d^j \mathrm{P}^{9-i-j})$ par le nombre des surfaces qui passent en i points, touchent j droites et $(9-i-j)$ plans, on obtiendra précisément la formule dont il s'agit.

L'emploi des mêmes symboles permet de réunir toutes les proposi-

tions de la théorie des caractéristiques dans les coniques et les surfaces du second ordre de la manière suivante :

1° Coniques dans le plan. — Théorème I. — *Pour les coniques dans le plan, toute condition multiple d'ordre π peut être caractérisée par un polynome homogène et de degré π, à deux variables p, d, nommé module. Si l'on remplace, dans ce polynome, chaque symbole $(p^i d^{\pi-i})$ par le nombre des coniques qui passent en i points, touchent $\pi - i$ droites et satisfont à une autre condition multiple, d'ordre $5-\pi$, le résultat de cette substitution est le nombre des coniques qui satisfont à ces deux conditions multiples.*

On doit remarquer que, si π dépasse 2, les coefficients du module renferment des arbitraires, grâce auxquelles on peut réduire ce module à trois termes si π est égal à 3, et à deux termes si π est égal à 4.

Théorème II. — *Le module d'une condition composée est le produit des modules des conditions composantes.* Et, en particulier, *le nombre des coniques qui satisfont à des conditions, dont la somme des ordres de multiplicité est égale à 5, est représenté par le produit symbolique des modules de ces conditions, dans lequel chaque symbole $(p^i d^{5-i})$ est remplacé par le nombre des coniques qui passent en i points et touchent $5-i$ droites.*

Exemple : Soit la condition double *de toucher deux fois une conique*. Le module de cette condition est (Chasles, *Comptes rendus*, t. LIX, p. 352) :

$$m_2 = \frac{1}{2}(2p^2 - pd) + d^2.$$

Soit aussi la condition triple de *surosculer une conique*. Le module de cette condition est (Chasles, *loc. cit.*, p. 356)

$$m_3 = \frac{1}{2}(2p^3 - p^2 d) + pd^2.$$

Le nombre des coniques qui satisfont à ces deux conditions est

$$m_2 m_3 = p^5 - p^4 d + \frac{9}{4} p^3 d^2 - p^2 d^3 + pd^4 = 6,$$

à cause des relations

$$p^5 = 1, \qquad p^4 d = pd^4 = 2, \qquad p^3 d^2 = p^2 d^3 = 4.$$

2° Surfaces de second ordre. — Théorème III. — *Toute condition multiple d'ordre* π *peut être caractérisée par un polynome homogène et de degré* π *à trois variables* p, d, P, *nommé* module. *Si l'on remplace dans ce polynome chaque symbole* $(p^i d^j \mathrm{P}^{(\pi-i-j)})$ *par le nombre des surfaces qui passent en i points, touchent j droites et* $(\pi - i - j)$ *plans, et satisfont à une autre condition multiple d'ordre* $(9 - \pi)$, *le résultat de cette substitution est le nombre des surfaces qui satisfont à ces deux conditions multiples.*

On doit remarquer que, si π dépasse 4, les coefficients du module renferment des arbitraires, grâce auxquelles on peut le réduire au même nombre de termes que le module de degré $(9 - \pi)$.

Théorème IV. — *Le module d'une condition composée est le produit des modules des conditions composantes.* Et, en particulier, *le nombre des surfaces qui satisfont à des conditions, dont la somme des ordres de multiplicité est égale à* 9, *est représenté par le produit symbolique des modules de ces conditions, dans lequel chaque symbole* $(p^i d^j \mathrm{P}^{9-i-j})$ *est remplacé par le nombre des surfaces qui passent en i points, touchent j droites et* $(9 - i - j)$ *plans.*

Les quatre théorèmes précédents ne sont nouveaux que par la forme; les deux suivants, relatifs aux coniques dans l'espace, le sont aussi quant au fond. Je me borne ici à les énoncer.

3° Coniques dans l'espace. — Théorème V. — *Toute condition multiple d'ordre* π *peut être caractérisée par un polynome homogène et de degré* π, *à* 3 *variables*, d, P, p, *nommé* module. *Si l'on remplace, dans ce polynome, chaque symbole* $(d^i \mathrm{P}^j p^{\pi-i-j})$ *par le nombre des coniques qui rencontrent i droites, qui touchent j plans, et dont le plan passe par* $(\pi - i - j)$ *points, et qui satisfont, en outre, à une condition multiple d'ordre* $(8 - \pi)$, *le résultat de la substitution est le nombre des coniques qui satisfont aux deux conditions multiples considérées.*

On doit remarquer, en premier lieu, que si π dépasse 4, les coefficients du module renferment des arbitraires, grâce auxquelles on peut le réduire au même nombre de termes qu'un polynome homogène et de degré $(8 - \pi)$, à 3 variables; et, en second lieu, que chaque symbole, où l'exposant de p dépasse le nombre 3, est nul.

THÉORÈME VI. — *Le module d'une condition composée est le produit des modules des conditions composantes. Et, en particulier, le nombre des coniques qui satisfont à des conditions, dont la somme des ordres de multiplicité est égale à 8, est représenté par le produit symbolique des modules de ces conditions, dans lequel chaque symbole* $(d^i P^j p^{8-i-j})$ *est remplacé par le nombre des coniques qui rencontrent i droites, touchent j plans, et dont le plan passe par* $(8-i-j)$ *points.*

La valeur des différents symboles tels que $(d^i P^j p^{8-i-j})$ a été calculée par M. Chasles (*Comptes rendus*, t. LXI, p, 389). On peut par conséquent, déduire du théorème précédent une formule qui donne le nombre des coniques satisfaisant à 8 conditions, en fonction des coefficients des modules de ces conditions.

Si l'on considère la condition de toucher une surface, on reconnaît que le module de cette condition est simplement $Md + mP$, M étant la classe des sections planes de cette surface, et m son degré. On en conclura le nombre des coniques qui touchent 8 surfaces données. En particulier, si les 8 surfaces sont du second ordre, le nombre cherché sera représenté symboliquement par $2^8(d+P)^8$.

Les modules des diverses conditions élémentaires considérées par M. Chasles (*loco citato*) sont faciles à calculer, et fournissent des vérifications faciles des nombres rapportés par cet auteur.

Ainsi la condition de *passer par un point* a pour module $(dp-2p^2)$; celle de *toucher un plan en un point*, $pP(\frac{1}{2}d-p)$; celle de *toucher une droite*, $p^2(P-2p)$; celle de *toucher une droite en un point donné*, $\frac{1}{2}p^2(P-2p)(d-p)$; etc.

SUR UN PROBLÈME DE PROBABILITÉS.

Bulletin de la Société mathématique, t. I, 1872-1873, p. 221.

Une tige se brise en n morceaux; quelle est la probabilité que ces n morceaux soient propres à former un polygone fermé?

Le cas le plus simple de ce problème, celui où le nombre n est égal à 3, a été traité par M. Lemoine, qui a trouvé $\frac{1}{4}$ pour la probabilité demandée.

Chaque événement possible est caractérisé par les longueurs x_1 $x_2, \ldots, x_{n-1}, a-(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})$, des n morceaux dans lesquels se sépare la tige A de longueur a. On fait l'hypothèse que ces morceaux peuvent acquérir toutes les longueurs de o à a, et que la probabilité de chaque événement est la même; c'est-à-dire que la probabilité de l'événement $[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, a-(x_1+\ldots+x_{n-1})]$ est indépendante de $x_1, \ldots, x_{n-1}$.

Prenons une autre tige B de même longueur a, supposons que $n-1$ points s'y placent *au hasard*, et qu'on la brise en ces $n-1$ points. La probabilité d'obtenir de cette façon n morceaux donnés, et *disposés dans un ordre donné sur la tige*, est évidemment indépendante des longueurs de ces morceaux et de leur ordre. Car ce n'est pas autre chose que la probabilité que les $n-1$ points se placent en $n-1$ positions données sur la tige. Or cette probabilité ne dépend pas de ces positions, puisque les points se placent au hasard. Par suite, la probabilité d'obtenir, avec la tige B, n morceaux donnés, *indépendamment de leur ordre sur cette tige*, est égale à $1.2.3\ldots n$ fois cette dernière probabilité; c'est-à-dire qu'elle est constante. D'ailleurs, sur la tige B, les morceaux peuvent acquérir toutes les longueurs de o à a. Donc la probabilité de chaque événement $[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, a-(x_1+\ldots+x_{n-1})]$ est la même avec les tiges A et B.

Pour que les n morceaux d'une tige soient propres à former un polygone, il faut et il suffit que chacun d'eux soit inférieur à la moitié de la tige. Il sera plus simple de considérer l'événement opposé, et de chercher la probabilité pour qu'un morceau soit supérieur à la moitié de la tige, condition qui ne peut être réalisée que par un seul morceau à la fois.

Il est clair que cette probabilité est la même pour les tiges A et B.

Supposons maintenant $n-1$ autres tiges $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$, sur chacune desquelles $n-1$ points se placent de la façon suivante. Quand, sur la tige B, les morceaux sont, en tenant compte de leur ordre, à partir d'une extrémité déterminée, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ils seront les mêmes sur les autres tiges, mais dans l'ordre suivant à partir d'une extrémité déterminée sur chaque tige; sur B_2 : $x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1$; sur B_3 : $x_3, x_4, \ldots, x_n, x_1, x_2$; sur B_i : $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_{i-1}$; etc. On voit immédiatement que, sur chacune de ces tiges, considérée isolément, les $n-1$ points se placent au hasard. Par suite, pour chacune de ces tiges, la probabilité de l'événement dont il s'agit est la même que pour B et A.

Chaque fois qu'un des morceaux est plus grand que $\frac{a}{2}$, il y a une des tiges $B, B_1, \ldots, B_{n-1}$ et une seule, sur laquelle le morceau ayant l'origine pour extrémité est supérieur à $\frac{a}{2}$. Par suite, la probabilité cherchée est égale à n fois celle que, *sur une tige* B, *où* $n-1$ *points se placent au hasard, le segment qui contient une extrémité donnée soit supérieur à la moitié de la tige.* Pour que cet événement se produise, il faut et il suffit que les $n-1$ points se placent dans la moitié de la tige contenant l'autre extrémité. Pour qu'un point donné s'y place, la probabilité est $\frac{1}{2}$. Pour qu'ils s'y placent tous, la probabilité est $\frac{1}{2^{n-1}}$.

La probabilité cherchée est donc $\frac{n}{2^{n-1}}$, et celle de l'événement opposé, qui fait l'objet du problème proposé, est $1-\frac{n}{2^{n-1}}$.

Le même problème peut être également résolu par un calcul assez simple.

L'hypothèse est que la probabilité de l'événement $[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, a-(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})]$ est indépendante de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$.

Elle est donc de la forme

$$\frac{dx_1\,dx_2\ldots dx_{n-1}}{A},$$

A étant une constante que nous allons déterminer.

Posons

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{n-1} &= S_{n-1}, \\ x_1+x_2+\ldots+x_{n-2} &= S_{n-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots, \\ x_1+x_2 &= S_2. \end{aligned}$$

$x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}$ étant donnés, x_{n-1} peut varier dans toute l'étendue des valeurs qui rendent $x_n = a - S_{n-1}$ positif, c'est-à-dire de o à $a - S_{n-2}$; de même, $x_1, x_2, \ldots, x_{n-3}$ étant donnés, x_{n-2} peut varier de o à $a - S_{n-3}$; etc. En sorte que l'on aura tous les cas possibles en faisant varier : x_{n-1} de o à S_{n-2}, x_{n-2} de o à $a - S_{n-3} \ldots, x_2$ de o à $a - x_1$, et x_1 de o à a. Tous les cas seront répétés $1.2.3\ldots n$ fois. Par suite, si l'on intègre la différentielle ci-dessus entre ces limites, on aura la probabilité totale de tous les événements possibles, c'est-à-dire *l'unité*, répétée $1.2.3\ldots n$ fois.

On a d'ailleurs :

$$\int_0^a dx_1 \int_0^{a-x_1} dx_2 \int_0^{a-S_2} dx_3 \ldots \times \int_0^{a-S_{n-3}} dx_{n-2} \int_0^{a-S_{n-1}} dx_{n-1} = \frac{a^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}.$$

Par suite,

$$A = \frac{a^{n-1}}{1.2.3\ldots n.1.2.3\ldots(n-1)}.$$

Pour chercher la probabilité d'un événement défini par des limites spéciales attribuées aux variables, on intégrera la différentielle $dx_1\,dx_2\ldots dx_{n-1}$ entre les limites convenables. Soit X cette intégrale. Si, par le procédé suivi, chaque cas est répété M fois, la probabilité cherchée sera $\frac{X}{MA}$.

Si l'on demande la probabilité qu'un morceau soit supérieur à $\frac{a}{2}$, on fera varier $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_2$ entre les mêmes limites que précédemment, et x_1 de $\frac{a}{2}$ à a. Chaque événement est alors répété

1.2.3 ... $(n-1)$ fois. Donc la probabilité cherchée est

$$\frac{X}{1.2.3\ldots(n-1)A} = \frac{1.2\ldots n}{a^{n-1}}X.$$

Mais on a ici :

$$X = \int_{\frac{a}{2}}^{a} dx_1 \int_0^{a-x_1} dx_2 \int_0^{a-S_2} dx_3 \ldots \int_0^{a-S_{n-2}} dx_{n-1}$$

$$= \int_{\frac{a}{2}}^{a} dx_1 \frac{(a-x_1)^{n-2}}{1.2.3\ldots(n-2)}$$

$$= \frac{a^{n-1}}{2^{n-1}\,1.2.3\ldots(n-1)}.$$

La probabilité cherchée est donc $\frac{n}{2^{n-1}}$, ainsi qu'on l'a trouvé précédemment.

APPLICATIONS NOUVELLES

D'UNE

PROPOSITION SUR LES CONGRUENCES DE DROITES.

Bulletin de la Société mathématique, t. I, 1872-1873, p. 253.

Les droites de l'espace qui satisfont à deux conditions forment une *congruence*. Le nombre de ces droites qui passent par un point donné est l'*ordre* de la congruence, le nombre de celles qui sont dans un plan donné en est la *classe*. Rappelons que les droites d'une congruence sont tangentes à deux surfaces (ou à deux nappes d'une même surface), qui peuvent se réduire à des lignes. On les désigne ordinairement par surfaces ou lignes *focales* de la congruence. On peut aussi désigner leur ensemble par le nom de *focale* de la congruence.

J'ai démontré (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXIV, 2 janvier 1872), que : *Le nombre des droites communes à deux congruences est égal au produit des ordres de ces congruences augmenté du produit de leurs classes.* Je me propose de donner ici trois applications nouvelles de ce théorème.

I. — Détermination du nombre des tétraèdres qui satisfont a certaines conditions.

Un tétraèdre est déterminé de grandeur et de position si chacune de ses arêtes est assujettie à deux conditions, c'est-à-dire fait partie d'une congruence donnée. Je vais montrer que le nombre des tétraèdres ainsi déterminés s'exprime en fonction des ordres et des classes des six congruences auxquelles appartiennent les six arêtes.

Désignons les arêtes du tétraèdre par les numéros de 1 à 6 et par

p_i, P_i l'ordre et la classe de la congrunce C_i dont fait partie l'arête (i). Désignons par $[C_1 C_2 C_3 C_4 C_5 C_6]$ le nombre des tétraèdres dont les arêtes font partie des congruences $C_1, C_2, \ldots, C_6$, et représentons par (p) la congruence des droites qui passent en un point, par (P) celles des droites qui sont dans un plan.

Si l'on assujettit simplement les cinq premières arêtes à faire partie des cinq congruences $C_1, \ldots, C_5$, l'arête (6) engendre une congruence dont l'ordre et la classe sont respectivement $[C_1 C_2 C_3 C_4 C_5 (p)]$ et $[C_1 C_2 C_3 C_4 C_5 (P)]$. Par suite, si l'arête (6) doit en outre faire partie de la congruence C_6, on obtiendra le nombre de ses positions, ou le nombre des solutions du problème, en additionnant les deux nombres précédents multipliés respectivement par p_6, et P_6. C'est la conséquence immédiate du théorème rappelé plus haut. On a donc cette relation :

$$[C_1 C_2 C_3 C_4 C_5 C_6] = p_6 [C_1 C_2 C_3 C_4 C_5 (p)] + P_6 [C_1 C_2 C_3 C_4 C_5 (P)].$$

On aura de même :

$$[C_1 C_2 C_3 C_4 C_5 (p)] = p_5 [C_1 C_2 C_3 C_4 (p)(p)] + P_5 [C_1 C_2 C_3 C_4 (P)(p)], \quad \ldots.$$

On conclut immédiatement de là que le nombre cherché se compose d'une somme de termes, dont chacun est le produit des ordres de n congruences $C_i, C_{i'}, \ldots$ par les classes des $(6-n)$ autres congruences $C_j, C_{j'}, \ldots$, multiplié par un coefficient qui est le nombre des tétraèdres dont les arêtes (i), (i'), ... passent par des points, et les arêtes (j), (j'), ... sont dans des plans donnés.

Le problème sera donc résolu si l'on connaît le nombre des solutions des différents problèmes particuliers, dans lesquels les six arêtes du tétraèdre sont assujettis à passer par des points ou à être dans des plans. Or il est facile de reconnaître que tous ces problèmes n'admettent qu'une solution, à l'exception de celui où trois arêtes d'une même face passent par des points et les trois autres sont dans des plans donnés. Ce dernier problème admet deux solutions.

Par conséquent, dans l'expression du nombre cherché, tous les coefficients sont égaux à l'unité, à l'exception des coefficients des termes qui contiennent les ordres des trois congruences auxquelles appartiennent trois arêtes d'une même face et les classes des trois autres.

Si 1, 2, 3 sont les arêtes d'une même face, et 4, 5, 6 les arêtes op-

posées à 1, 2, 3, on reconnaît aisément que les termes dont il s'agit sont :

$$p_1 P_4 p_2 P_5 p_3 P_6, \quad p_1 P_4 p_5 P_2 p_6 P_3, \quad p_4 P_1 p_5 P_2 p_3 P_6, \quad p_4 P_1 p_2 P_5 p_6 P_3.$$

En désignant par S la somme de ces termes, on aura pour le nombre cherché N :

$$N = (p_1 + P_1)(p_2 + P_2)(p_3 + P_3)(p_4 + P_4)(p_5 + P_5)(p_6 + P_6) + S.$$

Si, par exemple, chaque arête est assujettie à rencontrer deux droites, les ordres et les classes sont l'unité, et l'on a : $N = 2^6 + 4 = 68$.

II. — Surface trajectoire du sommet d'un angle constant.

Un angle droit se meut de manière que l'un de ses côtés A engendre une congruence C et l'autre A', une congruence C'. Quel est le lieu de son sommet ?

Ce lieu est une surface dont le degré s'exprime en fonction des ordres et des classes des congruences C et C'.

Si le côté A seul est assujetti à faire partie de la congruence C, et que le sommet se meuve sur une droite, le côté A' engendre une congruence, dont l'ordre et la classe sont respectivement $P + 2p$ et p, p et P étant l'ordre et la classe de la congruence C. Si l'on assujettit, en outre, le côté A' à faire partie de la congruence C', dont p' et P' sont l'ordre et la classe, le nombre de solutions sera, d'après le théorème rappelé plus haut :

$$p'(P + 2p) + P'p = p'P + pP' + 2pp'.$$

Par suite, si l'on assujettit les côtés A et A' à faire partie respectivement des congruences C et C', sans donner de condition pour le sommet, ce point décrit une surface dont le degré est ce dernier nombre.

On reconnaît aisément que cette surface coupe le plan de l'infini : 1° suivant le cercle commun à toutes les sphères, qui y est multiple d'ordre pp' ; 2° suivant les P droites de la congruence C, qui y sont multiples d'ordre p' ; et suivant les P' droites de la congruence C', qui y sont multiples d'ordre p.

Si une portion de la focale d'une des congruences C, se réduit à une ligne et que, en chaque point de cette ligne, les droites de la

congruence forment un cône de degré μ, cette ligne fait partie de la surface et y est multiple d'ordre $\mu p'$.

On remarquera que tous ces nombres doivent être doublés, si, au lieu d'un angle droit, on considère un angle constant quelconque.

III. — Détermination d'un trièdre trirectangle.

Un trièdre trirectangle est déterminé de position si chacune de ses arêtes fait partie d'une congruence donnée. Soient p_1, P_1; p_2, P_2; p_3, P_3 les ordres et les classes des trois congruences. Par un raisonnement analogue aux précédents, on trouve que le nombre des solutions est :

$$\begin{aligned} &a p_1 p_2 p_3 + b(p_1 p_2 P_3 + p_2 p_3 P_1 + p_3 p_1 P_2) \\ &\quad + c(p_2 P_3 P_1 + p_3 P_1 P_2 + p_1 P_2 P_3) + d P_1 P_2 P_3. \end{aligned}$$

Les coefficients a, b, c, d sont les nombres des trièdres trirectangles dont les arêtes passent par des points ou sont dans des plans, en sorte que les congruences à considérer pour obtenir ces coefficients sont, pour a, 3 points; pour b, 2 points et 1 plan; pour c, 1 point et 2 plans; pour d, 3 plans. D'après cela, on reconnaît facilement que les coefficients sont tous égaux à 2; de sorte que le nombre des trièdres est : $2(p_1+P_1)(p_2+P_2)(p_3+P_3)$.

Si chaque arête doit rencontrer deux droites, le nombre devient 2^4 ou 16.

RECHERCHES DE GÉOMÉTRIE A n DIMENSIONS.

Bulletin de la Société mathématique, t. II, 1873, p. 34.

I. Si une surface contient un point multiple d'ordre inférieur d'une unité à son degré, les droites issues de ce point la rencontrent en un seul autre point. A cause de cette propriété M. Cayley a donné à une telle surface le nom de *monoïde*. Ce géomètre a montré que la considération des monoïdes pouvait être très utile pour la classification des courbes gauches ; il en a déduit la classification des courbes du troisième, quatrième et cinquième degré (*Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. LIV, p. 55, 396, 672 et t. LVIII, p, 994). M. Ed. Weyr en a déduit la classification des courbes du sixième degré (*ibid.*, t. LXVI). J'ai fait aussi usage de ces surfaces dans un Mémoire sur la théorie des courbes gauches, présenté à l'Académie en 1870.

En supposant le point multiple à l'infini sur l'axe Oz, on obtient l'équation d'une surface monoïde de degré p, sous la forme $vz - u = 0$, où u et v sont des polynomes en x et y, de degrés p et $p-1$. Je me propose ici de développer quelques considérations au sujet d'équations analogues entre des variables en nombre supérieur à trois. Pour faciliter le langage je demanderai qu'il me soit permis d'employer une expression que je vais indiquer. Le nombre des variables étant n, ou, si l'on veut, dans un espace à n dimensions, je nommerai *complexe d'ordre* i l'ensemble des systèmes de valeurs des variables, ou l'ensemble des points, qui satisfont à i conditions ; et *intersection de deux complexes* d'ordres i et i', le complexe d'ordre $i+i'$ défini par la simultanéité des conditions qui définissent les premiers complexes. Si $i+i'$ est égal à n, l'intersection se réduit à un nombre fini de points. Le *degré* d'un complexe du premier ordre est le degré de l'équation qui le définit. Le *degré* d'un complexe d'ordre i est le nombre de ses

intersections avec le complexe défini par $n-i$ équations du premier degré, qui, d'après cette définition même, est un complexe d'ordre $n-i$, du premier degré. On peut conserver l'expression de *degré* d'un complexe d'ordre i quand i est égal au nombre n des variables. C'est alors le nombre de points que ce complexe représente.

De même que l'intersection complète de deux surfaces peut se décomposer en plusieurs courbes distinctes, de même aussi l'intersection complète de deux complexes peut se décomposer en plusieurs complexes distincts. En sorte qu'un complexe d'ordre i peut ne pas être représenté seul par i équations quelconques entre les n variables. Mais s'il s'agit d'un complexe, intersection complète de i complexes du premier ordre, il est clair que son degré est égal au produit des degrés de ceux-ci. Dans cet ordre d'idées, les variables étant x_1, x_2, ..., x_n, l'équation $vx_n-u=0$, où u et v sont des polynomes de degrés p et $p-1$ ne contenant pas x_n, représente un complexe de premier ordre, de degré p, que l'on peut appeler *monoïde*.

Ces définitions établies, je vais étendre à un espace à n dimensions un théorème que j'ai démontré dans un autre travail (même *Bulletin*, t. I, p. 133) et relatif aux intersections des courbes planes. Voici ce théorème :

Théorème I. — *Le nombre des intersections de deux courbes réunies en un point O est égal à la somme des ordres des segments infiniment petits interceptés par les deux courbes sur une sécante arbitraire dont la distance au point O est infiniment petite du premier ordre.*

Je vais d'abord donner à ce théorème une autre forme. Soient $f(x,y)=0$ l'équation d'une courbe, et ξ, η, ξ_1, η_1 les coordonnées de deux points M, M_1 du plan, par où l'on mène deux sécantes parallèles, rencontrant respectivement la courbe aux points m, m', ... et m_1, m'_1, ... On sait qu'on a

$$\frac{\mathrm{M}m.\mathrm{M}m'\ldots}{\mathrm{M}_1m_1.\mathrm{M}_1m'_1\ldots}=\frac{f(\xi,\eta)}{f(\xi_1,\eta_1)};$$

en sorte que si l'on suppose fixé le point M_1 et la direction de la sécante, le produit $\mathrm{M}m.\mathrm{M}m'$ ..., pour un point arbitraire M, est proportionnel à $f(\xi,\eta)$.

Soit maintenant une autre courbe $\varphi=0$, rencontrant la courbe f

en un point O, où les deux courbes peuvent avoir des branches multiples quelconques, ayant entre elles des contacts quelconques. Plaçons le point M sur une des branches de φ, à distance infiniment petite du premier ordre de O. La quantité $f(\xi, \eta)$ est infiniment petite, et son ordre est égal à la somme des ordres des segments interceptés à partir de M, sur une sécante arbitraire, par la courbe f. Si l'on place successivement le point M, de la même manière, sur les différentes branches de la courbe φ, la somme des ordres des quantités $f(\xi, \eta)$ sera celle des ordres des segments interceptés par les deux courbes sur une sécante à distance infiniment petite du premier ordre de O. Donc :

Théorème II. — *Le nombre des intersections des deux courbes* $f(x,y)=0$, $\varphi(x,y)=0$, *confondues en un point* O, *est égal à la somme des ordres des quantités* $f(x,y)$, *quand le point* (x,y) *est placé successivement sur les différentes branches de la courbe* $\varphi=0$, *à distance infiniment petite du premier ordre du point* O.

Soit maintenant un complexe du premier ordre à n variables $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$, et cherchons la signification de l'expression $f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, quand $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sont les coordonnées d'un point quelconque. Par ce point menons arbitrairement $n-2$ complexes du premier ordre et du premier degré, qu'on peut réduire à ne contenir chacun que 3 coordonnées :

$$(1) \qquad \begin{cases} x_3-\xi_3 = A_3(x_1-\xi_1)+B_3(x_2-\xi_2), \\ x_4-\xi_4 = A_4(x_1-\xi_1)+B_4(x_2-\xi_2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n-\xi_n = A_n(x_1-\xi_1)+B_n(x_2-\xi_2). \end{cases}$$

En substituant les valeurs de $x_3, \ldots, x_n$, tirées de ces formules, dans $f(x_1, \ldots, x_n)=0$, on obtient une relation entre x_1 et x_2 : $F(x_1, x_2)=0$. Mais, si l'on fait $x_1=\xi_1$ et $x_2=\xi_2$, les équations (1) montrent que l'on a aussi

$$x_3=\xi_3, \qquad \ldots, \qquad x_n=\xi_n.$$

Donc $F(\xi_1, \xi_2)$ n'est autre chose que $f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$.

Soit maintenant un autre complexe du premier ordre

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0.$$

Supposons que l'intersection de $f=0$ et de $\varphi=0$ se décompose en plusieurs complexes distincts du deuxième ordre. Si l'on coupe les deux complexes $f=0$ et $\varphi=0$ par $n-2$ complexes simultanés du premier ordre et du premier degré, on détermine comme ci-dessus, dans chacun de ces deux complexes, une courbe plane. Les intersections de ces deux courbes $F(x_1, x_2)=0$, $\Phi(x_1, x_2)=0$ sont les intersections du complexe ($f=0$, $\varphi=0$) avec les $n-2$ complexes simultanés du premier degré. Si le complexe $f=0$, $\varphi=0$ se décompose, ces intersections se décomposent en plusieurs groupes qu'on obtiendra par des équations distinctes. Soit m le nombre des points contenus dans un de ces groupes, supposé irréductible. Prenons un de ces points O. Le nombre des intersections qu'il absorbe est égal, d'après le théorème II, à la somme des ordres de $F(x_1, x_2)$, quand on place successivement le point (x_1, x_2) sur les différentes branches de Φ, à distance infiniment petite du premier ordre de O. Les m points tels que O absorberont ensemble m fois ce nombre d'intersections. Comme $F(x_1, x_2)$ n'est autre chose que $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, on en conclut aisément :

Théorème III. — *Si l'intersection de deux complexes du premier ordre, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$, $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$, se décompose en plusieurs complexes distincts du deuxième ordre, soit O un point pris arbitrairement sur l'un de ces derniers complexes. On place le point $(x_1, \ldots, x_n)$ à distance infiniment petite du premier ordre du point O, successivement sur les différentes nappes de $\varphi=0$, et l'on fait la somme des ordres des quantités $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Cette somme, multipliée par le degré du complexe du deuxième ordre considéré, marque le nombre des unités pour lequel ce complexe compte dans le degré total de l'intersection complète de $f=0$ et de $\varphi=0$.*

Soit $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$ l'équation d'un autre complexe passant par ce même complexe du deuxième ordre A, et supposons que le rapport $\frac{f}{f_1}$ reste fini quand le point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se place sur A, quelle que soit la nappe de φ qu'il parcourt pour y parvenir. Il en résulte que f et f_1 sont du même ordre quand ce point est à une distance infiniment petite du premier ordre de A sur une quelconque des nappes de φ. Donc le complexe A compte pour le même nombre

d'unités dans le degré de l'intersection de f_1 et de φ, que dans celui de f et de φ.

Je vais m'occuper maintenant de la représentation d'un complexe d'ordre supérieur à l'unité. Dans un complexe d'ordre i, pour les points situés à l'infini, les rapports des coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ à l'une d'elles sont liés par i relations. Si l'on considère ces rapports $\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}$ comme de nouvelles variables $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$, ces i relations définissent un complexe d'ordre i à $n-1$ dimensions. Ce complexe peut être décomposable. Il peut aussi arriver que dans ce complexe, ou dans une de ses parties, quelques-unes des coordonnées $\xi_1, \xi_2, \ldots$ soient constamment nulles ou constamment infinies. Mais, par un simple changement des coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on peut faire disparaître ce cas particulier. Pour ce changement de coordonnées, on emploiera les formules

$$\begin{aligned}
x'_1 &= a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + a_1^3 x_3 + \ldots + a_1^n x_n + a_1^{n+1},\\
x'_2 &= a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + a_2^3 x_3 + \ldots + a_2^n x_n + a_2^{n+1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
x'_n &= a_n^1 x_1 + a_n^2 x_2 + a_n^3 x_3 + \ldots + a_n^n x_n + a_n^{n+1}.
\end{aligned}$$

Si l'on suppose tous les coefficients a_i^l quelconques, toutes les nouvelles coordonnées $x'_1, x'_2, \ldots$ sont infinies et du même ordre, dès qu'une des anciennes coordonnées $x_1, x_2, \ldots$ est infinie. Par suite, les i relations qui lient les rapports $\frac{x'_1}{x'_n}, \frac{x'_2}{x'_n}, \ldots, \frac{x'_{n-1}}{x'_n}$ ne sont pas telles que quelques-uns de ces rapports soient constamment nuls ou constamment infinis.

Soient $C=0$, $C_1=0$ deux complexes du premier ordre. L'élimination de x_n entre ces deux équations conduit à $D=0$. On peut aussi, d'une infinité de manières, tirer des deux équations données une équation de la forme $vx_n - u = 0$, où v et x ne contiennent pas x_n. Le complexe du deuxième ordre ($C=0$, $C_1=0$) se décompose ou ne se décompose pas, suivant que D est ou n'est pas décomposable en facteurs. Soit $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ un facteur irréductible de D; les équations

$$(1) \qquad \varphi = 0, \qquad vx_n - u = 0$$

définissent un complexe du deuxième ordre irréductible, attendu que la seconde de ces équations donne une seule valeur de x_n pour

chaque système de valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ satisfaisant à $\varphi = 0$. Ce n'est pas à dire pour cela que le complexe considéré soit l'intersection complète des deux complexes (1). On va voir, en effet, que cette intersection se compose, en outre, du complexe ($\varphi = 0$, $v = 0$).

Supposons que, pour les valeurs infinies des coordonnées des points du complexe, aucun des rapports $\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}$ ne soit constamment nul ni infini, ce qui ne restreint pas la généralité du raisonnement, ainsi qu'on vient de le montrer. Supposons, en outre, que le complexe des points dont les coordonnées sont ces rapports mêmes, soit indécomposable. (Dans le cas ou il n'y a que 3 coordonnées x_1, x_2, x_3, ces rapports sont au nombre de 2 et le complexe du deuxième ordre formé par les points dont les coordonnées sont $\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}$ se compose d'un nombre fini de points. L'hypothèse dont il s'agit ici revient à supposer irréductible l'équation à une inconnue qui les détermine.) Dans cette hypothèse, on obtient, en égalant à zéro la somme des termes de degré le plus élevé dans φ, une relation entre les rapports $\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_1}$ qui est indécomposable. Soit Φ la somme de ces termes, en sorte qu'on ait $\varphi = \Phi + \varphi_1$, φ_1 étant de degré inférieur à φ. Si les termes du degré le plus élevé dans v contiennent le facteur Φ, en sorte qu'on ait $v = V\Phi + v_1$, v_1 étant de degré inférieur à v, on pourra remplacer, pour la représentation du complexe considéré, v par $v - V\varphi = v_1 - V\varphi_1$. Si $v_1 - V\varphi_1$ contient encore, dans ses termes de degré le plus élevé, le facteur Φ, on pourra faire la même transformation sur cette nouvelle expression. Comme cette transformation en abaisse le degré, on est assuré de parvenir, en la répétant un nombre fini de fois, à une expression pouvant remplacer v, et dans laquelle les termes de degré le plus élevé ne contiennent pas le facteur Φ. Le même raisonnement est applicable à u. On peut donc supposer que ni u, ni v ne contiennent le facteur Φ dans leurs termes de degré le plus élevé. Donc, quand les coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ acquièrent les valeurs infinies qui annulent Φ, u et v sont infinis d'un ordre marqué par leurs degrés respectifs. D'ailleurs x_n doit être du même ordre que les autres coordonnées. Donc, le degré de u étant p, celui de v est $p - 1$. Ainsi l'équation $vx_n - u = 0$ représente un monoïde de degré p.

En second lieu, x_n ne peut devenir infini, d'après l'hypothèse, pour

l'ensemble des valeurs des autres coordonnées qui annulent à la fois v et φ, puisque le complexe des points à l'infini est irréductible. Donc, pour ces valeurs, le rapport $\frac{u}{v}$ est fini, c'est-à-dire que le complexe $u=0$ passe par l'intersection de $v=0$ et $\varphi=0$, et que u est infiniment petit du même ordre que v quand le point $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ est infiniment voisin de cette intersection sur une nappe quelconque de φ. Donc, d'après la remarque faite à la suite du théorème III, l'intersection de v et de φ, qui appartient tout entière à u, compte pour autant d'unités dans le degré de l'intersection de u et de φ, que dans celle de v et de φ. C'est-à-dire que, si m est le degré de φ, elle compte pour $(p-1)\,m$ unités. Le restant de l'intersection de u et de φ est de degré $pm-(p-1)\,m=m$. On a supposé que le complexe du troisième ordre des points à l'infini du complexe considéré était irréductible. Il est facile de montrer qu'on parvient aux mêmes conséquences quand cette hypothèse n'est pas réalisée. Le complexe étant indécomposable, on peut, sans nuire à la généralité, supposer que son intersection avec $x_1=0$ est indécomposable. Il suffit, pour réaliser cette hypothèse, de supposer que les coordonnées ne sont point particularisées. Effectuons maintenant la transformation

$$x'_1=\frac{1}{x_1},\qquad x'_2=\frac{x_2}{x_1},\qquad \ldots,\qquad x'_n=\frac{x_n}{x_1}.$$

Dans le nouveau complexe, l'intersection avec l'infini est indécomposable. Ce complexe est donc représenté par des équations $v'x'_n-u'=0$, $\varphi'=0$, où u' étant de degré de p, v' est de degré $p-1$. Revenons aux anciennes coordonnées, et nous aurons, ainsi qu'on le voit aisément, pour l'ancien complexe, une représentation :

$$\varphi=0,\qquad vx_n-u=0,$$

où les degrés de u et de v sont ceux de u' et de v'. Donc, dans ce cas comme dans le précédent, l'intersection de u et de φ se compose de celle de v et de φ, dont le degré compte pour $(p-1)m$ unités et d'un complexe de degré m. Ces conclusions s'appliquent même à un complexe décomposable; car soient $\varphi=0$, $vx_n-u=0$ et $\varphi'=0$, $v'x_n-u'=0$ deux complexes irréductibles ; on pourra représenter leur ensemble par $\varphi\varphi'=0$, $(\varphi'v+\varphi v')x_n-(\varphi'u+\varphi u')=0$, et l'on voit que cette représentation satisfait aux mêmes conditions que ci-dessus.

Puisque u passe par toute l'intersection de v et de φ, et que cette intersection compte pour autant d'unités dans le degré de $(u=0, \varphi=0)$ que dans celui de $(v=0, \varphi=0)$, il en résulte que, si aucune portion de cette intersection n'est multiple dans φ, u est de la forme $Av+B\varphi$, où A est du premier degré. Le monoïde $vx_n-u=0$ se réduit alors à $x_n=A$. Le complexe du deuxième ordre considéré est alors tracé sur un complexe du premier ordre et du premier degré.

Par des raisonnements analogues, on voit facilement que tout complexe du $i^{\text{ième}}$ ordre est représenté par une équation $\varphi=0$, entre $n-i+1$ coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_{n-i+1}$, et $i-1$ monoïdes $x_{n-i+2}=\frac{u}{v}$, $x_{n-i+3}=\frac{u'}{v'}$, ..., satisfaisant aux mêmes conditions que ci-dessus. On peut réduire ces monoïdes au même dénominateur V, et l'on aura alors

$$x_{n-i+2}=\frac{u_{n-i+2}}{V}, \qquad x_{n-i+3}=\frac{u_{n-i+3}}{V}, \qquad \ldots, \qquad x_n=\frac{u_n}{V}.$$

De même que ci-dessus, chaque complexe $u_{n-i+2}, \ldots, u_n$ est d'un degré supérieur d'une unité à celui de V, et passe par l'intersection de V et de φ. Je vais montrer que le degré d'un tel complexe est précisément celui de φ.

Coupons ce complexe C par le complexe du premier ordre et du premier degré

$$P = A_n x_n + A_{n-1}x_{n-1}+\ldots+A_2x_2+A_1x_1+B=0.$$

La substitution, dans P, des valeurs de $x_n, \ldots, x_{n-i+2}$, donne lieu à

$$\begin{aligned}\psi = A_n u_n + A_{n-1}u_{n-1}+\ldots \\ + A_{n-i+2}u_{n-i+2}+V(A_{n-i+1}x_{n-i+1}+\ldots+A_1x_1+B)=0.\end{aligned}$$

Les deux complexes du premier ordre, à $n-i+1$ dimensions, φ et ψ, ont en commun le complexe $(V=0, \varphi=0)$, et l'on voit immédiatement, par l'application du théorème III, que, si m est le degré de φ, et $p-1$ celui de V, ce complexe compte pour $(p-1)m$ unités dans le degré de l'intersection de φ et de ψ. Le reste de cette intersection est donc de degré m, puisque ψ est de degré p. Or le degré de cette portion de l'intersection de φ et de ψ n'est autre que le degré de C. Donc *le degré du complexe* C *est égal à celui de* φ.

Par la même méthode, on démontrera bien facilement que le degré de l'intersection de C et d'un complexe du premier ordre est égal au produit des degrés de ces complexes. Pour y parvenir, on substituera, dans l'équation du dernier complexe, à $x_{n-i+2}, \ldots, x_n$ leurs valeurs. On formera ainsi un nouveau complexe du premier ordre χ, analogue à ψ. Si le degré du complexe donné est n, le degré de χ sera np, et l'on verra aisément que le complexe $(V = 0, \varphi = 0)$ compte pour $(p-1)mn$ unités dans le degré de l'intersection de χ et de φ. Le reste de cette intersection est de degré mn, et c'est précisément le degré de l'intersection des deux complexes proposés. Donc :

Théorème IV. — *Le degré de l'intersection de deux complexes, dont l'un est du premier ordre, est égal au produit des degrés de ces complexes.*

Quand on n'a à considérer que trois dimensions, le théorème IV exprime que *le nombre des intersections d'une courbe et d'une surface est égale au produit des degrés de cette courbe et de cette surface*, principe que l'on paraît avoir jusqu'à présent admis sans démonstration (*voir* Salmon, *Géométrie analytique à trois dimensions*, Ch. II : Classification des courbes).

Plus généralement, je vais démontrer que :

Théorème V. — *Le degré de l'intersection de deux complexes, dont la somme des ordres n'excède pas le nombre des dimensions, est égal au produit des degrés de ces complexes.*

La démonstration que je vais donner de ce théorème s'applique aussi au théorème IV.

Soit un complexe C_i^n du $i^{\text{ième}}$ ordre à n dimensions, et de degré m, représenté par les équations

$$(1)\quad \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-i+1}) = 0, \qquad x_{n-i+2} = \frac{u_{n-i+2}}{V}, \qquad \ldots, \qquad x_n = \frac{u_n}{V}.$$

Introduisons $i-1$ nouvelles dimensions $y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}$, en remplaçant

$$\begin{aligned}
x_1 &\text{ par } x_1 + a_1^{(1)} y_1 + a_1^{(2)} y_2 + \ldots + a_1^{(i-1)} y_{i-1},\\
x_2 &\text{ par } x_2 + a_2^{(1)} y_1 + a_2^{(2)} y_2 + \ldots + a_2^{(i-1)} y_{i-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
x_{n-i+1} &\text{ par } x_{n-i+1} + a_{n-i+1}^{(1)} y_1 + a_{n-i+1}^{(2)} y_2 + \ldots + a_{n-i+1}^{(i-1)} y_{i-1}.
\end{aligned}$$

En faisant ces substitutions dans les équations (1), on obtient évidemment les équations d'un complexe C_i^{n+i-1} du $i^{\text{ième}}$ ordre à $n+i-1$ dimensions, du même degré m. Par des éliminations, on peut représenter le même complexe au moyen d'équations telles que

$$\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \qquad y_1 = \frac{U_1}{W}, \qquad y_2 = \frac{U_2}{W}, \qquad \ldots, \qquad y_{i-1} = \frac{U_{i-1}}{W},$$

où ψ, qui ne contient que les anciennes dimensions $x_1, \ldots, x_n$, est de degré m, et où $U_1, \ldots, U_{i-1}$ et W ne contiennent que ces mêmes dimensions. Le complexe C_i^{n+i-1} est coupé suivant un complexe d'ordre $2i-1$ à $n+i-1$ dimensions, et de degré m, par un complexe du premier degré et d'ordre $i-1$. C'est le cas de son intersection avec le complexe $y_1 = 0, y_2 = 0, \ldots, y_{i-1} = 0$.

Soit maintenant un second complexe $C_{i'}$ d'ordre i', à n dimensions $x_1, x_2, \ldots, x_n$. On le transformera de la même manière en un complexe d'ordre i' à $n+i'-1$ dimensions en remplaçant

$$\begin{array}{lll} x_1 & \text{par} & x_1 + b_1^{(1)} z_1 + b_1^{(2)} z_2 + \ldots + b_1^{(i'-1)} z_{i'-1}, \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_{n-i'+2} & \text{par} & x_{n-i'+2} + b_{n-i'+2}^{(1)} z_1 + b_{n-i'+2}^{(2)} z_2 + \ldots + b_{n-i+2}^{(i'-1)} z_{i'-1}. \end{array}$$

Ce nouveau complexe $C_{i'}^{n+i'-1}$ est du même degré m' que $C_{i'}^n$, et sera représenté par des équations telles que

$$\psi'(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \qquad z_1 = \frac{U'_1}{W'}, \qquad \ldots, \qquad z_{i'-1} = \frac{U'_{i'-1}}{W'}.$$

Les deux complexes C_i^{n+i-1} et $C_{i'}^{n+i'-1}$ peuvent être tous deux considérés comme des complexes d'ordres i et i' à $n+i+i'-2$ dimensions $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{i-1}, z_1, \ldots, z'_{i-1})$. Pour obtenir la représentation de l'intersection de ces deux complexes, il suffira d'éliminer une des premières coordonnées, x_n, entre les équations $\psi = 0$ et $\psi' = 0$, ce qui donnera lieu à une équation $\Phi = 0$, de degré mm', entre $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$; de déduire de ces mêmes équations une relation telle que $vx_n - u = 0$, et de joindre à ces deux relations $\Phi = 0$, $vx_n - u = 0$ les expressions de $y_1, \ldots, y_{i-1}$, et de $z_1, \ldots, z_{i'-1}$ fournies par la représentation des deux complexes C_i^{n+i-1} et $C_{i'}^{n+i'-1}$, et où l'on remplace x_n par sa valeur en $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. On voit donc que l'on obtient ainsi la représentation d'un complexe d'ordre $i+i'$ à

$n+i+i'-2$ dimensions, de degré mm'. L'intersection de ce dernier complexe avec

$$y_1=0, \quad \ldots, \quad y_{i-1}=0, \quad z_1=0, \quad \ldots, \quad z_{i'-1}=0$$

est un complexe du même degré mm'. Or cette intersection n'est autre chose que celle des deux complexes proposés C_i, $C_{i'}$. Le théorème V est donc entièrement démontré.

II. L'application la plus simple de la représentation d'un complexe d'ordre supérieur à l'unité est la représentation d'une courbe dans l'espace. D'après les principes qui viennent d'être exposés, toute courbe C est représentée par les équations à 3 dimensions

$$\varphi(x,y)=0, \qquad vz-u=0,$$

où $\varphi=0$ est une courbe plane, d'un degré égal à celui de la courbe représentée, et où u et v ne contiennent que x et y. Le degré de u étant p, celui de v est $p-1$, la courbe $u=0$ passe en tous les points communs à $v=0$ et à $\varphi=0$, et ces points comptent pour $(p-1)m$ intersections de $u=0$ et de $\varphi=0$, m étant le degré de φ. Les m autres intersections de u et de φ sont les points où la courbe C rencontre le plan $z=0$. Si, parmi les points $(v=0, \varphi=0)$, il n'y en a pas qui soient multiples sur φ, la courbe est plane. Les points multiples de φ, qui sont communs à u et à v, sont des *points multiples apparents* de la courbe C. Comme le lieu des points de l'espace, d'où l'on peut mener des droites s'appuyant plus de deux fois sur une courbe, est une surface, on peut toujours supposer que le point à l'infini sur l'axe des z n'est pas sur cette surface. Par suite, les points multiples apparents dont il s'agit sont simplement des points doubles. Si la courbe $\varphi=0$ a d'autres points multiples où ne passent pas les courbes $u=0$ et $v=0$, ce sont les projections des points multiples de la courbe C. Nous n'aurons pas lieu de nous en occuper ici, et nous ne parlerons que des points doubles de φ, où passent les lignes $u=0$ et $v=0$. Soit s le nombre de ces points ; à cause des degrés m et $p-1$ de φ et de v, on doit avoir $s \leqq \frac{(p-1)m}{2}$. En dehors de ces points doubles, φ et v se coupent en $(p-1)m-2s$ autres points. Donc u et v ont $(p-1)m-s$ points communs sur φ. On doit donc avoir

$(p-1)m - s \leqq p(p-1)$. Ces deux inégalités donnent

$$\frac{(p-1)m}{2} \geqq s \geqq (p-1)(m-p);$$

d'où l'on conclut $p \geqq \frac{m}{2}$.

Parmi tous les monoïdes $vz - u = 0$ équivalents pour la représentation de la courbe C, il en est dont le degré p est minimum. Toute courbe $v' = 0$ qui passe aux s points doubles de φ peut servir à former un monoïde équivalent. Car il est facile de voir que le produit $v'u$ est de la forme $u'v + a\varphi$, u' étant un polynome dont le degré surpasse celui de v' d'une unité. Par suite, quand le point (x, y) parcourt la ligne $\varphi = 0$, on a

$$\frac{u'}{v'} = \frac{u}{v}.$$

Donc le monoïde $z = \frac{u'}{v'}$ est équivalent à $z = \frac{u}{v}$ pour la représentation de la courbe C. Le nombre des points doubles de φ étant inférieur à $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$, si φ est une courbe propre de degré m, et à $\frac{m(m-1)}{2}$, si φ est une courbe décomposable, on pourra, dans tous les cas, faire passer par les points doubles une courbe de degré $m-1$. Donc, tout d'abord, on peut supposer que p ne dépasse pas m. Cela étant, pour que p soit le degré minimum du monoïde, il faut que, par les s points doubles de φ, on ne puisse mener une courbe de degré inférieur à $p-1$, ce qui exige qu'on ait

$$s \geqq \frac{(p-1)p}{2}.$$

Cette inégalité donne pour chaque valeur de s une limite du minimum de p. On peut facilement trouver une autre limite plus rapprochée. Les éléments (u, v), $(u'v')$ de deux monoïdes équivalents sont liés par la relation $uv' - vu' = a\varphi$. u et v étant connus, et u', v' indéterminés, a est assujetti simplement à cette condition que la courbe $a = 0$ passe aux points d'intersection de u et de v extérieurs à φ. Ces points sont au nombre de $s - (p-1)(m-p)$. Pour qu'on ne puisse déterminer u' et v' de telle sorte que le degré v' soit inférieur à $p-1$, il faut que le degré de a ne puisse descendre au-dessous

de $2p-m-1$; ce qui exige que l'on ait

$$s-(p-1)(m-p) \geqq \frac{(2p-m-1)(2p-m)}{2},$$

ou

$$s \geqq \frac{m(m-1)}{2} - p(m-p).$$

Cette limite de s est constamment supérieure à $\frac{(p-1)p}{2}$, dès que p est inférieur à $m-1$. Elle décroît constamment avec p jusqu'à la valeur de p qui la rend minima, et qui est précisément la limite absolue de p trouvée plus haut, c'est-à-dire le plus grand entier contenu dans $\frac{m+1}{2}$. Donc s ne peut, dans aucun cas, descendre au-dessous du minimum obtenu en faisant dans l'expression ci-dessus

$$p = \left[\frac{m+1}{2}\right] \quad \left([x] = \text{le plus grand entier contenu dans } x\right).$$

Ce minimum est $\left[\left(\frac{m-1}{2}\right)^2\right]$. Il existe toujours quel que soit m, des courbes de degré m ayant $\left[\left(\frac{m-1}{2}\right)^2\right]$ points doubles apparents, et il n'en existe qu'une espèce. Ces courbes résultent de l'intersection d'une surface du deuxième ordre et d'une surface de degré $\left[\frac{m+1}{2}\right]$ qui ont, en outre, une droite commune lorsque m est impair. On peut donc dire, ainsi que je l'ai déjà énoncé ailleurs (*Comptes rendus*, t. LXX) :

Les courbes gauches de degré m, qui ont le moindre nombre de points doubles apparents possible, en ont $\left[\left(\frac{m-1}{2}\right)^2\right]$.

Occupons-nous maintenant des complexes du $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre à n dimensions. Un tel complexe C est représenté par les équations

$$\varphi(x_1, x_2) = 0, \qquad x_3 = \frac{u_3}{V}, \qquad x_4 = \frac{u_4}{V}, \qquad \ldots, \qquad x_n = \frac{u_n}{V},$$

où chaque groupe $\left(\varphi = 0,\ x_i = \frac{u_i}{V}\right)$ représente une courbe dans l'espace. On peut donc dire que le complexe est représenté par $n-2$ courbes tracées sur un même cylindre. Chaque point multiple de φ, où passe φ, est un point multiple apparent pour toutes ces courbes.

Elles ont donc les mêmes points multiples apparents. En général, par un complexe C_3 du troisième ordre et du premier degré, on peut mener un nombre fini de complexes C_2 du deuxième ordre et du premier degré rencontrant deux fois le complexe C du $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre. Supposons que le complexe C_3 soit celui des points à l'infini du complexe du deuxième ordre $(x_1 = 0,\ x_2 = 0)$. Alors ξ_1, ξ_2 étant les coordonnées d'un point multiple de φ, qui ne soit qu'apparent sur les courbes $\left(\varphi = 0,\ x_i = \frac{u_i}{V}\right)$, le complexe $(x_1 = \xi_1,\ x_2 = \xi_2)$ est un des complexes C_2 passant par C_3 et rencontrant plusieurs fois le complexe C. On voit donc que, si les coordonnées ne sont pas particularisées, les points multiples apparents des courbes $\left(\varphi = 0, x_i = \frac{u_i}{V}\right)$ seront des points doubles. Leur nombre ne change pas si l'on change les coordonnées.

Si l'on considère trois coordonnées x_i, x_j, x_k d'un point du complexe C comme les coordonnées rectilignes d'un point de l'espace à 3 dimensions, ces coordonnées définissent une courbe de l'espace, que je désigne par (i, j, k). Le complexe C est représenté par le groupe des courbes $(i, j, 1)$, $(i, j, 2)$, ..., (i, j, n), que j'appelle le groupe (i, j). Le passage de la représentation du complexe C par un groupe (i, j) à la représentation par un groupe (i', j') revient à un changement de coordonnées. Par suite, toutes les courbes (i, j, k) ont le même nombre de points doubles apparents.

Voici maintenant une application géométrique importante de ces complexes. Considérons une courbe plane définie par l'équation

$$S = a_1 x^q + a_2 x^{q-1} y + \ldots + a_{Q-1} x + a_Q y - 1 = 0,$$

où $(a_1, a_2, \ldots, a_Q)$ sont des coefficients dont le nombre Q marque le nombre des conditions nécessaires pour déterminer la courbe. Supposons que l'on donne simplement $Q - 1$ conditions. La courbe S engendre alors un système (S) qui est défini par un complexe du $(Q-1)^{\text{ième}}$ ordre à Q dimensions $(a_1, a_2, \ldots, a_Q)$. Les valeurs infinies des variables a correspondent aux courbes S qui passent à l'origine des coordonnées (x, y). Si toutes ces variables ne deviennent pas infinies ensemble, l'équation de quelques-unes des courbes S, passant à l'origine, manque de quelques termes. Or on peut choisir les axes de coordonnées de manière que ce fait ne se produise pas. Supposons, en effet, que, dans l'équation d'une de ces courbes S passant à l'ori-

gine, le coefficient d'un terme tel que $x^r y^{r'}$ soit nul : en changeant arbitrairement les directions des axes sans changer l'origine, on fera apparaître ce terme dans l'équation de la courbe, à moins que tous les termes de degré $r+r'$ n'aient des coefficients nuls. Mais cette dernière hypothèse est impossible si l'origine des coordonnées n'est pas particularisée. Car, si l'on suppose qu'en plaçant l'origine en un point arbitraire, il y ait toujours une courbe du système passant en ce point dont l'équation manque des termes de degré $r+r'$, il en résulte que chaque courbe du système jouit de cette propriété relativement à chaque point situé sur elle. Il y a donc lieu de se demander quelles sont les courbes telles qu'en plaçant l'origine des coordonnées sur la courbe, l'équation qui les représente manque des termes d'un degré donné. Or il est bien facile de voir que ces courbes ne sauraient être des courbes propres, et qu'il faut et il suffit que leur équation contienne un facteur élevé à une puissance égale au degré des termes qui doivent disparaître. Cette hypothèse est donc impossible dans le cas d'un système de courbes propres.

Il résulte de cette discussion que, dans le complexe du $(Q-1)^{\text{ième}}$ ordre, à Q dimensions, qui représente le système (S), les Q coordonnées deviennent infinies toutes ensemble. Par suite ce complexe C est représenté par $Q-2$ courbes $(i, j, 1)$, $(i, j, 2)$, ..., (i, j, Q) tracées sur le même cylindre, rapportées à des axes quelconques. Le degré de ces courbes marque le nombre des courbes du système qui passent en un point, ou *la première caractéristique* μ du système, attendu que la condition pour la courbe S de passer en un point est linéaire en $(a_1, a_2, \ldots, a_Q)$.

Si l'on change les axes des coordonnées (x, y), ou si l'on applique à ces coordonnées une transformation homographique, ces transformations ont pour effet de remplacer les coefficients a par des expressions linéaires en fonction de ces coefficients. Elles reviennent donc à de simples changements de coordonnées pour le complexe C. Par suite, toutes les propriétés de C indépendantes des coordonnées donnent dans le système (S) des propriétés subsistant lorsqu'on lui applique une transformation homographique. Considérons, par exemple, les points doubles apparents des courbes représentatives de C. Soit a_{q+1} le coefficient de y^q dans S. Quelle est la signification des points doubles apparents des courbes du groupe $(1, q+1)$? Pour un tel point, on aura deux valeurs de chacun des coefficients a, autres

que a_1 et a_{q+1}, répondant à une seule valeur de chacun de ces derniers. On aura donc deux courbes S et S', telles que la courbe $S - S' = 0$, qui passe à l'origine des coordonnées, aura, dans ses termes de degré le plus élevé, le facteur xy. Cette courbe passe donc par les deux points à l'infini des deux axes de coordonnées. Le nombre des points doubles apparents des courbes du groupe $(1, q+1)$ marque donc le nombre des couples de courbes du système, telles que par leurs intersections et par trois points donnés, dont deux à l'infini sur les axes et un à l'origine, on peut mener une courbe du même degré. Le nombre des points doubles apparents des courbes du groupe $(1, q+1)$ ne changeant pas, si l'on transforme homographiquement le système (S), on peut dire que *ce nombre marque le nombre des couples de courbes du système, telles que, par leur intersection et 3 points arbitraires, on peut mener une courbe du même degré.* D'après cette interprétation, on voit que les points multiples apparents des courbes du groupe $(1, q+1)$ et, par suite, des autres groupes, sont des points doubles, si les axes des coordonnées x, y sont quelconques.

Si, par les intersections de chaque couple de courbes du système (S), on mène les courbes du même degré, ces dernières contiennent 3 arbitraires. Elles forment un complexe de courbes, qui est d'ordre $Q-3$. Le nombre de ces courbes qu'on peut mener par 3 points s'appellera la *première caractéristique* de ce complexe. Ce complexe sera dit *dérivé* du système (S). Si le nombre des couples de courbes S ci-dessus est moindre que $\left[\left(\frac{\mu-1}{2}\right)^2\right]$, toutes les courbes (i, j, k) sont planes, le nombre de leurs points doubles apparents est nul. De plus, chaque coefficient a_k s'exprimant alors linéairement en fonction de deux coefficients a_i, a_j, l'équation de la courbe S est comprise dans la forme $S' + a_i S'' + a_j S''' = 0$, qui représente un *réseau*. Donc :

Théorème VI. — *Si la première caractéristique du complexe dérivé d'un système est inférieur à* $\left[\left(\frac{\mu-1}{2}\right)^2\right]$, *$\mu$ étant celle du système, elle est nulle. Quand la première caractéristique du complexe dérivé est nulle, le système fait partie d'un réseau.*

On pourrait donner différentes autres interprétations des points doubles apparents des courbes (i, j, k), relativement au système (S),

et obtenir ainsi des théorèmes sur des couples de courbes de ce système. Je ne m'y arrête pas, attendu que ces théorèmes découlent des propriétés générales des complexes de courbes, d'ordre $Q-3$, tels que le complexe dérivé. Je ferai seulement remarquer que, dans le cas d'un système de coniques, la première caractéristique du complexe dérivé marque le nombre des couples de coniques du système qui ont une corde commune donnée.

Toutes les considérations précédentes s'appliquent, sans modification, aux systèmes de surfaces et aux systèmes de complexes du premier ordre à n dimensions, et donnent lieu, pour ces cas, à des théorèmes identiques au théorème VI.

Si l'on veut astreindre les courbes d'un système (S) à une condition nouvelle, on définira cette condition par une équation entre les coefficients a. Soit m le degré de cette équation. D'après le théorème IV, le nombre des systèmes de valeurs des coefficients a qui satisfont à cette condition et à celle du système (S) est $m\mu$, puisque ces dernières sont exprimées par un complexe de degré μ. Ce qui distingue tout particulièrement les beaux théorèmes découverts par M. Chasles à l'occasion de cette recherche, c'est qu'ils donnent le nombre des *courbes propres* d'un système qui satisfont à une condition. Pour parvenir à ces théorèmes, il faut donc retrancher du nombre $m\mu$ le nombre afférent aux courbes non propres. C'est ce que nous allons faire pour le cas d'un système de coniques sur le plan. Il est facile de voir que, dans ce cas, il n'y a lieu de considérer, parmi les courbes non propres du système, que les coniques réduites à une droite [1].

Soit

$$S = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2\varepsilon y + 1 = 0$$

l'équation d'une conique appartenant à un système défini par les relations

$$\varphi(d, \varepsilon) = 0, \qquad b = \frac{u}{v}, \qquad u = \frac{u_1}{v}, \qquad c = \frac{u_2}{v}.$$

Les conditions, pour les coniques S, de se réduire à une droite sont

$$\alpha = bd - a\varepsilon = 0, \qquad \alpha_1 = a - d^2 = 0, \qquad \alpha_2 = c - \varepsilon^2 = 0.$$

---

[1] Voir *Mémoire sur la détermination des coniques et des surfaces du deuxième ordre*. Troisième Partie : *Détermination des surfaces du deuxième ordre*.

On peut remplacer les cinq coefficients a, b, c, d, ε par $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, d, \varepsilon$, de la manière suivante : on a

$$a = d^2 + \alpha_1, \qquad c = \varepsilon^2 + \alpha_2, \qquad b = \frac{\alpha}{d} + \frac{a\varepsilon}{d} = \frac{\alpha}{d} + \frac{\varepsilon}{d}(d^2 + \alpha_1).$$

Étant donnée une condition, représentée par une équation entre les coefficients a, b, c, d, ε, on y substituera ces valeurs de a, c, b. Si l'équation ainsi transformée ne contient pas de terme indépendant de $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$, la condition est telle qu'elle est satisfaite par toute droite considérée comme une conique. Prenons, par exemple, la condition $\alpha_1 = 0$, sur laquelle la transformation est toute faite. Cherchons maintenant le nombre des coniques S qui satisfont à cette condition. Pour cela, mettons dans l'équation $\alpha_1 = a - d^2 = 0$, à la place de a, sa valeur $\frac{u_1}{v}$; nous obtenons l'équation $u_1 - d^2 v = 0$, d et ε étant censées des coordonnées rectilignes, cette équation représente une courbe ψ, qui coupe $\varphi = 0$ de degré μ en des points dont, si p est le degré de u, $2(p-1)\mu$ sont sur u et sur v. Les 2μ autres conviennent à la question.

Supposons maintenant que le système (S) contienne des coniques réduites à une droite. Soit O le point de φ répondant à l'une d'elles, ce point pouvant être multiple sur φ. En ce point, c'est-à-dire lorsque d et ε sont égaux aux coordonnées de ce point, $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ sont nuls. Donc la courbe ψ passe au point O. D'après le théorème II, le nombre des intersections des deux courbes φ et ψ, confondues en O, est marqué par la somme des ordres des quantités ψ ou α_1, quand le point (d, ε) est placé successivement à distance infiniment petite du premier ordre de O, sur les différentes branches de φ. Soit ω cette somme; nous voyons que la conique réduite à une droite, ou *droite-conique*, considérée réduit de ω unités le nombre des coniques du système satisfaisant à la condition $\alpha_1 = 0$. Mais cette condition est celle de toucher l'axe des x. Si les axes sont quelconques, le nombre ω devra être le même si l'on prend pour axe des x une droite quelconque du plan. On en conclut tout d'abord qu'il est le même, si, à la condition $\alpha_1 = 0$, on substitue la condition $\alpha_2 = 0$. La condition de toucher la droite de l'infini est $b^2 - ac = 0$. On en conclut donc encore que la somme des ordres de $b^2 - ac$ est ω, quand le point (d, ε) se place successivement sur les différentes branches de φ, à distance infiniment petite du

premier ordre de O. Or on a

$$\alpha(bd + a\varepsilon) = b^2 d^2 - a^2 \varepsilon^2 = d^2(b^2 - ac) + a^2 \alpha_2 - ac\alpha_1.$$

Par suite, la somme des ordres de α est également ω.

Prenons maintenant, au lieu des précédentes, une condition qui soit telle que l'équation en d, ε, α, α_1, α_2 qui la représente soit satisfaite pour $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Soit n le moindre degré de cette équation en α, α_1, α_2. Si, dans cette équation, on exprime α, α_1, α_2 en d, ε, par les conditions du système (S), on obtient une équation qui représente une courbe χ, de degré mp, m étant le degré de la condition. Cette courbe rencontre φ en $mp\mu$ points dont $m(p-1)\mu$ appartiennent à l'intersection de ν et de φ. Il reste donc $m\mu$ points. La courbe χ passe, en outre, au point O, et la somme des ordres de χ, quand le point (d, ε) est placé successivement sur les différentes branches de φ, à distance du premier ordre de O, est $n\omega$. Donc le point O compte pour $n\omega$ intersections de φ et de χ. Donc la droite-conique considérée réduit de $n\omega$ le nombre des coniques du système satisfaisant à la condition donnée. Donc si Ω est la somme des nombres ω analogues pour toutes les droites-coniques du système (S), le nombre des coniques propres satisfaisant à la condition donnée est $N = m\mu - n\Omega$. En appelant ν le nombre des coniques qui touchent une droite, on a $\nu = 2\mu - \Omega$. Donc, en général, on a

$$N = (m - 2n)\mu + n\nu,$$

équation qui exprime un théorème célèbre, dû à M. Chasles.

Pour le cas d'un système de surfaces du deuxième ordre, on parviendra au résultat connu en suivant une marche analogue. Les surfaces non propres à éliminer sont les surfaces réduites à un plan, et les surfaces réduites à deux plans. On considérera d'abord les premières relativement à la condition de contact avec une droite, et l'on obtiendra la relation $\nu = 2\mu - \Omega$, ν étant la deuxième caractéristique du système. En désignant par ρ le nombre des surfaces du système qui touchent un plan, on reconnaîtra que ce nombre est égal à $3\mu - 2\Omega$, moins le nombre afférent aux surfaces réduites à deux plans, ou $\rho = 3\mu - 2\Omega - \Omega'$. Enfin, pour une autre condition on obtiendra

$$N = m\mu - n\Omega - r\Omega' = (m - 2n + r)\mu + (n - 2r)\nu + r\rho,$$

équation qui exprime un autre théorème de M. Chasles.

Enfin, de la même manière, on démontrera aisément que le nombre des complexes indécomposables du premier ordre, à n dimensions, du deuxième degré, d'un système, qui satisfont à une condition, s'exprime par la même formule à 3 termes, attendu qu'il n'y a encore que deux espèces de complexes non propres à éliminer.

Il n'est pas sans utilité de remarquer que les mêmes raisonnements permettent de prévoir les résultats qu'on obtiendrait si l'on voulait éliminer certaines familles de courbes propres, d'un système (S), du nombre des solutions du problème proposé. Admettons, par exemple, qu'un système (S) de coniques dans le plan contienne des cercles. Cherchons maintenant les coniques du système qui coupent une droite donnée sous des angles supplémentaires. Tous les cercles du système satisfont à cette condition. Le nombre des coniques, différentes des cercles, qui y satisfont, est donc moindre que dans le cas général. On reconnaîtra aisément qu'il est généralement égal à μ. Dans le cas actuel, il sera $\lambda = \mu - \Omega''$. Ici le nombre Ω'' désigne non pas le nombre des cercles du système, mais un nombre qui dépend de la manière dont les cercles existent dans le système, et qui est, de tout point, analogue aux nombres Ω et Ω' ci-dessus.

Si, maintenant, on considère une autre condition qui soit satisfaite par tous les cercles, on trouvera que le nombre des coniques, autres que les cercles appartenant au système (S), et qui y satisfont, est

$$N = \alpha\mu + \beta\nu - q\,\Omega'' = (\alpha - q)\mu + \beta\nu + q\lambda.$$

On aura donc à considérer une caractéristique λ de plus. Et, en général, chaque famille que l'on voudra éliminer donnera lieu à une caractéristique de plus.

Les mêmes problèmes, relatifs à des systèmes de degré plus élevé, peuvent être traités par la même méthode. Mais ce sujet exige des développements que j'espère pouvoir présenter en une autre occasion.

Les complexes à Q dimensions d'ordre inférieur à $Q - 1$ s'appliquent, comme ceux d'ordre $Q - 1$, à la représentation des conditions qui existent entre les coefficients d'une courbe plane variable. Si, entre les Q coefficients de la courbe :

$$S = a_1 x^q + a_2 x^{q-1} y + \ldots + a_{Q-1} x + a_Q y - 1 = 0,$$

il y a seulement $Q - i$ relations, la courbe S engendre un complexe de

courbes, $(S)_{Q-i}$. Ce complexe de courbes sera représenté par un complexe d'ordre $Q-i$, C_{Q-i}, à Q dimensions, $a_1, a_2, \ldots, a_Q$, dans lequel les points à l'infini forment un complexe irréductible d'ordre $Q-i+1$. Car l'origine des coordonnées (x, y) étant quelconque, et le complexe $(S)_{Q-i}$ étant censé indécomposable, il en est de même du complexe, d'ordre supérieur d'une unité, formé par les courbes S qui passent à l'origine des coordonnées. Le degré du complexe C_{Q-i} marque le nombre des courbes S qu'on peut mener par i points. C'est la première caractéristique de $(S)_{Q-i}$. On voit que si l'on astreint les courbes S à faire partie de deux complexes $(S)_{Q-i}$ et $(S)_{Q-i'}$ donnés, leur ensemble constituera un complexe d'ordre $2Q-i-i'$, représenté par l'intersection de C_{Q-i} et $C_{Q-i'}$. La première caractéristique de ce complexe est donc le produit de celles des complexes considérés. Dans le cas où la somme des ordres des deux complexes est égale à Q, le produit est le nombre des courbes communes aux deux complexes. Ces résultats doivent être modifiés si les complexes contiennent des courbes non propres. Mais on peut, dès à présent, énoncer ce théorème :

Théorème VII. — Q *étant le nombre des conditions nécessaires pour déterminer des courbes* S *sur le plan, si l'on considère deux complexes de ces courbes assujetties respectivement à i et à i' conditions, et dont l'une ne contienne aucune courbe non propre, le produit des premières caractéristiques de ces deux complexes marque* : 1° *si $i+i'$ est égal à* Q, *le nombre des courbes qui leur sont communes ;* 2° *si $i+i'$ est inférieur à* Q, *la première caractéristique du système ou du complexe fourni par ces courbes.*

Tout complexe de courbes, de première caractéristique égale à l'unité, est représenté par un complexe du premier degré, dans lequel, son ordre étant j, j coordonnées s'expriment linéairement en fonction des $Q-j$ autres. Par suite, ce complexe de courbes, qu'on peut appeler *complexe linéaire*, est représenté par une équation de la forme.

$$S = S' + a_1 S'' + \ldots + a_{Q-j+1} S^{(Q-j+1)} = 0,$$

dans laquelle $a_1, a_2, \ldots, a_{Q-j+1}$ sont des arbitraires. La courbe $S=0$ est une courbe quelconque du complexe.

Soit maintenant un complexe de première caractéristique égale à 2,

il est représenté par un complexe

$$\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_{Q-j+1}) = 0, \qquad a_{Q-j+2} = \frac{u_{Q-j+2}}{V}, \qquad \ldots,$$

dont le degré est 2. Par suite, le degré φ est 2. Or il est aisé de voir que le complexe du premier ordre et du deuxième degré à $Q-j+1$ dimensions, $\varphi = 0$ ne peut contenir un complexe double d'ordre 2 sans se décomposer. Donc les coordonnées de ce complexe, autre que $a_1, a_2, \ldots, a_{Q-j+1}$, s'expriment linéairement en fonction de ces dernières. Par suite, l'équation générale des courbes du complexe est

$$S = S' + a_1 S'' + \ldots + a_{Q-j+1} S^{(Q-j+1)} = 0,$$

dans laquelle les $Q-j+1$ arbitraires a sont liés par la relation $\varphi = 0$. Donc :

Théorème VIII. — *Tout complexe de courbes, dont la première caractéristique est 2, est contenu dans un complexe linéaire d'ordre inférieur d'une unité.*

Dans le cas d'un complexe d'ordre $Q-2$, c'est-à-dire formé par des courbes contenant 2 arbitraires, la fonction φ ne contient que 3 dimensions. Égalée à zéro, elle représente une surface. Toutes les fois que cette surface ne contient pas de ligne double, le complexe est contenu dans un complexe linéaire d'ordre $Q-3$. Si cette surface est réglée, c'est-à-dire engendrée par une série de droites, le complexe peut être engendré par une série de faisceaux $S' + aS'' = 0$. Donc, si la première caractéristique est 2, c'est-à-dire si la surface φ est du deuxième degré, on a :

Théorème IX. — *Tout complexe de courbes d'ordre $Q-2$ et de première caractéristique 2 peut être engendré de deux manières différentes par une série de faisceaux.*

Si la première caractéristique du complexe d'ordre $Q-2$ est égale à 3, la surface φ est du troisième degré. Suivant qu'elle a ou qu'elle n'a pas de droite double, elle est ou n'est pas réglée. Donc :

Théorème X. — *Les complexes de courbes d'ordre $Q-2$ et de première caractéristique égale à 3 sont de deux espèces : les uns sont contenus dans un complexe linéaire d'ordre $Q-3$ et con-*

tiennent, en général, 27 *faisceaux ; les autres sont engendrés par une suite de faisceaux.*

Je me bornerai, pour le moment, à ces quelques conséquences si faciles de la théorie ébauchée au début de ce travail. Il est entendu que ces derniers théorèmes s'appliquent aussi aux complexes de surfaces et aux complexes de complexes du premier ordre à n dimensions. On voit, par les applications ci-dessus, que la considération des complexes de courbes donne une interprétation très nette de la géométrie à n dimensions.

SUR LE

DÉPLACEMENT D'UN SOLIDE INVARIABLE.

Bulletin de la Société mathématique, t. II, 1873-1874, p. 56.

Le nombre des conditions nécessaires pour déterminer la position, dans l'espace, d'un solide donné, étant six, l'étude des déplacements d'un solide peut être partagée en six cas distincts, suivant que ce corps est assujetti à cinq, quatre, ..., une condition, ou est entièrement libre.

Le cas où les conditions sont au nombre de cinq a donné lieu à une théorie trop connue pour qu'il soit utile d'en rappeler ici les résultats. Les cas où les conditions sont au nombre de quatre ou de trois ont donné lieu à d'élégants théorèmes dus à M. Mannheim, et sur lesquels je vais revenir. Je donne ici des théorèmes analogues pour les autres cas, en suivant une marche uniforme qui s'applique également à tous, à l'exception du premier.

Rappelons d'abord un résultat bien connu. Soient, dans un solide de position donnée, x, y, z, et ξ, η, ζ les coordonnées de deux points de ce corps relativement à des axes rectangulaires fixes dans l'espace, le premier point étant considéré comme variable et le second comme fixe dans le corps. Soit t_1 une variable dont dépend la position du corps. Si l'on écarte le solide infiniment peu de sa position, en faisant varier t_1, on a

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt_1} &= \frac{d\xi}{dt_1} + c_1(y-\eta) - b_1(z-\zeta),\\ \frac{dy}{dt_1} &= \frac{d\eta}{dt_1} + a_1(z-\zeta) - c_1(x-\xi),\\ \frac{dz}{dt_1} &= \frac{d\zeta}{dt_1} + b_1(x-\xi) - a_1(y-\eta). \end{aligned}\right.$$

Dans ces relations, a_1, b_1, c_1 sont des constantes relativement au point $(x, y, z,)$ considéré. Les trois plans, représentés par les équations obtenues en égalant à zéro les trois dérivées $\frac{dx}{dt_1}$, $\frac{dy}{dt_1}$, $\frac{dz}{dt_1}$, sont parallèles à la droite $\frac{x}{a_1} = \frac{y}{b_1} = \frac{z}{c_1}$. Il n'y a donc pas de point commun à ces plans. Par suite, dans le mouvement imprimé à ce corps, aucun point n'est immobile. Admettons maintenant que la position du corps dépende d'autres variables, t_2, t_3, ... En faisant varier séparément chacune d'elles, on obtiendra des relations analogues aux relations (1), que nous figurerons en affectant, dans les relations (1), les constantes a, b, c du même indice que la variable correspondante. Si d'ailleurs on fait varier simultanément les différentes variables, on a

$$dx = \frac{dx}{dt_1} dt_1 + \frac{dx}{dt_2} dt_2 + \frac{dx}{dt_3} dt_3 + \ldots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

En posant donc

$$a_1\, dt_1 + a_2\, dt_2 + a_3\, dt_3 + \ldots = \text{A},$$
$$b_1\, dt_1 + b_2\, dt_2 + b_3\, dt_3 + \ldots = \text{B},$$
$$c_1\, dt_1 + c_2\, dt_2 + c_3\, dt_3 + \ldots = \text{C},$$

on aura

$$(2) \qquad \begin{cases} dx = d\xi + \text{C}(y - \eta) - \text{B}(z - \zeta), \\ dy = d\eta + \text{A}(z - \zeta) - \text{C}(x - \xi), \\ dz = d\zeta + \text{B}(x - \xi) - \text{A}(y - z). \end{cases}$$

Les trois plans, dont on obtient les équations en égalant à zéro ces trois différentielles, sont parallèles à la droite $\frac{x}{\text{A}} = \frac{y}{\text{B}} = \frac{z}{\text{C}}$. Par suite, comme précédemment, aucun point n'est immobile. Mais si l'on choisit les variations de t_1, t_2, t_3, ... de manière à vérifier l'équation

$$(3) \qquad \text{A}\, d\xi + \text{B}\, d\eta + \text{C}\, d\zeta = 0,$$

ces trois plans se coupent suivant une même droite dont tous les points sont alors immobiles.

Quand les variables sont au nombre de deux, l'équation (3) détermine le rapport qui doit exister entre dt_1 et dt_2 pour que cette condition soit satisfaite. Or l'équation (3) est du deuxième degré relati-

vement à $\frac{dt_1}{dt_2}$. On peut donc satisfaire à la condition d'immobilité d'une droite de deux manières. Quand les variables sont en nombre supérieur à deux, l'équation (3) a lieu entre plusieurs inconnues, et admet une infinité de systèmes de solutions. En résumé, dès que le nombre n des variables surpasse l'unité, il est toujours possible de trouver des systèmes $(\omega_1^1, \omega_2^1, \ldots, \omega_n^1)$, $(\omega_1^2, \omega_2^2, \ldots, \omega_n^2) \ldots$, $(\omega_1^n, \omega_2^n, \ldots, \omega_n^n)$ de n nombres chacun, et au nombre de n, tels qu'en faisant

$$\frac{dt_1}{\omega_1^i} = \frac{dt_2}{\omega_2^i} = \ldots = \frac{dt_n}{\omega_n^i}.$$

une droite du solide reste immobile.

Substituons maintenant aux variables $t_1, t_2, \ldots, t_n$ les variables θ_1, $\theta_2, \ldots, \theta_n$, définies par les relations linéaires

$$\theta_1 = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & \ldots & t_n \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \ldots & \omega_n^2 \\ \omega_1^3 & \omega_2^3 & \ldots & \omega_n^3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_1^n & \omega_2^n & \ldots & \omega_n^n \end{vmatrix}, \qquad \theta_2 = \begin{vmatrix} \omega_1^1 & \omega_2^1 & \ldots & \omega_n^1 \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_n \\ \omega_1^3 & \omega_2^3 & \ldots & \omega_n^3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_1^n & \omega_2^n & \ldots & \omega_n^n \end{vmatrix}, \qquad \ldots,$$

$$\theta_n = \begin{vmatrix} \omega_1^1 & \omega_2^1 & \ldots & \omega_n^1 \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \ldots & \omega_n^2 \\ \omega_1^3 & \omega_2^3 & \ldots & \omega_n^3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_n \end{vmatrix};$$

on obtiendra le mouvement le plus général du solide en faisant varier successivement $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$. Or, si l'on suppose nulles les différentielles de toutes ces variables, à l'exception de celle de θ_i, on en conclut

$$\frac{dt_1}{\omega_1^i} = \frac{dt_2}{\omega_2^i} = \ldots = \frac{dt_n}{\omega_n^i};$$

c'est-à-dire qu'une droite du corps est immobile. Ainsi le déplacement le plus général du corps s'obtient par n rotations arbitraires autour de n droites restant les mêmes.

Appliquons maintenant ces résultats aux différents cas. S'il y a deux variables seulement, les deux axes de rotation sont déterminés par l'équation (3). Donc :

THÉORÈME I. — *Tous les déplacements d'un solide assujetti à quatre conditions s'obtiennent par deux rotations autour de deux droites déterminées.*

Ce théorème est dû à M. Mannheim (*Étude sur le déplacement d'une figure de forme invariable*, p. 32). On en conclut que *les points de ces deux axes décrivent des éléments de lignes, tandis que les autres points décrivent des éléments de surfaces.*

Ce corollaire peut facilement être démontré directement par le calcul. Pour faciliter l'écriture, j'emploierai, dans la suite, la notation suivante : u, v, ..., w étant n fonctions de t_1, t_2, ..., t_n, je représenterai par $(u_1 v_2 \ldots\ldots w_n)$ le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{du}{dt_1} & \frac{du}{dt_2} & \cdots & \frac{du}{dt_n} \\ \frac{dv}{dt_1} & \frac{dv}{dt_2} & \cdots & \frac{dv}{dt_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{dw}{dt_1} & \frac{dw}{dt_2} & \cdots & \frac{dw}{dt_n} \end{vmatrix}.$$

Cela posé, dans le cas de deux variables, les points des deux axes sont ceux dont les coordonnées, mises pour x, y, z dans les équations $dx = 0$, $dy = 0$, $dz = 0$, ou

$$\frac{dx}{dt_1} dt_1 + \frac{dx}{dt_2} dt_2 = 0,$$
$$\frac{dy}{dt_1} dt_1 + \frac{dy}{dt_2} dt_2 = 0,$$
$$\frac{dz}{dt_1} dt_1 + \frac{dz}{dt_2} dt_2 = 0,$$

rendent ces équations possibles, en y considérant $\frac{dt_1}{dt_2}$ comme inconnue. Par suite, les coordonnées des points des axes satisfont aux équations simultanées ; $(x_1 y_2) = 0$, $(y_1 z_2) = 0$, $(z_1 x_2) = 0$. Il est facile de vérifier qu'en effet les paraboloïdes représentés par ces trois équations se coupent suivant les deux droites définies ci-dessus. Considérons maintenant l'un de ces paraboloïdes, le premier, par exemple, qui a pour plan directeur le plan des xy ; menons, par chaque point M du corps, une parallèle à une droite fixe, et soient p, p' les deux points où cette parallèle rencontre le paraboloïde. Les produits $Mp.Mp'$

sont proportionnels aux valeurs du déterminant $(x_1\ y_2)$, où l'on met, pour x, y, z, les coordonnées de chaque point M. D'ailleurs, $dt_1\, dt_2\, (x_1\ y_2)$ est la projection, sur le plan des xy, de l'élément de surface décrit par le point M. On a donc ce théorème, qui comprend le corollaire ci-dessus :

Théorème II. — *Les projections, sur un plan donné, des éléments superficiels décrits par les points du corps, sont proportionnelles aux produits des segments interceptés, sur des sécantes parallèles issues de ces points, par un paraboloïde passant par les deux axes, et ayant le plan donné pour plan directeur.*

Supposons maintenant qu'il y ait trois variables. Dans ce cas, on peut, par l'équation (3), déterminer trois axes, dont chacun renferme une arbitraire. Ces axes forment donc une surface gauche, dont on obtient facilement l'équation comme ci-dessus, en remarquant que les coordonnées de chacun de ses points rendent possibles les trois équations simultanées : $dx = 0$, $dy = 0$, $dz = 0$, qui ne renferment que deux inconnues $\frac{dt_1}{dt_2}$, $\frac{dt_1}{dt_3}$. L'équation de cette surface est donc : $(x_1\ y_2\ z_3) = 0$. En effectuant les calculs, on s'apercevra que cette équation s'abaisse au deuxième degré. On peut aussi s'assurer de cet abaissement, en remarquant que le déterminant $(x_1\ y_2\ z_3)$, multiplié par $dt_1\ dt_2\ dt_3$, représente l'élément de volume décrit par le point dont les coordonnées sont x, y, z. Si l'on suppose que les conditions données soient la fixité d'un point, chaque point du corps décrit seulement un élément superficiel. Par suite, le déterminant ci-dessus est nul, si toutes les dérivées partielles de ξ, η, ζ s'annulent. Or, par cet évanouissement, ce déterminant se réduit aux termes du troisième degré en $x - \xi$, $y - \eta$, $z - \zeta$, et il n'a disparu que des termes de degré inférieur à 3. Donc les premiers sont toujours nuls. Ainsi $(x_1\ y_2\ z_3) = 0$ est un hyperboloïde dont chaque génératrice peut être prise pour un des trois axes de rotation. Donc :

Théorème III. — *Tous les déplacements d'un solide assujetti à trois conditions s'obtiennent par trois rotations autour de trois mêmes droites prises arbitrairement parmi les génératrices d'un hyperboloïde. Les points de cet hyperboloïde décrivent des éléments superficiels.*

Ce théorème a été énoncé par M. Mannheim (*loc. cit.*, p. 37). Mais la démonstration donnée par cet auteur ne s'applique qu'au cas où les trois conditions sont de nature à être ramenées chacune au mouvement d'un point sur une surface. D'après ce qui vient d'être dit, il y a toujours, dans un corps assujetti à trois conditions, une infinité de points qui se meuvent sur des surfaces. Le mouvement peut donc être défini par celui de trois de ces points ; mais cette propriété n'est pas évidente *a priori*. Comme plus haut, on peut encore dire que :

Théorème IV. — *Les volumes décrits par les points du corps sont proportionnels aux produits des segments interceptés sur des sécantes parallèles, issues de ces points, par l'hyperboloïde des axes.*

Supposons actuellement qu'il y ait quatre variables. L'équation (3) laisse subsister deux arbitraires pour la détermination de chaque axe de rotation. Ces droites forment donc une congruence. Pour trouver celles qui passent par un point donné, il suffit de déterminer les rapports de dt_1, dt_2, dt_3, dt_4 par les équations simultanées $dx = 0$, $dy = 0$, $dz = 0$, où x, y, z sont les coordonnées du point donné. On a ainsi trois équations linéaires. Donc, *par un point passe une droite de la congruence*. On trouvera aussi facilement qu'*il y a une droite de la congruence dans un plan donné*. Par suite, les droites de la congruence rencontrent deux droites fixes. J'admets ici la connaissance de cette propriété de la congruence d'ordre et de classe 1. Il est d'ailleurs bien facile de montrer directement ici que les droites ci-dessus rencontrent deux droites fixes.

En effet, les droites de la congruence sont indéterminées si on les astreint à passer par un point dont les coordonnées annulent à la fois les quatre déterminants

$$(x_1, y_2, z_3), \quad (x_2, y_3, z_4), \quad (x_3, y_4, z_1), \quad (x_4, y_1, z_2).$$

Chacun de ces déterminants égalé à zéro représente un hyperboloïde, d'après une remarque faite plus haut. Remarquons maintenant que les deux droites communes aux trois paraboloïdes obtenus en égalant à zéro $(x_1\, y_2)$, $(y_1\, z_2)$, $(z_1\, x_2)$ appartiennent à deux de ces hyperboloïdes, savoir : $(x_1 y_2 z_3) = 0$ et $(x_4 y_1 z_2) = 0$. Désignons ces deux droites par $(1, 2)$ et $(1, 2)'$. Nous avons six pareils couples de deux

droites : (2, 3) et (2, 3)', (3, 4) et (3, 4)', etc. Les deux hyperboloïdes $(x_1 y_2 z_3) = 0$ et $(x_1 y_1 z_2) = 0$ se coupent suivant deux autres droites qui rencontrent *dix* des douze droites ci-dessus. Il en résulte que ces deux droites appartiennent aux deux autres hyperboloïdes. Ainsi les quatre hyperboloïdes ont deux droites communes, et ces droites sont rencontrées par tous les axes. On voit immédiatement que la propriété des points de ces deux droites, de faire évanouir à la fois les quatre déterminants ci-dessus, peut être interprétée en disant que ces points décrivent des volumes nuls. Il est évident, en effet, que ces droites sont normales à tous les déplacements de leurs points. Par conséquent, ces points décrivent des éléments superficiels. On peut donc dire que :

Théorème V. — *Tous les déplacements d'un solide assujetti à deux conditions s'obtiennent par quatre rotations autour de quatre mêmes droites prises arbitrairement parmi celles qui rencontrent deux droites déterminées. Les points de ces deux dernières droites décrivent des éléments superficiels.*

S'il y a cinq variables, l'équation (3) laisse subsister, dans chaque axe de rotation, trois arbitraires. Ces droites forment un complexe. Cherchons celles de ces droites qui passent par un point (x, y, z) et sont dans un plan contenant ce point :

$$M(X - x) + N(Y - y) + P(Z - z) = 0.$$

La condition que la droite passe par le point donné fournit, comme précédemment, trois équations linéaires et homogènes entre les cinq différentielles dt. On exprimera que la droite est, en outre, contenue dans le plan donné par l'équation :

$$MA + NB + PC = 0,$$

qui est aussi linéaire et homogène. Par suite, il y a une droite satisfaisant aux conditions données. Donc :

Théorème VI. — *Tous les déplacements d'un solide assujetti à une condition s'obtiennent par cinq rotations autour de cinq mêmes droites, prises arbitrairement dans un complexe linéaire déterminé.*

Si la condition donnée est celle du mouvement d'un point sur une

surface, le complexe est formé des droites qui rencontrent la normale à cette surface, et les points de cette normale décrivent des éléments superficiels. Mais ce fait ne se produit pas en général. On verra sans peine qu'il faut et qu'il suffit, pour qu'il se produise, qu'il y ait une droite commune aux dix hyperboloïdes obtenus en égalant à zéro les dix déterminants $(x_i y_j z_k)$, où les nombres i, j, k sont 1, 2, 3, 4 ou 5.

Enfin, s'il y a six variables, on parvient immédiatement à ce théorème :

Théorème VII. — *Tous les déplacements d'un solide libre s'obtiennent par six rotations autour de six mêmes droites prises arbitrairement.*

En terminant cette Note, je ferai remarquer que l'on peut parvenir rapidement aux résultats qu'elle renferme, en faisant usage de deux théorèmes que j'ai communiqués à l'Académie des Sciences en 1871 et en 1872, et que j'ai déjà eu l'occasion de signaler à notre Société. Ces théorèmes sont relatifs aux droites communes à des complexes ou des congruences données. On en déduit immédiatement, dans les cas les plus simples : 1° que l'ordre et la classe de la congruence formée par les droites communes à deux complexes linéaires sont l'unité, ce qui d'ailleurs est évident *a priori* ; on en conclut aisément que cette congruence est formée par les droites rencontrant deux droites fixes ; 2° que les droites communes à trois complexes linéaires forment un hyperboloïde ; 3° que les droites communes à quatre complexes linéaires sont au nombre de *deux*.

Remarquons maintenant que, pour un déplacement dépendant d'une seule variable, les droites normales aux déplacements de leurs points forment un complexe linéaire. En prenant ce point de départ, dû à M. Chasles, nous en concluons que, pour les déplacements dépendant de deux variables, les droites normales aux déplacements de leurs points sont les droites communes à deux complexes linéaires. Elles rencontrent donc deux droites fixes, ce qui est le théorème de M. Mannheim. Pour les déplacements dépendant de trois variables, les droites normales aux déplacements de leurs points sont les droites communes à trois complexes linéaires. Ces droites forment donc un hyperboloïde. C'est le théorème III, ou, du moins, la seconde partie de ce théorème, d'où l'on peut déduire la première. Pour les dépla-

cements dépendant de quatre variables, on a de même deux droites normales à tous les déplacements de leurs points. C'est la seconde partie du théorème V. J'ajoute que cette théorie pourrait facilement être faite par la considération de la composition des rotations ; mais je me borne à cette simple indication.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS
DES
COURBES GAUCHES ALGÉBRIQUES.

Bulletin de la Société mathématique, t. II, 1873-1874; p. 69.

Une des plus importantes propriétés qu'on rencontre, dès le début, dans l'étude des courbes algébriques planes, consiste en ce que toutes les courbes d'un degré donné sont des cas particuliers d'un même être géométrique, la courbe plane générale de ce degré. On conçoit donc immédiatement l'existence, pour toutes ces courbes, de propriétés communes et ne dépendant que d'une seule variable, le degré. C'est ainsi que le nombre des points d'inflexion, celui des sommets, celui des points de rencontre avec une ligne donnée, s'expriment par des fonctions du degré.

Pour les courbes gauches algébriques, il n'en est point de même. On ne connaît, en effet, aucun être géométrique qui comprenne, comme cas particuliers, toutes les courbes gauches d'un degré donné. On ne peut donc, pour aucune propriété des courbes gauches, si générale qu'elle soit, affirmer *a priori* qu'elle ne dépend que du degré. Il existe cependant de telles propriétés : c'est ainsi que le nombre des points de rencontre d'une courbe gauche avec une surface donnée ne dépend, quant à la courbe, que de son degré.

En avançant davantage dans l'étude des courbes gauches algébriques, on y a reconnu l'existence de plusieurs propriétés ne dépendant que de deux variables, le *degré* et le *nombre des points doubles apparents*. Mais il faut bien se garder de croire que toutes les courbes gauches, pour lesquelles ces deux nombres ont des valeurs données, soient des cas particuliers d'une seule et même courbe générale satisfaisant à cette même condition. Ce fait est, il est vrai,

exact pour les degrés les plus simples. Mais dès qu'on envisage les courbes de degré un peu élevé, on en reconnaît facilement l'inexactitude, ainsi qu'on s'en convaincra par l'exemple suivant, choisi parmi les plus simples.

L'intersection complète de deux sufaces du troisième degré est une ligne du neuvième degré ayant, d'après une formule bien connue, 18 points doubles apparents. On reconnaît aisément que cette ligne est déterminée par 18 de ses points, c'est-à-dire qu'elle renferme 36 arbitraires. Désignons-la par la lettre C.

Considérons, d'autre part, la ligne C′, tracée sur un hyperboloïde et rencontrant les génératrices rectilignes de la surface respectivement en 6 et en 3 points. Cette ligne, qui est aussi du neuvième degré, possède aussi 18 points doubles apparents. D'après les formules bien connues qu'a données M. Chasles, elle renferme 27 arbitraires, l'hyperboloïde étant donné. Par suite, cette surface n'étant pas donnée, la ligne C′ renferme $27+9=36$ arbitraires.

Si l'on demande les courbes du neuvième degré, sans singularités, et ayant 18 points doubles apparents, on obtient donc, par les courbes C et C′, deux solutions du problème. Ces solutions sont d'ailleurs les seules; elles diffèrent entre elles et ont le même degré de généralité, puisqu'elles renferment le même nombre d'arbitraires. Ces deux courbes ont en commun toutes les propriétés ne dépendant que de ces deux nombres, le degré et le nombre des points doubles apparents. Mais elles diffèrent à l'égard des autres. Elles diffèrent au point de vue du degré minimum des surfaces qui les contiennent. Elles diffèrent encore au point de vue du degré minimum des surfaces monoïdes qui y passent : pour la courbe C, ce degré est 5 ; pour la courbe C′, ce degré est égal à 6.

Il serait d'un très grand intérêt de connaître le caractère général des propriétés des courbes qui ne dépendent que du degré et du nombre des points doubles apparents. La détermination des formules relatives à ces propriétés en serait généralement rendue très facile par le moyen des équations fonctionnelles.

Qu'il s'agisse, par exemple, de déterminer le degré de la surface engendrée par les droites qui rencontrent en trois points différents une courbe gauche algébrique. En admettant que ce degré ne dépende que de celui de la courbe et du nombre de ses points doubles apparents, on le détermine avec la plus grande facilité au moyen

des équations fonctionnelles (Voyez Salmon-Fiedler, *Analytische Geometrie des Raumes*, t. II, p. 528; Leipzig, 1865). Mais l'hypothèse n'étant nullement justifiée *a priori*, la démonstration n'a aucune valeur. Elle serait au contraire entièrement rigoureuse, et la plus rapide de toutes, si l'on possédait le moyen de reconnaître *a priori* que l'hypothèse est exacte.

Le degré de la surface dont il s'agit, ainsi que les formules relatives à beaucoup d'autres propriétés des courbes, ne dépendant que de leur degré et du nombre de leurs points doubles apparents, a été déterminé en toute rigueur par M. Zeuthen (*Annali di Mat.*, sér. II, t. III). Je me propose de donner ici quelques autres formules, qui sont dans le même cas, et qui ne me paraissent pas avoir été publiées jusqu'à présent.

Je m'appuierai sur les deux lemmes suivants, dont la démonstration est si facile que je crois pouvoir me dispenser de la donner :

Lemme I. — *Par chaque point d'une courbe gauche algébrique passent deux séries de plans, relatifs à ce point. Soient m et m_1 les nombres respectifs de ces plans relatifs à un même point, et c et c_1 les classes respectives de leurs enveloppes. Soit enfin x le nombre des couples de plans des deux séries, relatifs à un même point, et qui coïncident. Les intersections des plans de l'une et l'autre série, relatifs à un même point, forment une surface de degré $mc_1 + m_1 c - x$.*

Lemme II. — *Sur une surface réglée de degré p, considérons une courbe Q, de degré q, qui soit rencontrée en t points par les génératrices rectilignes de la surface, et par chaque point de laquelle passent χ génératrices. Soit de plus i le nombre des génératrices de la surface situées à l'infini. Par chaque point de Q, on mène les plans perpendiculaires aux génératrices qui y passent : la classe de l'enveloppe de ces plans est $pt + q\chi - it(\chi + 1)$.*

Appliquons le lemme II à une courbe Q, sans singularité, de degré q et de classe r, et à la surface développable dont elle est l'arête de rebroussement. Nous avons ici

$$t = 1, \qquad p = x, \qquad \chi = 1, \qquad i = 0.$$

Nous trouvons alors que la classe de l'enveloppe des plans normaux à Q est $q + r$, ce qui est bien connu.

Appliquons le lemme I à la même courbe, en considérant les deux séries des plans normaux et osculateurs. La classe de l'enveloppe de ces derniers est, comme on sait, égale à $3(r-q)$. D'ailleurs, il n'existe aucun point de la courbe où le plan normal et le plan osculateur coïncident. Donc on a

$$c = r + q, \qquad c_1 = 3(r-q), \qquad m = m_1 = 1, \qquad x = 0.$$

Par suite, le degré de la surface des normales principales est

$$c + c_1 = 4r - 2q.$$

Appliquons le lemme II à la courbe Q et à la surface de ses normales principales. Remarquons que la normale principale relative à un point à l'infini est, en général, à l'infini. Nous avons ici

$$t = 1, \qquad p = 4r - 2q, \qquad \chi = 1, \qquad i = q.$$

Nous trouvons ainsi la classe de l'enveloppe des plans rectifiants de Q, qui est égale à $4r - 3q$.

Ce dernier résultat s'obtient encore au moyen du lemme I. Considérons, en effet, les deux séries des plans osculateurs et rectifiants. On aura ici

$$c = 3(r-q),$$

et c_1 sera inconnu. Mais on sait que le degré de la surface formée par leurs intersections, qui est la développable dont Q est l'arête de rebroussement, est égal à r. D'ailleurs le nombre x des points de Q où les deux plans coïncident est facile à déterminer. C'est, en effet, le nombre des plans osculateurs *isotropes*. Il resterait à démontrer que chacun de ces plans ne figure que pour une unité dans le nombre x. Je ne m'arrêterai pas sur ce point, facile à élucider, et j'écrirai donc

$$x = 6(r-q), \qquad c_1 + 3(r-q) = r + 6(r-q);$$

d'où

$$c_1 = 4r - 3q.$$

On obtiendra aussi de deux manières le degré de la surface engendrée par les binormales de Q :

1° Par le lemme I, en considérant les deux séries des plans normaux et rectifiants. Ils coïncident quand la tangente est *isotrope* ; c'est-

à-dire $2r$ fois. Le degré cherché est donc

$$(4r-3q)+(q+r)-2r=3r-2q.$$

2° Par le lemme II, en remarquant que q binormales sont à l'infini, et que, par suite, le degré cherché, diminué de q, reproduit la classe de l'enveloppe du plan osculateur. Donc cette classe $3(r-q)$, augmentée de q, est le degré cherché : $3r-2q$.

Nous résumons ces résultats de la manière suivante :

Théorème. — *Pour une courbe gauche de degré q et de classe r, sans singularité :*

1° *L'enveloppe des plans rectifiants est de la classe $4r-3q$,*
2° *La surface des normales principales est de degré $4r-2q$,*
3° *La surface des binormales est de degré $3r-2q$* (1).

J'ajoute encore qu'on peut aisément déterminer :

Le nombre des normales principales qui rencontrent de nouveau la courbe, qui est égal à $(q-1)(4q-2r)-3r$;

Le nombre des binormales qui rencontrent de nouveau la courbe, et qui est égal à $(q-1)(3r-2q)-r$;

Le nombre des droites à distance finie qui sont normales à la courbe en deux points différents, et qui est égal à

$$\frac{(q+r)(q+r-1)}{2}-2r.$$

Ce dernier résultat s'applique également aux courbes planes; on doit alors faire $r=q(q-1)$.

---

(1) Dans l'Ouvrage précédemment cité, M. Fiedler donne, sans démonstration, pour les degrés de ces deux dernières surfaces, et dans un cas particulier, des évaluations inexactes.

SUR

UN POINT DE LA THÉORIE DE CONTACT.

Bulletin de la Société mathématique, t. II, 1873-1874, p. 94.

Quand deux surfaces se touchent le long d'une ligne, il peut se présenter, en certains points de cette ligne, des particularités sur lesquelles je me propose de dire quelques mots. L'étude de ces particularités se fait aisément au moyen des conditions analytiques du contact supposé.

En chaque point de la ligne de contact C, les dérivées partielles des divers ordres d'une coordonnée par rapport à deux autres, prises relativement aux deux surfaces, satisfont à des équations de condition, que l'on peut obtenir directement, ainsi que je vais l'expliquer brièvement pour le cas le plus simple : celui où les deux surfaces S et S' ont, le long de C, un contact du premier ordre.

Désignons par z et z' les ordonnées de S et de S'. En chaque point de C, on a, outre $z - z' = 0$,

$$(1) \qquad \frac{d(z-z')}{dx} = 0, \qquad \frac{d(z-z')}{dy} = 0.$$

Les dérivées de tous les ordres des premiers membres de ces deux équations, prises le long de C, sont aussi nulles en chaque point de C. En dérivant une fois, on obtient deux équations contenant $\frac{dy}{dx}$. Éliminant cette quantité, on a une relation entre les dérivées partielles jusqu'au deuxième ordre. Dérivant une seconde fois, on introduit $\frac{d^2y}{dx^2}$ et l'élimination conduit à une nouvelle relation entre les dérivées partielles jusqu'au troisième ordre. Continuant ainsi, on

obtient, à chaque nouvelle dérivation, une relation nouvelle entre les dérivées partielles relatives aux deux surfaces.

Si les deux surfaces S et S′ avaient, le long de C, un contact d'un ordre plus élevé, on formerait facilement, et d'une manière analogue, les relations nécessaires. On peut aussi, par un autre procédé, parvenir d'un seul coup à ce résultat pour le cas général.

Soient

$$z = \varphi(x, y), \qquad z' = \varphi'(x, y)$$

les équations des deux surfaces. Nous en concluons

$$z - z' = \varphi(x, y) - \varphi'(x, y) = \mathrm{F}(x, y).$$

Il est clair que $\mathrm{F}(x, y) = 0$ est l'équation de la projection, sur le plan des xy, de la ligne commune aux deux surfaces S, S′. Une portion de cette projection est la projection de la ligne C. Soit

$$f(x, y) = 0$$

l'équation de cette projection. On a donc

$$z - z' = \mathrm{F}(x, y) = \chi(x, y)\,[f(x, y)]^m, \tag{2}$$

m étant un nombre positif et $\chi(x, y)$ ne contenant plus le facteur $f(x, y)$. Si l'on prend un point (x, y) à distance infiniment petite du premier ordre d'un point M arbitraire de la courbe $f(x, y) = 0$, $\chi(x, y)$ a une valeur finie, et $[f(x, y)]^m$ est infiniment petit de l'ordre m. On a donc, sur les surfaces S, S′, deux points dont la distance $z - z'$ est infiniment petite d'ordre m. Donc $m - 1$ est l'ordre du contact des deux surfaces le long de la ligne C. Donc :

Si deux surfaces ont un contact d'ordre $m - 1$ le long d'une ligne dont la projection a pour équation $f(x, y) = 0$, leurs ordonnées satisfont à une relation telle que (2).

Je n'ai pas besoin d'insister sur la marche à suivre pour obtenir, au moyen de la relation (2), les équations dont il a été parlé plus haut et dont je n'ai pas à faire usage.

Je fais observer que l'équation (2) s'applique à tous les cas, sans excepter ceux où m est fractionnaire, cas dans lesquels la ligne C est une ligne singulière sur l'une au moins des deux surfaces. Je déduis maintenant quelques conséquences relatives au cas où m est

entier, et où la ligne C est une ligne simple de chacune des deux surfaces.

Soit A un point de la ligne C; je le suppose de multiplicité μ sur cette courbe, et simple sur les deux surfaces. Je suppose de plus que la courbe complémentaire D d'intersection des deux surfaces y passe aussi, et que ν soit la multiplicité de A sur D (je n'exclus pas le cas où $\nu = 0$). Cela étant, l'équation (2) montre immédiatement qu'au point A les deux surfaces ont un contact d'ordre $m\mu + \nu - 1$. Donc :

Théorème. — *Si deux surfaces ont, tout le long d'une ligne, simple sur chacune d'elles, un contact d'ordre $m - 1$, et qu'un point particulier de cette ligne, simple sur les deux surfaces, et multiple d'ordre μ sur la ligne elle-même, soit de multiplicité ν sur la ligne complémentaire d'intersection des deux surfaces, le contact des deux surfaces est, en ce point, d'ordre $m\mu + \nu - 1$.*

La réciproque est vraie; c'est-à-dire que si, en un point A, les surfaces ont un contact d'ordre $M - 1$, supérieur à $m - 1$, on a nécessairement

$$m\mu + \nu = M.$$

De là résulte que, sur la courbe D, le point A a une multiplicité au moins égale au reste de la division de M par m, et, sur la ligne C, une multiplicité au plus égale au plus grand entier contenu dans $\frac{M}{m}$.

De notre théorème résulte ce corollaire que :

Si un point de la ligne de contact des surfaces ci-dessus, simple sur les deux surfaces, est, sur cette ligne, de multiplicité μ, le contact des deux surfaces est, en ce point, au moins d'ordre $m\mu - 1$.

Il est entendu que tout ceci s'applique quelle que soit la nature des points multiples considérés. Ainsi ce qui résulte du théorème pour le cas d'un point double en résulte également pour le cas d'un point de rebroussement ordinaire, etc.

Un exemple du contact de deux surfaces le long d'une ligne est offert par la considération d'une surface mobile et de son enveloppe. Ces deux surfaces se touchent le long de la *caractéristique*, qui est l'intersection de deux surfaces consécutives. Si la caractéristique a un point multiple d'ordre μ, et d'ailleurs simple sur la surface mobile,

c'est que les deux surfaces consécutives ont, en ce point, un contact d'ordre $\mu - 1$. Nous en concluons, conformément à notre corollaire, et en faisant $m = 2$:

Si, dans une série de surfaces, deux surfaces consécutives ont, en un point, un contact d'ordre $\mu - 1$, *la surface enveloppée a, en ce point, avec l'enveloppe, un contact d'ordre au moins égal à* $2\mu - 1$.

SUR LES POINTS SINGULIERS

DES

COURBES ALGÉBRIQUES PLANES.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 78, 1874, p. 1105.

Dans le Mémoire que j'ai l'honneur de soumettre à l'Académie, je me suis proposé d'étudier l'influence des points singuliers tant sur les propriétés générales des courbes algébriques planes que sur les affections des courbes dérivées, notamment les courbes corrélatives et les développées. Ce travail est divisé en sept articles.

Dans le premier article, après quelques considérations générales, je m'occupe du problème suivant : *Deux courbes se rencontrant en un point singulier, quel est le nombre de leurs intersections qui y sont confondues?* Ce problème a fait l'objet de plusieurs travaux, dus notamment à MM. Cayley, de la Gournerie et Painvin [1]. Je ne m'occupe pas du problème, plus spécialement considéré par M. Painvin, et qui consiste à trouver ce nombre sans former les développements en série qui représentent, aux environs du point considéré, les branches des deux courbes. La solution de ce problème est facile, grâce aux propositions que je donne ; mais, comme cette question m'a paru ne pas tenir au fond même de la théorie, j'ai cru devoir la réserver pour un travail séparé. Je démontre donc simplement les propositions qui montrent quels sont les éléments géométriques intervenant dans la question, en particulier ce théorème, contenu implicitement dans un Mémoire de M. Cayley et généralement accepté :

[1] *Quarterly Journal*, t. VII. — *Journal de Mathématiques*, 2e série, t. XIV et XV. — *Comptes rendus*, t. LXXVII. — *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, t. IV et V.

THÉORÈME. — *Le nombre des intersections de deux courbes, réunies en un point, est égal au produit des multiplicités de ce point sur les deux courbes, augmenté de la somme des ordres des contacts des branches d'une courbe avec les branches de l'autre.*

Ce théorème, qui est, comme on le voit, une extension des principes élémentaires relatifs aux points simples, est lui-même un cas particulier d'une proposition plus générale que j'ai déjà énoncée ([1]), et qui est entièrement démontrée dans le présent Mémoire.

Dans l'article II, j'applique aux courbes quelques-uns des principes contenus dans le *Mémoire sur les fonctions algébriques*, de M. Puiseux ([2]), et j'en donne, comme il suit, l'interprétation géométrique :

THÉORÈME. — *Aux environs d'un point singulier quelconque, une courbe plane algébrique est représentée, avec telle approximation qu'on veut, par la projection de plusieurs courbes gauches distinctes, aux environs de points simples de ces courbes.*

Dans les articles III et IV, je donne des développements algébriques propres à faire connaître la nature intime des points singuliers, leur transformation dans les courbes corrélatives, l'abaissement qu'ils produisent dans la classe d'une courbe, le nombre des points d'inflexion qu'ils absorbent. Ces dernières questions sont traitées, dans l'article V, par une autre méthode, dérivant des propositions de l'article Ier. J'indique les plus importantes des propositions contenues dans cette partie de mon travail.

THÉORÈME. — *La somme des ordres des contacts des branches d'une courbe avec une de ses tangentes est égale à la multiplicité du point correspondant à cette tangente dans la courbe corrélative.*

THÉORÈME. — *La somme des ordres des contacts de deux courbes en un point est égale à la même somme pour les courbes corrélatives aux points correspondants.*

([1]) *Bulletin de la Société mathématique*, t. I, p. 130.

([2]) *Journal de Mathématiques*, 1850.

Théorème. — *L'abaissement de la classe d'une courbe, dû à un point singulier quelconque, est égal au double de la somme des ordres des segments infiniment petits et infiniment voisins de ce point, interceptés par la courbe sur une sécante dont la distance au point singulier est infiniment petite du premier ordre, et qui fait des angles finis avec les tangentes de la courbe en ce point.*

Ce théorème est implicitement contenu dans un Mémoire de M. Cayley.

Théorème. — *Le nombre des points d'inflexion absorbés par un point singulier est égal au triple de l'abaissement que ce point produit dans la classe, diminué de sa multiplicité, et augmenté de la somme des multiplicités des points qui lui correspondent dans la courbe corrélative.*

Dans les articles VI et VII, je m'occupe des développées. Je détermine les abaissements qui se produisent dans le degré et dans la classe de la développée d'une courbe, par suite de la présence de points singuliers quelconques sur cette courbe. Je détermine aussi la nature des points correspondants sur cette développée. Les propositions que je démontre sont très simples et tout à fait générales. Il a été nécessaire de considérer plusieurs cas différents, ce qui multiplie le nombre de ces propositions ; aussi ne les énoncerai-je pas ici. Il suffira de dire qu'il m'a été possible d'en déduire deux lois générales auxquelles sont soumises les *développées successives* d'une courbe algébrique donnée. Ces courbes, à partir d'un rang déterminé dépendant de la courbe initiale, sont soumises aux lois suivantes :

Théorème. — *A partir d'un certain rang, tous les points non à l'infini de l'une quelconque des développées sont tels que leurs correspondants, dans toutes les suivantes, ne sont jamais à l'infini.*

Théorème. — *A partir d'un certain rang, les degrés et les classes des développées successives d'une courbe algébrique quelconque forment deux progressions arithmétiques de même raison.*

Ainsi, par exemple, la $n^{\text{ième}}$ développée d'une parabole est du degré et de la classe $(2+n)$.

Pour une courbe *générale* de degré m, le degré et la classe de la

première développée sont, comme on sait,

$$m_1 = 3m(m-1), \qquad c_1 = m^2;$$

pour la deuxième développée

$$m_2 = m(9m-13), \qquad c_2 = 4m(m-1),$$

et pour la $(n+2)^{\text{ième}}$

$$m_{n+2} = m_2 + 2nm(3m-5), \qquad c_{n+2} = c_2 + 2nm(3m-5).$$

Je donne encore d'autres exemples où le rang à partir duquel la loi s'applique est une fonction numérique. Les cas les plus particulièrement intéressants sont ceux où la raison des progressions arithmétiques est nulle : c'est ce qui se produit pour les épicycloïdes algébriques et pour deux catégories de courbes comprises dans les énoncés suivants :

Théorème. — *Soit une courbe de degré* $2n$, *ayant à distance finie* $(n-1)$ *points de rebroussement ordinaires et* $(n-1)(n-2)$ *points doubles, et à l'infini sur un cercle deux points corrélatifs du point de* $(n-1)^{ple}$ *inflexion. Ses développées successives sont du même degré et de la même classe ; l'arc de cette courbe est algébrique.*

J'appelle *point de* $(n-1)^{ple}$ *inflexion* un point *simple* où une courbe a avec sa tangente un contact d'ordre $n \geqq 2$.

La courbe dont il est question dans ce dernier énoncé est la corrélative d'une courbe unicursale de degré $(n+1)$, douée de $\frac{n(n-1)}{2}$ points doubles et de deux points de $(n-1)^{\text{ple}}$ inflexion. Un cas particulier de cette dernière est fourni par l'équation

$$xy\frac{x^n - y^n}{x-y} + \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x-y} = 0,$$

où n est entier.

Un théorème entièrement semblable a lieu pour la corrélative de la courbe

$$x^n y^n + \mathrm{P} = 0,$$

P étant un polynome homogène de degré $(2n+1)$; cette corrélative doit être prise de telle sorte que les points circulaires à l'infini y soient les transformés des axes de coordonnées. On voit qu'il s'agit encore d'une courbe unicursale.

MÉMOIRE
SUR LES POINTS SINGULIERS
DES COURBES ALGÉBRIQUES PLANES.

Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences (¹), t. XXVI, n° 2.

INTRODUCTION.

Je me propose d'étudier, dans ce Mémoire, l'influence des points singuliers des courbes algébriques planes, tant sur les propriétés générales de ces courbes que sur les affections des courbes dérivées, par exemple, les corrélatives et les développées.

L'Ouvrage le plus important qui ait été écrit sur cette matière est dû à M. Cayley (*Quarterly Journal*, t. VII). Le *Mémoire sur les fonctions algébriques* de M. Puiseux (*Journal de Mathématiques*, 1850) contient implicitement, sous la forme algébrique, des résultats fondamentaux sur la théorie des points singuliers. M. de la Gournerie lui a consacré plusieurs recherches (*Journal de Mathématiques*, t. XIV et XV; *Comptes rendus*, t. LXXVII). Enfin M. Painvin a, en diverses occasions (notamment *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, t. IV et V), traité quelques-unes des questions de cette théorie (²).

(¹) *Voir* sur ce Mémoire le rapport de M. de la Gournerie, concluant à l'insertion dans le *Recueil des Savants étrangers* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 80, 1ᵉʳ sem. 1875, p. 97.) [Note des éditeurs.]

(²) Le Mémoire actuel a été présenté à l'Académie au mois d'avril 1874. On ne s'étonnera donc pas de n'y pas voir citer les recherches de M. Smith (*Soc. math. de Londres*) et celles de M. Zeuthen (*Math. Ann.*), dont la publication est postérieure.

Je vais indiquer succinctement le plan du présent travail, en mentionnant au fur et à mesure les résultats empruntés à ces géomètres.

Ce Mémoire est divisé en sept articles.

Dans l'Article I[er], après avoir défini les points singuliers des courbes algébriques, je fais remarquer la différence essentielle qui existe entre deux espèces de points singuliers : ceux où une courbe peut être considérée comme la superposition de plusieurs courbes distinctes en un point, simple sur chacune d'elles; ceux où il n'est pas possible de le faire. Ces derniers seuls exigent une théorie spéciale. Deux courbes se coupant en un pareil point, on doit se demander quel est le nombre de leurs intersections qui y sont réunies. M. Cayley a indiqué la solution de ce problème, et M. de la Gournerie a appliqué cette solution à plusieurs exemples. Je donne une démonstration complète du principe de cette solution, que j'énonce sous forme de théorème. J'en ai déjà fait usage dans un Mémoire antérieur (*Bulletin de la Société mathématique*, t. I. p. 130). Pour appliquer cette solution, il faut, comme l'a fait M. de la Gournerie, calculer certains développements en série, ou du moins quelques termes de ces développements, qui représentent des branches des courbes considérées. M. Painvin a, dans quelques cas, du reste fort étendus, résolu le même problème sans recourir à ces développements. La généralisation des solutions de ce géomètre peut se faire facilement au moyen des principes contenus dans l'Article I[er] du Mémoire actuel. Mais cette question m'ayant paru ne point tenir au fond même de la théorie, j'ai cru devoir la réserver pour un travail séparé.

L'Article II contient la démonstration des résultats que j'ai signalés plus haut dans le Mémoire de M. Puiseux, et leur interprétation géométrique, qui est la suivante : *Aux environs d'un point singulier quelconque, une courbe algébrique peut être considérée comme la projection de plusieurs courbes distinctes aux environs de points simples de ces courbes.*

Dans les Articles III et IV, je développe les résultats algébriques de l'Article précédent; je montre comment, des équations des branches d'une courbe en un point singulier, on peut déduire celles des branches corrélatives. Ce calcul avait été déjà indiqué, mais moins complétement, par M. Cayley. J'en conclus le nombre des points d'inflexion absorbés par un point singulier quelconque.

Ces trois Articles doivent être considérés comme servant principalement à faire connaître la nature intime des points singuliers. Ils ne sont pas indispensables pour l'intelligence des suivants, où il n'est plus fait usage des équations séparées des branches de courbe. J'ai rejeté, à une Note placée à la fin de ce Mémoire, quelques calculs indispensables, qui, dans le cours de l'Article IV, auraient ralenti la suite des raisonnements, et qui se simplifient par leur réunion.

Dans les Articles suivants, je fais usage d'un procédé de calcul assez expéditif, qui prend naissance dans les propositions de l'Article Ier. J'applique ce procédé, dans l'Article V, au calcul de l'abaissement de la classe d'une courbe dû à un point singulier quelconque, en reproduisant un raisonnement de M. Cayley, rendu rigoureux, grâce aux propositions de l'Article Ier. Je calcule aussi de même le nombre des points d'inflexion absorbés, et je détermine de nouveau la nature des points correspondants dans la courbe corrélative.

L'Article VI est consacré à l'étude de la développée d'une courbe algébrique quelconque, point sur lequel M. de la Gournerie avait tout spécialement attiré l'attention des géomètres. Je résous les questions qui s'offrent dans cette étude assez complètement pour pouvoir y comprendre les développées successives de la courbe et donner, dans l'Article VII, une loi tout à fait générale et très simple, suivant laquelle varient les degrés et les classes de toutes les développées successives d'une courbe algébrique entièrement arbitraire. J'indique, enfin, par deux exemples, comment on peut déduire de ces résultats des catégories étendues de courbes algébriquement rectifiables.

ARTICLE PREMIER.

1. Les premiers principes de l'Analyse infinitésimale conduisent immédiatement à la notion de la tangente à une courbe plane en un point quelconque de cette courbe, et à la connaissance des propriétés fondamentales de cette tangente. Je vais rappeler brièvement ces propriétés, en faisant observer toutefois que je n'ai en vue, pour la suite de ce Mémoire, que les courbes algébriques. Je n'aurai donc pas égard aux dificultés particulières qui s'offrent, dans le cas où l'équation de la courbe en coordonnées rectilignes étant $F(x, y) = 0$, la fonction $F(x, y)$, aux environs d'un point de la courbe, n'est pas développable par la formule de Taylor.

Soit A un point d'une courbe plane. A distance infiniment petite du premier ordre de A menons une sécante de direction arbitraire. Parmi les points où cette sécante rencontre la courbe, il y en a, en général, un et *un seul* qui soit infiniment voisin de A. Cela étant, le point A est un point *simple* de la courbe. Il existe alors une droite unique passant en A, et telle que le segment infiniment petit unique intercepté par cette droite et la courbe sur la sécante soit d'un ordre supérieur au premier. Cette droite est la *tangente* en A. L'ordre de ce segment est, en général, égal à 2; ou, d'après une définition usuelle, la tangente et la courbe ont, en A, *un contact du premier ordre*. Cela étant, on trouve cette nouvelle propriété que deux des points d'intersection de la tangente et de la courbe sont réunis en A.

Parmi les points simples, il en existe pour lesquels ces deux dernières propriétés n'ont pas lieu. Ce sont les points simples exceptionnels, où l'ordre du contact de la courbe et de sa tangente surpasse l'unité. En ces points, l'ordre de ce contact est toujours un nombre entier. On trouve alors que, si n est l'ordre de ce contact, le nombre des points d'intersection de la courbe et de la tangente réunis au point de contact est $n+1$. Tel est le cas des *points d'inflexion*.

2. Un point B d'une courbe plane est dit *multiple* ou *singulier*, si, parmi les points d'intersection de la courbe et d'une sécante infiniment voisine de B, il y en a *plusieurs* (réels ou imaginaires) qui soient infiniment voisins de B, *quelle que soit la direction de la sécante*. Le nombre de ces points est la *multiplicité* du point B sur la courbe. La distance de la sécante arbitraire au point B étant du premier ordre, les segments infiniment petits interceptés sur cette sécante par la courbe et une droite (B) quelconque, menée par B, sont aussi du premier ordre. Mais il existe une ou plusieurs droites (B) telles que, parmi ces segments, il y en ait d'ordre supérieur au premier, quelle que soit la direction de la sécante. Ces droites (B) sont les *tangentes* de la courbe au point B. Si le nombre de ces tangentes est égal à la multiplicité du point B, on reconnaît aisément, ainsi qu'on le verra bientôt, que l'ordre du contact de chacune d'elles avec la courbe est, comme précédemment, un nombre entier. La courbe peut alors, aux environs du point B, être assimilée, avec telle approximation que l'on voudra, à plusieurs courbes distinctes, se coupant au point B, qui, sur chacune d'elles, est un point simple. On conçoit

donc que de tels points singuliers n'exigent aucune étude spéciale, toutes leurs propriétés découlant immédiatement de celles des points simples. Par exemple, on reconnaît de suite que le nombre des points communs à la courbe et à une de ses tangentes réunis en un tel point est égal à la multiplicité de ce point, augmentée de l'ordre du contact de la tangente et de la courbe.

Une pareille assimilation n'est évidemment plus possible si, au point B, une tangente a, avec la courbe, des contacts d'ordre fractionnaire. C'est ce qui arrive, par exemple, au point de *rebroussement* que présente, à l'origine des coordonnées, la courbe $x^2=y^3$. Ce point est *double*. La courbe y possède une tangente unique, l'axe des y, avec laquelle elle a deux contacts d'ordre $\frac{1}{2}$. Pour de tels points singuliers, quel est le nombre des intersections de la courbe et d'une de ses tangentes, réunies au point de contact? Étendant à ce cas les résultats relatifs aux points simples que je viens de rappeler, M. Cayley résout la question au moyen d'un raisonnement qu'il suffira d'appliquer à l'exemple ci-dessus pour le faire comprendre.

L'axe des y a un contact d'ordre $\frac{1}{2}$ avec chacune des deux branches de la courbe à l'origine. Il a donc, en ce point, $\left(\frac{1}{2}+1\right)$ points d'intersection, avec chacune de ces branches, réunis. Par suite, à l'origine, le nombre des points d'intersection réunis de cette droite et de la courbe est $2\left(\frac{1}{2}+1\right)=3$. Ce dernier résultat est, en effet, exact. Mais il est indispensable de s'assurer que pareil raisonnenent conduira, dans tous les cas, au résultat cherché. Nous y parviendrons aisément au moyen d'une proposition qui va être établie immédiatement.

3. J'établis d'abord un lemme, conséquence immédiate d'une proposition bien connue.

Soit $F(x, y)=0$ l'équation sous forme entière d'une courbe algébrique; soient, dans son plan, deux points quelconques m, μ, ayant pour coordonnées a, b et α, β. Par ces deux points menons deux sécantes parallèles rencontrant la courbe respectivement en des points n, n', ... et ν, ν', ...

On a la relation

$$\frac{mn.mn'\ldots}{F(a,b)}=\frac{\mu\nu.\mu\nu'\ldots}{F(\alpha,\beta)}.$$

Le point μ restant quelconque, supposons que le point m soit infiniment voisin d'un point A de la courbe, et dont la multiplicité soit ρ. Dans ce cas, pour une direction quelconque des sécantes, il y a, parmi les points n, n', ..., ρ points infiniment voisins de m. Si la direction des sécantes coïncide avec celle d'une des tangentes en A, le nombre des points n, n', ..., infiniment voisins de m, est supérieur à ρ. Dans l'un et l'autre cas, tous les segments $\mu\nu$, $\mu\nu'$, ... sont finis. Par suite, la somme des ordres des segments infiniment petits mn, mn', ..., est égale à l'ordre de $F(a, b)$, quelle que soit la direction des sécantes, pourvu que les segments $\mu\nu$, $\mu\nu'$, ..., soient tous finis.

Il reste à considérer ce qui arrive quand cette dernière supposition n'a pas lieu, c'est-à-dire lorsque les sécantes deviennent parallèles à une asymptote de la courbe. Soit donc D une sécante issue de m, et dont la direction soit celle d'une asymptote. Je vais montrer que, dans ce cas encore, la somme des ordres des segments infiniment petits mn, mn', ..., est égale à l'ordre de $F(a, b)$.

Pour calculer les segments tels que mn, on procède de la manière suivante. On transporte les axes parallèlement à eux-mêmes au point m, en posant

$$x = a + \xi, \qquad y = b + \eta.$$

Désignant par θ l'angle de la sécante avec l'axe des ξ, on remplace ξ et η par $r\cos\theta$, $r\sin\theta$. On obtient ainsi

$$(1) \qquad 0 = F(x, y) = F(a + \xi, b + \eta) = A_0 + A_1 r + A_2 r^2 + \ldots.$$

Cette équation détermine les valeurs de r ou des segments mn, mn', ... Dans le cas où quelques-uns de ces segments sont infiniment petits, il en est de même de quelques-uns des coefficients A_0, A_1, ... Pour déterminer la partie principale d'une quelconque des racines r, infiniment petites, on peut ne prendre dans l'équation (1) qu'une partie de ses termes. Si, par exemple, A_i est le premier des coefficients A_0, A_1, ..., A_i qui ait une valeur finie, il sera inutile de considérer les termes suivants. Si donc j'ajoute, dans le second membre de (1), des termes $B_k r^k$, de degré supérieur à i, et à coefficients finis, la nouvelle équation contient le même nombre de racines infiniment petites que (1), et ces deux groupes de racines ont les mêmes parties principales.

Je prends pour chaque coefficient B_k un polynome homogène de degré k en $\cos\theta$ et $\sin\theta$. De cette façon, la simple substitution de x et y à $a+r\cos\theta$, $b+r\sin\theta$, dans le second membre modifié, donne lieu à un polynome en x, y, que je désigne par $\Phi(x, y)$. Je considère la courbe $\Phi(x, y)=0$, et les points n_1, n'_1, ... infiniment voisins de m, où la sécante D la rencontre. La somme des ordres des segments mn_1, mn'_1, ... est égale à celle des ordres des segments mn, mn', ...

D'ailleurs, en vertu de (1) on a

$$F(a, b)=A_0,$$

et de même

$$\Phi(a, b)=A_0;$$

donc

$$F(a, b)=\Phi(a, b).$$

Or on peut disposer des termes que l'on a ajoutés au second membre de (1), de manière à fixer, à volonté, la direction des asymptotes de la seconde courbe. On peut donc supposer que D n'a pas pour direction celle d'une asymptote de cette dernière.

Donc la proposition ci-dessus s'applique à cette courbe, et la somme des segments mn_1, mn'_1, ... est égale à l'ordre de $\Phi(a, b)$.

Donc la somme des ordres des segments mn, mn', ... est égale à l'ordre de $F(a, b)$.

J'ai donc, sans aucune restriction, la proposition suivante :

Lemme. — *Si, par un point m, infiniment voisin d'une courbe algébrique, on mène une sécante de direction quelconque, la somme des ordres des segments infiniment petits interceptés sur cette sécante, entre le point m et la courbe, est indépendante de la direction de la sécante. Si* $F(x, y)=0$ *est l'équation de la courbe en coordonnées rectilignes et sous forme entière, cette somme est égale à l'ordre de* $F(a, b)$, *a et b étant les coordonnées du point m.*

4. Prenons maintenant, pour la sécante issue du point m, la droite mA, qui joint le point m au point A de la courbe. Soit ω le nombre des points d'intersection de cette droite et de la courbe, réunis en A. Nous avons alors ω segments infiniment petits, égaux à mA. Si nous supposons mA infiniment petit du premier ordre, la

somme des ordres de ces segments est égale à ω. Par suite, ω est égal à l'ordre de $F(a, b)$.

Mais, en vertu du lemme précédent, cet ordre est égal à la somme des ordres des segments infiniment petits interceptés entre le point m et la courbe sur toute sécante issue de m. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème I. — *Le nombre des intersections d'une courbe algébrique et d'une droite réunies en un point* A *est égal à la somme des ordres des segments infiniment petits interceptés par la courbe et la droite sur une sécante quelconque, rencontrant la droite en un point dont la distance à* A *est infiniment petite du premier ordre.*

Corollaire I. — *La somme des ordres de ces segments est toujours un nombre entier.*

Désignons par (A) la droite issue de A et par D la sécante que nous supposerons donnée, à distance infiniment petite du premier ordre du point A, et faisant des angles finis avec les tangentes de la courbe en A.

Si la droite (A) a une direction quelconque, les segments infiniment petits interceptés sur D par cette droite et la courbe sont du premier ordre. La somme ω de leurs ordres est égale à leur nombre ou à la multiplicité ρ du point A.

Si la droite (A) coïncide avec une tangente de la courbe en A, quelques-uns de ces segments sont d'ordre supérieur au premier. Soient alors $(1+\alpha_1)$, $(1+\alpha_2)$, ..., $(1+\alpha_\rho)$ les ordres de ces segments, quelques-uns des nombres positifs α pouvant être nuls.

D'après le théorème I, le nombre des intersections de (A) avec la courbe, réunies en A, est égal à

$$\sum(1+\alpha) = \rho + \sum\alpha.$$

Donc :

Corollaire II. — *Le nombre des intersections d'une courbe algébrique avec une de ses tangentes, confondues au point de contact, est égal à la multiplicité de ce point, augmentée de la somme des ordres des contacts de cette tangente avec les différentes branches de la courbe au même point.*

Par suite, *la somme des ordres de ces contacts est toujours un nombre entier.*

Si le nombre des tangentes, au point A, est égal à la multiplicité du point, en faisant coïncider (A) avec l'une d'elles, on n'a qu'un seul segment dont l'ordre surpasse l'unité. L'ordre de ce segment est donc un nombre entier. Ainsi, dans ce cas, chaque tangente a, avec la courbe, un contact d'un ordre entier, comme on l'a annoncé plus haut.

On remarquera que le corollaire II justifie pleinement le procédé employé par M. Cayley pour compter le nombre des intersections d'une courbe et de sa tangente, confondues au point de contact.

5. C'est en procédant d'une manière analogue à celle que j'ai rappelée pour ce dernier problème, que M. Cayley parvient à compter le nombre des intersections de deux courbes algébriques, confondues en un point singulier commun à ces deux courbes. La solution de ce dernier problème va m'occuper maintenant. Il serait aisé d'y parvenir directement par l'application des principes généraux de l'élimination. Je suivrai ici, de préférence, une marche analogue à celle qu'a suivie M. Chasles pour la démonstration géométrique du théorème de Bezout. (*Comptes rendus*, t. LXXV et LXXVI.)

Soient S, S′ deux courbes algébriques d'un même plan. Prenons pour *points correspondants*, sur l'une et l'autre courbe, les points qui ont même ordonnée y, et considérons la courbe Σ, engendrée par un point dont les coordonnées rectilignes ξ, η soient les abscisses x, x' de deux points correspondants. Chaque couple de points correspondants est représentée par un point de Σ; un couple de points correspondants et confondus, par un point d'intersection de Σ et de la bissectrice des axes. Pour compter le nombre des intersections de S et de S′ réunies en un point O, il suffit donc de compter le nombre des intersections de Σ et de la bissectrice des axes réunies au point Ω, qui représente le point O. Pour compter ce dernier nombre, on n'aura qu'à appliquer le théorème I.

Prenons le point O pour origine des coordonnées x, y. Le point Ω est alors l'origine des coordonnées ξ, η. Menons une sécante parallèle à l'axe $\Omega\eta$, d'abscisse ξ infiniment petite du premier ordre. Si η est l'ordonnée d'un point de Σ, d'abscisse ξ, les segments interceptés par Σ et la bissectrice des axes sont proportionnels aux diffé-

rentes valeurs de $(\eta - \xi)$. Le nombre cherché est donc la somme des ordres des valeurs infiniment petites de $(\eta - \xi)$.

Cherchons maintenant ce que représentent ces valeurs de $(\eta - \xi)$ relativement aux courbes S, S'. Par définition ξ et η sont les abscisses x, x' de deux points, de même ordonnée, des courbes S et S'. Donc $(\eta - \xi)$ est un segment mm' intercepté par S et S' sur une parallèle à Ox, le point m de S ayant pour abscisse $x = \xi$.

Nous avons donc à considérer les différents points m de S, infiniment voisins de O, situés sur la sécante $x = \xi$; par chacun d'eux mener une parallèle D à Ox; sur chacune de ces parallèles D prendre les points m', infiniment voisins de O et appartenant à S', et faire la somme des ordres des segments mm' situés sur ces droites D.

Soit $F'(x, y) = 0$ l'équation sous forme entière de la courbe S'. L'ordre de $F'(x, y)$, où l'on met pour x et y les coordonnées d'un des points m, est précisément, d'après le lemme, égal à la somme des ordres des segments mm' situés sur la droite D issue de m. Donc, en premier lieu, le nombre des points d'intersection des deux courbes réunis en O est égal à la somme des ordres des quantités $F'(x, y)$ quand on prend successivement pour le point (x, y) tous les points d'intersection, infiniment voisins de O, de la courbe S et d'une sécante $x = \xi$ à distance infiniment petite du premier ordre du point O.

En second lieu, d'après le même lemme, nous pouvons remplacer la somme des ordres des segments mm', situés sur D, par celle des ordres des segments interceptés, à partir de m, par la courbe S', sur une autre sécante issue de m, par exemple sur la droite $x = \xi$. Alors tous les segments qu'on a à considérer à partir des divers points m sont situés sur la même droite. Nous pouvons donc dire que :

Théorème II. — *Le nombre des intersections de deux courbes, réunies en un point* O, *est égal à la somme des ordres des segments infiniment petits et infiniment voisins de* O, *interceptés par les deux courbes sur une sécante quelconque dont la distance au point* O *est infiniment petite du premier ordre*. Et, sous une autre forme, *si* $F(x, y) = 0$ *est l'équation, sous forme entière, de l'une des deux courbes, le même nombre est égal à la somme des ordres des quantités infiniment petites* $F(x, y)$, *le point* (x, y) *étant placé successivement aux différents points, infiniment voisins de* O, *où l'autre courbe rencontre la sécante.*

Si la sécante a une direction différente de celle d'une quelconque des tangentes des deux courbes en O, le nombre des points, infiniment voisins de O, où elle rencontre une quelconque des deux courbes est égal à la multiplicité du point O sur cette courbe. Si donc ρ et ρ' sont les multiplicités du point O sur S et sur S', le nombre des segments à considérer est $\rho\rho'$. Ces segments sont d'ailleurs alors tous d'ordre au moins égal à l'unité, Soit, en général, $1+\alpha$ l'ordre de l'un d'eux. La somme de leurs ordres est $\rho\rho'+\sum\alpha$. On a donc cette autre forme du théorème II dans un cas particulier :

Corollaire. — *Le nombre des intersections de deux courbes, réunies en un point, est égal au produit des multiplicités de ce point sur les deux courbes, augmenté de la somme des ordres des contacts des branches d'une courbe avec les branches de l'autre.*

ARTICLE II.

1. Parmi les résultats de l'Article précédent, remarquons celui-ci (n° 4, théor. I, coroll. II) : *La somme des ordres des contacts, en un point d'une courbe algébrique, entre cette courbe et une tangente, est toujours un nombre entier.* Ainsi, en un point d'une courbe algébrique, une branche ayant avec sa tangente un contact d'ordre fractionnaire ne saurait exister seule.

De cette remarque naît l'idée d'une recherche importante. Comment se groupent les diverses branches dont la coexistence est ainsi nécessaire ? La réponse à cette question est fournie par un des résultats contenus dans l'important *Mémoire sur les fonctions algébriques*, de M. Puiseux (*Journal de Mathém.*, 1850). Pour le but que je me propose, ce résultat peut être obtenu très brièvement, comme on va le voir, et recevoir de nouveaux développements.

Soit $f(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe algébrique passant à l'origine des coordonnées. Pour une valeur donnée, infiniment petite, de y, cette équation admet des racines x infiniment petites. Soient x l'une d'elles et cy^n sa partie principale (¹). Posons $x - cy^n = \xi_1$, et soit $c_1 y^{n_1}$ la partie principale de ξ_1 ; posons $\xi_1 - c_1 y^{n_1} = \xi_2$, et soit

(¹) D'après le *parallélogramme de Newton*, l'exposant n est toujours commensurable.

$c_2 y^{n_2}$, la partie principale de ξ_2, et ainsi de suite. Nous mettons la racine x sous la forme

$$x = cy^n + c_1 y^{n_1} + c_2 y^{n_2} + \ldots + c_i y^{n_i} + \xi_{i+1}.$$

Les quantités c, c_1, ..., c_i sont des constantes; les nombres n, n_1, ..., n_i, qui peuvent n'être pas entiers, croissent avec leurs indices, et l'ordre de ξ_{i+1} est supérieur à celui de y^{n_i}.

L'expression de $(x - \xi_{i+1})$, donnée par cette équation, constitue l'ensemble des $(i+1)$ premiers termes du développement de x suivant les puissances croissantes de y, ou ce qu'on peut appeler *une expression approchée* de la racine x.

Réduisons les exposants n, n_1, ..., n_i *à leur plus petit dénominateur commun* N. Posons $y = \eta^N$. L'expression approchée de x devient un polynome entier $F(\eta)$, s'évanouissant avec la variable. Pour une valeur donnée de y, la variable η est susceptible de N déterminations différentes. Il est tout d'abord bien aisé de voir qu'à ces N valeurs de η répondent aussi N valeurs différentes pour $F(\eta)$. Il suffira de démontrer que, pour deux déterminations différentes de η, il est impossible que tous les termes de $F(\eta)$ se reproduisent à la fois. Soient

$$n = \frac{m}{N}, \qquad n_1 = \frac{m_1}{N}, \qquad \ldots, \qquad n_i = \frac{m_i}{N}.$$

Désignons par ω une racine primitive de l'équation binome $x^N = 1$, et par η une des déterminations de η. Une quelconque des autres valeurs de η est $\omega^a \eta$, a étant un entier inférieur à N. Pour qu'un terme η^{m_k} de $F(\eta)$ ait la même valeur quand on donne à η les deux valeurs η et $\omega^a \eta$, il faut et il suffit que l'on ait $\omega^{a m_k} = 1$, c'est-à-dire que $a m_k$ soit divisible par N, puisque ω est une racine *primitive* de l'équation binome de degré N. Pour que tous les termes de $F(\eta)$ acquièrent tous les mêmes valeurs avec les deux déterminations de η, il faut donc que am, am_1, ..., am_i soient à la fois divisibles par N. Comme a est inférieur à N, il faut que tous les nombres m aient un même facteur commun avec N; ce qui est impossible, puisque, par hypothèse, N est le plus petit dénominateur commun des fractions

$$\frac{m}{N}, \quad \frac{m_1}{N}, \quad \ldots, \quad \frac{m_i}{N}.$$

Il est donc prouvé que, pour une valeur donnée de y, l'expression

approchée $F(\eta)$ de la racine x est susceptible de N valeurs. Je vais montrer maintenant que *ces* N *valeurs sont les expressions approchées d'autant de racines de l'équation* $f(x,y)=0$.

Remplaçons, pour un instant, dans f, y par η^N. Nous avons une nouvelle équation $\varphi(x,\eta)=0$, et il est clair que $F(\eta)$ est l'expression approchée d'une racine x de cette dernière. Par suite, si l'on remplace η par $\lambda\eta$, λ étant une constante arbitraire, on voit que $F(\lambda\eta)$ est l'expression approchée d'une racine x de $\varphi(x,\lambda\eta)=0$. Prenons pour λ une racine $N^{\text{ième}}$ de l'unité, nous avons pour $F(\lambda\eta)$ une des autres déterminations de $F(\eta)$. Comme on a, d'ailleurs,

$$\varphi(x,\eta)=\varphi(x,y^N)=f(x,y),$$

on a encore

$$\varphi(x,\lambda\eta)=\varphi(x,\lambda^N\eta^N)=\varphi(x,y^N)=f(x,y).$$

Par suite, $F(\lambda\eta)$ est l'expression approchée d'une autre racine de l'équation $f(x,y)=0$.

Voici maintenant une conséquence immédiate de cette proposition. Le nombre des racines d'une équation algébrique étant toujours fini, si loin qu'on pousse le développement de la racine x, on aura nécessairement pour N un nombre fini. En d'autres termes, une racine étant développée en série illimitée, les exposants de tous les termes de cette série se réduisent à un plus petit dénominateur commun fini N. Cela étant, la série représente N racines différentes de l'équation proposée.

Nous venons de voir que l'on passe de l'une à l'autre de ces racines en changeant la détermination de η. Ce passage peut être effectué d'une autre manière. Considérons, en effet, pour y une valeur imaginaire quelconque, de module r et d'argument φ,

$$y=re^{\sqrt{-1}\varphi}.$$

Une détermination quelconque de η est de la forme

$$\eta=r^{\frac{1}{N}}e^{\frac{\sqrt{-1}(\varphi+2k\pi)}{N}}.$$

Cette détermination est précisée si l'on précise l'entier arbitraire k. Une autre détermination sera de la forme

$$r^{\frac{1}{N}}e^{\frac{\sqrt{-1}[\varphi+2(k+k')\pi]}{N}}.$$

Or, on peut la considérer comme la même détermination que précédemment, appliquée à la valeur suivante de y :

$$y = re^{\sqrt{-1}(\varphi+2k'\pi)}$$

Par suite, *diverses racines x considérées se permutent les unes dans les autres quand la variable imaginaire y décrit un cercle.*

Cette propriété a fait attribuer par M. Puiseux, au groupe des racines dont il s'agit, le nom de *groupe circulaire*. J'emploierai dorénavant cette dernière dénomination.

En résumé, nous avons obtenu ce résultat qu'une racine x de l'équation $f(x, y) = 0$, infiniment petite avec y, fait partie d'un groupe circulaire de N racines, représentées toutes à la fois par un développement procédant suivant les puissances entières de η, s'évanouissant avec η, et tel qu'il n'existe aucun facteur commun à la fois à N et à tous les exposants de η dans ce développement. Limitons ce développement à un terme, qui sera aussi éloigné que l'on voudra, mais défini, et tel que le développement ainsi limité n'ait pas moins de N valeurs. Le groupe circulaire est alors représenté approximativement par les équations

$$(1) \qquad x = \mathrm{F}(\eta), \qquad y = \eta^{\mathrm{N}},$$

où $\mathrm{F}(\eta)$ est un polynome entier s'évanouissant avec η et tel qu'il n'existe aucun facteur commun à la fois à N et à tous les exposants de η dans ses termes. Ces deux équations définissent une courbe algébrique qui représente approximativement une portion de la courbe $f(x, y) = 0$ aux environs de l'origine des coordonnées. Si les valeurs de x fournies par les équations (1) ne sont pas d'ordre inférieur à l'unité, relativement à y, c'est-à-dire si le premier terme de $\mathrm{F}(\eta)$ n'est pas de degré inférieur à N, l'axe des x n'est pas tangent à la courbe (1). Alors, par définition, l'origine est, sur cette courbe, un point multiple d'ordre N. Les N équations qu'on obtient en remplaçant successivement, dans $x = \mathrm{F}(\eta)$, η par ses N déterminations, définissent N branches de la courbe que, d'après M. Cayley, j'appelle *branches partielles*. Leur ensemble constitue un groupe circulaire. Chacune d'elles représente approximativement une branche partielle de la courbe primitive $f(x, y) = 0$, dans les environs de l'origine.

Si l'équation $f(x,y) = 0$ admet une racine infiniment petite qui

ne fasse pas partie du précédent groupe circulaire, cette racine fait partie d'un second groupe analogue, comprenant N′ racines, et ainsi de suite. Si de même l'axe des x n'est pas tangent aux branches partielles du nouveau groupe, on a, dans ce groupe, N′ branches partielles, etc.; en sorte que l'origine est, sur la courbe, un point multiple d'ordre $N + N' + \ldots$.

Nous résumons ce qui précède dans l'énoncé suivant :

Théorème I. — *Une courbe algébrique quelconque, aux environs d'un de ses points, se compose de branches partielles dont le nombre est égal à la multiplicité de ce point. Ces branches se répartissent en groupes distincts, nommés* circulaires, *de telle sorte que les branches d'un même groupe circulaire sont représentées toutes à la fois, indépendamment de toutes les autres, et avec telle approximation que l'on veut, par les branches d'une même courbe algébrique qui, au point considéré, ne contient aucune autre branche.*

2. Il sera bon de remarquer que, si le développement qui représente un groupe circulaire est à coefficients réels, ce développement même ne peut avoir qu'une valeur réelle si N est impair, et deux si N est pair. Par suite, parmi les N branches partielles d'un groupe circulaire, il y a toujours $(N-1)$ ou $(N-2)$ branches imaginaires, suivant que N est impair ou pair. Dans la suite, il demeurera entendu que je ne ferai aucune distinction entre les branches réelles ou imaginaires.

Voici une autre remarque : les divers groupes circulaires de branches partielles d'une même courbe se séparent comme appartenant approximativement à des courbes distinctes. Si l'équation de la courbe proposée est à coefficients rationnels, il arrivera généralement que l'existence d'un groupe circulaire entraînera forcément la coexistence de plusieurs autres groupes circulaires analogues. C'est ce qui se produira si les coefficients du développement qui représente ce groupe circulaire sont des fonctions d'une racine d'une équation irréductible. Cela étant, si l'on remplace, dans les coefficients du développement, cette racine par une quelconque des autres racines de la même équation, le nouveau développement représente un nouveau groupe circulaire de branches de la courbe proposée.

Sans m'arrêter à démontrer cette proposition, ce qui serait au reste bien facile, je fais observer qu'il est alors impossible de représenter séparément ces divers groupes circulaires par des courbes distinctes, dont les équations soient à coefficients rationnels. Pour le but que j'ai en vue, ce nouveau groupement n'est pas utile à considérer; et je n'aurai pas à faire usage de ces liaisons qui peuvent exister entre les divers groupes circulaires relatifs à un même point d'une courbe.

3. Une autre remarque conduit à donner au théorème I une forme très différente. Reprenons les équations (1), en y mettant z au lieu de η et y supposant $m > N$,

$$x = F(z) = cz^m + c_1 z^{m_1} + \ldots, \qquad y = z^N.$$

F (z) étant, comme précédemment, un polynome entier, ces équations définissent une courbe algébrique dans l'espace. Le point O, origine des coordonnées, est un point simple de cette courbe, mais généralement un point simple exceptionnel. Si l'on écarte le cas de $N = 1$, pour lequel il n'est pas besoin de considérer cette courbe auxiliaire, on voit avec la plus grande facilité que la tangente en O, qui est l'axe Oz, a avec la courbe un contact d'ordre ($N - 1$), et que le plan osculateur en O, qui est le plan des yz, a, avec la même courbe, un contact d'ordre ($m - 1$).

Ainsi :

Théorème II. — *Les branches partielles d'un même groupe circulaire constituent la projection d'une courbe aux environs d'un point simple.*

Passons maintenant au cas d'un point singulier composé de plusieurs groupes circulaires, et nous voyons que :

Théorème III. — *Aux environs d'un point singulier quelconque, une courbe plane algébrique est représentée, avec telle approximation que l'on veut, par la projection de plusieurs courbes distinctes aux environs de points simples de ces courbes.*

Cette proposition procure le moyen de former un point singulier quelconque par la déformation continue d'une figure ne contenant que des points simples et des points doubles. Je ne développerai pas

ici cette notion, point de départ d'une théorie géométrique que je me propose d'étudier dans une autre occasion, et j'indiquerai simplement un exemple de la déformation dont il s'agit.

Je prendrai pour exemple la courbe

$$x^q = y^{\mathrm{P}},$$

q et P étant des entiers premiers entre eux, et $\mathrm{P} > q$ (¹).

Cette courbe est la projection de la suivante C

$$x = z^{\mathrm{P}}, \qquad y = z^q.$$

La projection de C, parallèlement à une direction arbitraire, ne contient, à distance finie, comme points singuliers, que des points doubles, pieds des projetantes qui rencontrent C en deux points différents. Sur cette projection, la projection de l'origine des coordonnées est un point simple, où la courbe a, avec sa tangente, un contact d'ordre $(q-1)$.

Si la direction des projetantes vient à coïncider avec l'axe Oz, un certain nombre des projetantes doubles ci-dessus coïncide avec cet axe et la déformation est opérée. D'une théorie qui sera bientôt exposée ici (²), il résulte que le nombre de ces projetantes doubles est égal à $\frac{(q-1)(\mathrm{P}-1)}{2}$.

Ainsi le point singulier considéré résulte de la déformation d'une courbe dont $\frac{(q-1)(\mathrm{P}-1)}{2}$ points doubles se réunissent avec un point simple où la courbe a, avec sa tangente, un contact d'ordre $(q-1)$. On verra aussi que les boucles de courbe qui s'évanouissent contiennent $(\mathrm{P}-1)$ points d'inflexion.

J'ajoute que c'est là une généralisation de faits bien connus dans le cas d'un point de rebroussement ordinaire.

ARTICLE III.

1. La répartition des branches d'une courbe, aux environs d'un point singulier, entre divers groupes circulaires, est indépendante

---

(¹) Cet exemple est emprunté à M. de la Gournerie. *Recherches sur les surfaces réglées tétraédrales symétriques*, p. 206 et 207.

(²) *Voir* Article III.

des coordonnées employées pour y parvenir. Bien que ne ressortant pas immédiatement des raisonnements précédents, cette conclusion paraît si naturelle que je ne m'arrêterais pas à la justifier, si je ne devais pas rencontrer en même temps d'autres résultats importants : le classement des branches d'un même groupe circulaire sera le premier de ces résultats.

Je reprends donc l'équation d'un groupe circulaire

$$x = cy^n + c_1 y^{n_1} + c_2 y^{n_2} + \cdots,$$

dont le second membre peut être illimité, mais où les exposants $n, n_1, n_2, \ldots,$ à l'infini ont un plus petit dénominateur commun fini N.

Je réduis tous les exposants n à leurs plus simples expressions. Soit $\frac{p}{q}$ celle du premier n. Posons $y = y_1^q$, et réunissons tous les termes dont les exposants ont en dénominateur de simples diviseurs de q, jusqu'au premier de ceux qui ne sont pas dans ce cas. L'ensemble de ces termes constituera une expression de la forme $y_1^p F_1(y_1)$, F_1 ne contenant que des puissances entières et positives et commençant par un terme constant.

Je considère le plus petit exposant des termes non compris dans ce premier groupe. Le plus petit dénominateur commun à cet exposant et à $\frac{p}{q}$ est un multiple de q, que je désigne par qq_1. Soit alors $\frac{p_1}{qq_1}$ l'exposant considéré. Je pose $y_1 = y_2^{q_1}$, et je forme, en commençant par le terme dont il s'agit, un groupe analogue au précédent, et de la forme $y_2^{p_1} F_2(y_2)$, F_2 ne contenant que des puissances entières et positives et commençant par une constante.

Dans ce groupe sont compris tous les termes dont les exposants admettent avec $\frac{p}{q}$ un plus petit dénominateur commun supérieur à q et diviseur de qq_1, jusqu'au premier de ceux qui ne sont pas dans ce cas.

En posant de même $y_2 = y_3^{q_2}$, on formera un nouveau groupe $y_3^{p_2} F_3(y_3)$, F_3 étant de même définition que F_2. Dans ce groupe seront compris tous les termes dont les exposants admettent avec $\frac{p}{q}$ et $\frac{p_1}{qq_1}$ un plus petit dénominateur commun supérieur à qq_1 et diviseur de qq_1q_2, ce plus petit dénominateur commun étant d'ail-

leurs précisément qq_1q_2 pour l'exposant du premier terme du groupe.

En continuant de la sorte, je répartis tous les termes du développement en un nombre fini de groupes, dont le dernier commence par un terme dont l'exposant n'admet pas avec tous les précédents de dénominateur commun inférieur à N. Soit $(s+1)$ le rang de ce dernier groupe. On y parviendra après avoir posé successivement

$$(1)\quad y=y_1^q,\quad y_1=y_2^{q_1},\quad y_2=y_3^{q_2},\quad \ldots,\quad y_s=y_{s+1}^{q_s},\quad N=qq_1q_2\ldots q_s.$$

Le développement prend la forme

$$(2)\quad x=y_1^{P}F_1(y_1)+y_2^{P_1}F_2(y_2)+y_3^{P_2}F_3(y_3)+\ldots+y_{s+1}^{P_s}F_{s+1}(y_{s+1}).$$

Les fonctions F ne contiennent que des puissances entières et positives, et commencent chacune par un terme constant.

A l'égard des exposants entiers P, il résulte de leur formation même qu'on a constamment $P_i > P_{i-1}q_i$, quel que soit i, et que chaque nombre P_i est premier avec le nombre q_i de même indice. Ces nombres ne remplissent pas d'autre condition. Il est, en effet, aisé de voir, et je ne m'y arrête pas, que cette dernière condition suffit pour que les fractions

$$\frac{P}{q},\quad \frac{P_1}{qq_1},\quad \frac{P_2}{qq_1q_2},\quad \ldots,\quad \frac{P_s}{qq_1q_2\ldots q_s}$$

n'aient point de dénominateur commun inférieur à celui de la dernière d'entre elles, ou N. Par suite, cette condition remplie, N est le plus petit dénominateur commun des exposants de y dans le développement (2). Donc, sous cette condition, la formule (2) donne la représentation générale d'un groupe circulaire.

On n'aura généralement à considérer dans la suite que le premier terme de chaque groupe. Quand il en sera ainsi, on pourra se borner à figurer chaque groupe par ce premier terme caractéristique, que, pour éviter toute confusion, on entourera d'une parenthèse. Ainsi la formule (2) s'écrira

$$x=(a_0y_1^{P})+(a_1y_2^{P_1})+(a_2y_3^{P_2})+\ldots+(a_sy_{s+1}^{P_s}),$$

ou, plus simplement, si l'on n'a pas à considérer les valeurs des coefficients,

$$(3)\quad x=(y_1^{P})+(y_2^{P_1})+(y_3^{P_2})+\ldots+(y_{s+1}^{P_s}).$$

2. Ainsi qu'on l'a expliqué plus haut, on obtient les N valeurs de x en prenant une seule détermination de $y^{\frac{1}{N}}$, et faisant ensuite décrire $(N-1)$ circonférences à la variable y. Précisant davantage, je suppose y donné, son argument θ étant choisi entre o et 2π. Les équations (1) déterminent les modules de $y_1, y_2, \ldots, y_{s+1}$. Nous précisons ces variables en prenant leurs arguments égaux à

$$\frac{\theta}{q}, \quad \frac{\theta}{qq_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\theta}{qq_1\ldots q_s},$$

c'est-à-dire en prenant, pour ces variables, les déterminations qui sont réelles et positives avec y.

A la valeur de x, ainsi déterminée, nous donnerons le premier rang. Si l'on conçoit que la variable y décrive un cercle de rayon égal au module de la valeur donnée, son argument partant d'ailleurs de zéro, on voit que la valeur de x, de rang 1, s'obtient pendant le premier tour. De même, pendant chacun des N premiers tours, on obtient une nouvelle détermination de x. Je désigne chacune d'elles par le rang du tour pendant lequel on l'obtient.

On voit immédiatement que deux valeurs de x, dont les rangs ne diffèrent que par un multiple de $qq_1\ldots q_i$, ne diffèrent elles-mêmes qu'à partir des termes du groupe de rang $(i+2)$. Si y est infiniment petit du premier ordre, la différence de ces deux valeurs est de l'ordre

$$\frac{P_{i+1}}{qq_1\ldots q_i q_{i+1}}.$$

Ainsi, pendant les q premiers tours, on obtient les valeurs de rang $1, 2, \ldots, q$, dont les différences sont d'ordre $\frac{P}{q}$.

Auprès de chacune d'elles viennent ensuite se grouper d'autres valeurs de x qui n'en diffèrent que par des infiniment petits d'ordre supérieur, et qui se distribuent de la même façon. Ainsi, pendant les tours de rangs $q+1, 2q+1, \ldots, (q_1-1)q+1$, on obtient (q_1-1) valeurs de x qui se groupent avec la première et n'en diffèrent que par des infiniment petits d'ordre $\frac{P_1}{qq_1}$.

Auprès de chacune de ces dernières, nouveau groupement. Par exemple, pendant les tours de rangs

$$(qq_1+1), \quad (2qq_1+1), \quad \ldots, \quad [(q_2-1)qq_1+1],$$

on obtient $(q_2 - 1)$ valeurs de x, qui ne diffèrent de la première que par des infiniment petits de l'ordre $\frac{P_2}{qq_1q_2}$, etc.

Ce classement des valeurs de x, nous l'appliquons naturellement aux branches partielles représentées par le groupe circulaire. Il faut toutefois observer que le groupe circulaire (3) ne contient, par définition, N branches que s'il n'est pas tangent à l'axe des x. Sous cette condition, qui revient à $P \geqq q$, j'applique le classement précédent aux branches partielles, qui seront ainsi numérotées de 1 à $N = qq_1 \ldots q_s$.

Je vais montrer maintenant que ce classement est indépendant des axes de coordonnées.

3. Je suppose d'abord ce classement effectué au moyen de l'équation (3), l'axe des y étant tangent au groupe circulaire, et je change l'axe des x seul. Ce changement s'effectuera en remplaçant x par $\frac{x}{\alpha}$, et y par $y + \beta x$, α et β étant deux constantes. Si l'on fait ces susbstitutions dans l'équation (3), qu'on y développe le second membre, on parvient facilement, grâce à l'hypothèse $P > q$, à apercevoir que les termes caractéristiques du second membre sont les mêmes que précédemment. Par suite, le changement d'axes effectué, l'équation (3), bornée à ses termes caractéristiques, subit, pour tout changement, celui qui provient de la multiplication par α des coefficients de ces termes. Faisant abstraction des coefficients, nous pouvons dire qu'elle n'a pas changé.

Nous observons de plus que la nouvelle variable y ne diffère de la première que par la quantité βx infiniment petite par rapport aux deux variables y. Ces dernières ont donc même partie principale, et si on les fait tourner simultanément, elles sont toujours simultanément dans un tour de même rang.

Si donc je prends un point de la courbe et que je classe la branche à laquelle il appartient avec les nouveaux ou avec les anciens axes, j'assigne toujours à cette branche le même rang.

Il faut toutefois observer que cette conclusion n'est absolument exacte que si la constante α est réelle et positive. Dans le cas opposé, son argument n'est pas nul, et l'on voit que le classement absolu des branches peut être modifié, mais non leur ordre. Ainsi, par exemple, je considère la courbe

$$x^4 = y^5.$$

Pour $y = 1$, je distingue un point sur chacune des quatre branches. Les abscisses de ces points sont :

$$x = 1\,;$$
$$x = e^{\sqrt{-1}\,\frac{5\pi}{2}}\,;$$
$$x = -1\,;$$
$$x = -e^{\sqrt{-1}\,\frac{5\pi}{2}}.$$

Si je change x en $-x$, ce qui équivaut à un changement de l'axe des x, la troisième branche devient la première, la quatrième devient la deuxième, etc.

Ainsi, *l'axe des y étant la tangente au groupe circulaire, le changement de l'axe des x n'altère pas l'ordre de succession des branches partielles.*

Je change maintenant l'axe des y, en substituant γy à y et $x - \delta y$ à x. L'équation (3) se change alors en

$$(4) \qquad x = \delta y + (y_1^{\text{P}}) + (y_2^{\text{P}_1}) + \cdots + (y_{s+1}^{\text{P}_s}).$$

Ici encore les deux variables y décrivent en même temps le même nombre de circonférences. Donc *le changement de l'axe des y n'altère pas l'ordre de succession des branches partielles.*

Combinant ces deux changements, nous voyons subsister cet ordre de succession avec des axes quelconques, pourvu que celui des x ne soit pas la tangente du groupe circulaire. De là la proposition suivante :

Théorème I. — *Soient* O *un point singulier d'une courbe algébrique et, à distance infiniment petite de* O, *un point m sur l'une des branches appartenant à un groupe circulaire de multiplicité* N. *On place l'origine des coordonnées en* O *et l'on augmente l'argument de l'ordonnée y du point m de* 1, 2, ..., (N − 1) *circonférences. L'abscisse x de ce point se modifie successivement, de telle sorte que le point (x, y) se place successivement aux points d'intersection, infiniment voisins de* O, *de la sécante menée de m parallèlement à* Ox, *avec les* (N − 1) *autres branches du groupe, et cela dans le même ordre, quels que soient les axes, pourvu que* Ox *ne soit pas la tangente du groupe circulaire en* O.

4. L'ordre de succession des branches d'un même groupe circulaire, comme on vient de le voir, est indépendant des axes de coordonnées, pourvu que l'axe des x ne soit pas tangent à la courbe à l'origine. Mais il en est encore de même quand cette condition n'est pas observée, et c'est ce que je vais actuellement prouver.

Pour y parvenir, je me propose de déduire de l'équation (3) le développement de y en x. Ce calcul peut facilement s'effectuer d'une manière directe [1]. Mais les résultats précédents nous en fournissent facilement le résultat. A cet effet, je remarque que, de l'équation (3), on a déduit avec deux axes arbitraires, mais non tangents à la courbe, l'équation (4), qui peut s'écrire, suivant les conventions admises,

$$(5) \qquad x = (y) + (y_1^{\mathrm{P}}) + (y_2^{\mathrm{P}_1}) + \cdots + (y_{s+1}^{\mathrm{P}_s}).$$

Nous en déduirions de même, en intervertissant les deux axes,

$$(6) \qquad y = (x) + (x_1^{\mathrm{P}}) + (x_2^{\mathrm{P}_1}) + \cdots + (x_{s+1}^{\mathrm{P}_s}),$$

les variables $x_1, x_2, \ldots, x_{s+1}$ étant liées à x par les mêmes relations que $y_1, y_2, \ldots, y_{s+1}$ à y, et étant déterminées de même. De plus, les variables x et y doivent effectuer le même nombre de tours pour que les équations (5) et (6) représentent simultanément la même branche.

L'axe des y étant la tangente du groupe circulaire (3), l'équation (3) n'est pas de la forme (5); mais elle y entre si je la résous par rapport à $x^{\frac{1}{\mathrm{P}}}$, que je désigne pour un instant par ξ. J'élève les deux membres de l'équation (3) à la puissance $\frac{1}{\mathrm{P}}$, et j'ordonne le second membre suivant les puissances croissantes de y. J'aperçois alors sans difficulté que l'équation ainsi obtenue est de la forme

$$(7) \qquad \xi = (y_1) + (y_2^{\mathrm{R}_1}) + (y_3^{\mathrm{R}_2}) + \cdots + (y_{s+1}^{\mathrm{R}_s}),$$

les exposants R étant définis par la relation générale

$$\mathrm{R}_i = \frac{\mathrm{P}_i}{q_1 q_2 \ldots q_i} - \mathrm{P} + 1.$$

---

[1] *Voir* à ce sujet, la Note placée à la fin du Mémoire, paragraphe 2.

Cette équation (7) étant de la forme (5), j'en conclus

$$(8) \qquad y_1 = (\xi) + (\xi_1^{R_1}) + (\xi_2^{R_2}) + \ldots + (\xi_s^{R_s}),$$

en posant

$$x = \xi^P, \qquad \xi = \xi_1^{q_1}, \qquad \xi_1 = \xi_2^{q_2}, \qquad \ldots, \qquad \xi_{s-1} = \xi_s^{q_s}.$$

et la variable ξ devant effectuer le même nombre de tours que y_1.

Je mets maintenant, d'une manière générale, au lieu de ξ_i, x_{i+1}, en sorte que l'équation (8) devient

$$(8\ bis) \qquad y_1 = (x_1) + (x_2^{R_1}) + (x_3^{R_2}) + \ldots + (x_{s+1}^{R_s}).$$

De même que l'équation (7) provient de l'équation (3), de même l'équation (8 *bis*) provient d'une équation telle que

$$(9) \qquad y = (x_1^q) + (x_2^{Q_1}) + (x_3^{Q_2}) + \ldots + (x_{s+1}^{Q_s}),$$

qui ne diffère de (3) que par l'échange des nombres P et q et par la substitution, au nombre P_i, du nombre Q_i, défini par la relation

$$R_i = \frac{Q_i}{q_1 q_2 \ldots q_i} - q + 1,$$

ou

$$Q_i - q q_1 q_2 \ldots q_i = P_i - P q_1 q_2 \ldots q_i.$$

L'équation (9) fournit donc le développement demandé; il importe d'y remarquer que, pour que les équations (3) et (9) représentent simultanément un même point, il faut que les variables x_1 et y_1 exécutent le même nombre de tours.

Réciproquement on peut passer de l'équation (9) à l'équation (3) en répétant les mêmes raisonnements. Il est donc manifeste que la décomposition des branches d'une courbe en groupes circulaires ne dépend en aucune façon des axes de coordonnées.

L'équation (9) nous offre une facile vérification du théorème I (Art. 1er). L'axe des x n'étant pas tangent au groupe circulaire, nous savons que le nombre de ses intersections avec ce groupe, confondues à l'origine, est égal à la multiplicité $qq_1 \ldots q_s$ de ce groupe. Suivant le théorème I, ce nombre doit être aussi donné par la somme des ordres des valeurs de y répondant à une valeur de x infiniment petite du premier ordre. Or l'équation (9) donne,

en effet, $Pq_1q_2 \ldots q_s$ valeurs de y, de l'ordre $\frac{q}{P}$. La somme de leurs ordres fait donc bien $qq_1 \ldots q_s$.

5. Voici maintenant une question qui s'offre naturellement. Ces points qui répondent à une même valeur de x, et qui sont en nombre supérieur à celui des branches partielles, comment se répartissent-ils entre ces branches?

Considérons une valeur donnée de x, et soit φ son argument compris entre o et 2π. L'argument de x_1 est $\frac{\varphi}{P}$. Conformément à ce qui a été remarqué plus haut, l'argument de la partie principale de y_1 doit être en même temps pris égal à $\frac{\varphi}{P}$, en supposant le coefficient du premier terme de l'équation (3) réel. (La supposition contraire entraîne simplement à remplacer dans tout ce qui va suivre φ par $\varphi + \omega$, ω étant une constante, c'est-à-dire à prendre simplement φ entre ω et $2\pi + \omega$ au lieu de o et 2π.)

Par suite, on a, pour l'argument correspondant de la partie principale de y, $\frac{q\varphi}{P}$, lequel est compris entre o et 2π, puisque q est inférieur à P. J'ai donc ainsi un point de la première branche.

Pour avoir les autres points, je fais maintenant tourner x. Après k tours faits par x, y aura fait $\frac{q}{P}k$ tours. L'argument de sa partie principale sera $\frac{q(\varphi + 2k\pi)}{P}$. Si l'on a

$$2(n-1)\pi \leqq \frac{q(\varphi + 2k\pi)}{P} < 2n\pi, \tag{10}$$

c'est que y exécute alors son $n^{\text{ième}}$ tour. J'ai donc un point de la $n^{\text{ième}}$ branche.

De la formule (10) je conclus aisément quels sont les points situés sur la $n^{\text{ième}}$ branche. J'en déduis

$$(n-1)\frac{P}{q} - \frac{\varphi}{2\pi} \leqq k < n\frac{P}{q} - \frac{\varphi}{2\pi}.$$

Ces points s'obtiennent donc en prenant pour k les divers entiers compris entre les deux limites. Il est facile de voir quel est leur nombre.

Désignant par r le reste de la division de P par q et par $\left[\frac{P}{q}\right]$ le

plus grand entier contenu dans la quantité entre crochets, j'écris l'inégalité ci-dessus :

$$(n-1)\left[\frac{P}{q}\right]+(n-1)\frac{r}{q}-\frac{\varphi}{2\pi}\leqq k < n\left[\frac{P}{q}\right]+n\frac{r}{q}-\frac{\varphi}{2\pi}.$$

La différence des deux limites est $\left[\frac{P}{q}\right]+\frac{r}{q}-\frac{\varphi}{2\pi}$. Comme $\frac{r}{q}$ et $\frac{\varphi}{2\pi}$ sont des fractions plus petites que l'unité, nous voyons que le nombre des entiers compris entre elles est toujours $\left[\frac{P}{q}\right]$ ou $\left[\frac{P}{q}\right]+1$. Pour qu'il soit égal à ce dernier nombre, il faut et il suffit qu'il y ait un entier t compris entre $(n-1)\frac{r}{q}-\frac{\varphi}{2\pi}$ *inclusivement* et $\frac{nr}{q}-\frac{\varphi}{2\pi}$ *exclusivement*, c'est-à-dire

$$(n-1)\frac{r}{q}-\frac{\varphi}{2\pi}\leqq t < n\frac{r}{q}-\frac{\varphi}{2\pi};$$

d'où enfin

$$(11)\qquad n-1=\left[\frac{q}{r}\left(t+\frac{\varphi}{2\pi}\right)\right].$$

L'entier t a pour limite inférieure 0, attendu que n a pour limite inférieure l'unité. Ainsi on obtient $\left[\frac{P}{q}\right]+1$ points d'intersection sur les branches dont le rang n est compris dans la formule (11), et $\left[\frac{P}{q}\right]$ points sur les autres.

Les valeurs 0, 1, 2, ..., $(r-1)$ de l'entier t fournissent celles des q premières branches, sur lesquelles nous avons $\left[\frac{P}{q}\right]+1$ points.

Soient i une de ces valeurs de t et j le rang de la branche correspondante. Si l'on fait $t=mr+i$, m étant un entier quelconque, nous obtenons la branche de rang $(mq+i)$. Grâce à cette remarque, nous vérifions aisément que le nombre total des points obtenus est

$$q_1q_2\ldots q_s\left(q\left[\frac{P}{q}\right]+r\right)=Pq_1q_2\ldots q_s,$$

ainsi que cela devait être.

Mettons au lieu de P le nombre $(a+1)q+r$, a étant l'entier $\left[\frac{P}{q}\right]$, et nous pouvons résumer les résultats ci-dessus comme il suit :

Théorème II. — *Soit un groupe circulaire de bq branches,*

ayant avec la tangente Oy, *au point singulier* O, *des contacts d'ordre* $\left(a+\frac{r}{q}\right)$, a, r, q *étant des entiers et* $\frac{r}{q}$ *une fraction irréductible plus petite que l'unité. A distance infiniment petite de* O, *d'argument* φ, *on mène une parallèle à* Oy. *Cette droite rencontre les branches du groupe en* $br+bq(a+1)$ *points infiniment voisins de* O, *qui se répartissent comme il suit entre ces branches : le nombre de ceux qui sont situés sur la* $n^{\text{ième}}$ *branche est* $(a+2)$, *si* $(n-1)$ *est le plus grand entier contenu dans l'un des nombres* $\frac{q}{r}\left(t+\frac{\varphi}{2\pi}\right)$, *l'entier* t *ne devant pas être négatif; il est égal à* $(a+1)$ *si* $(n-1)$ *n'est pas de cette forme.*

Remarque. — Les cas les plus intéressants à considérer sont ceux où la distance x de la sécante à O est réelle. Elle est réelle et positive pour $\varphi=0$, réelle et négative pour $\frac{\varphi}{2\pi}=\frac{1}{2}$.

Pour les exemples de la proposition, on peut se borner, d'après une remarque ci-dessus, à considérer le cas où $b=1$.

Premier exemple. — Soit $r=1$. On a $(a+1)$ points sur toutes les branches, sauf sur une seule, qui en possède $(a+2)$. Pour x réel et positif, cette branche est la première; pour x réel et négatif, cette branche a le rang $1+\left[\frac{q}{2}\right]$. Cet exemple comprend le cas du point de rebroussement ordinaire ($q=2$, $a=0$).

Deuxième exemple. — Soit $r=q-1$. On a $(a+2)$ points sur toutes les branches, sauf sur une seule, où l'on n'en trouve que $(a+1)$. Pour x réel, positif ou négatif, cette branche est la $q^{\text{ième}}$. Le cas de $q=2$ doit être excepté et rentre dans l'exemple précédent.

6. Notre dernier théorème est susceptible d'une interprétation remarquable, qui, pour être bien saisie, exige que l'on se reporte un instant à la manière dont a été établi le théorème I de l'Article Ier. Malgré la forme géométrique du raisonnement employé, on y voit aisément que c'est à un point de vue tout algébrique qu'a été défini le nombre des points d'intersection d'une droite et d'une courbe, réunis en un point de cette courbe, et voici comment : on a considéré une droite quelconque; cette droite rencontre une courbe algébrique en m points, m étant le degré de la courbe. On a fait passer cette droite par un certain point A de la courbe; on n'a plus trouvé, en

dehors de A, que $m - \omega$ points d'intersection. Le nombre ω a été pris pour définition du nombre des points d'intersection de la courbe et de la droite réunis en A. Je dis que cette définition nous place à un point de vue tout algébrique, attendu qu'elles ne permet en aucune façon de voir comment ces ω points d'intersection viennent se confondre en A; et, en particulier, si le point A est multiple, à quelles branches de la courbe ces points appartiennent.

Pour se placer à un point de vue géométrique, il convient de faire parvenir la droite à sa position limite par degrés insensibles. Si, dans cette position limite, la droite n'est pas tangente à la courbe en A, on aperçoit immédiatement comment les choses se passent. On a vu, en effet, dans le courant du présent Article, qu'une sécante infiniment voisine du point singulier, et non parallèle à la tangente d'un groupe circulaire, rencontre chaque branche de ce groupe en *un* point infiniment voisin du point singulier. Par suite, une droite passant en A, et non tangente à la courbe, parvient à cette position limite en rencontrant constamment, dans les positions infiniment voisines, chaque branche en un point infiniment voisin de A. A la limite, elle a donc un point d'intersection avec chaque branche confondu en A, ce qui est d'accord avec ce résultat trouvé dès le début de l'Article Ier, à savoir que le nombre ω est, en ce cas, égal au nombre des branches de la courbe.

Les choses se passent autrement si, dans sa position limite, la droite est tangente en A à la courbe. Le théorème I (Art. Ier) nous a appris à trouver, dans ce cas aussi, le nombre ω; nous pouvons aussi reconnaître par cette proposition même, et nous avons trouvé dans l'Article actuel, que le même nombre ω est aussi celui des points d'intersection, infiniment voisins de A, de la courbe et d'une parallèle à la tangente, infiniment voisine. Ces ω points confondus en A se présentent donc encore, ainsi que la continuité l'exige d'ailleurs, comme les limites de ω points infiniment voisins de A. On doit donc les répartir entre les diverses branches, à la limite, comme ils s'y répartissent avant d'y parvenir. C'est cette répartition que le théorème II nous permet de faire. A ce point de vue, chaque branche partielle de la courbe a, avec sa tangente, un nombre de points confondus au point de contact, parfaitement déterminé, *quand on connaît la manière dont la droite variable vient coïncider avec la tangente*. Toutefois, ce nombre ne peut varier que d'une unité

suivant ce mode de variation de la droite, et le mode de variation de la droite elle-même n'intervient que par l'argument limite de sa distance au point singulier. Il est, par exemple, entièrement déterminé pour chaque branche si la droite variable est réelle et se rapproche de la tangente d'un côté déterminé. J'énonce donc ce théorème :

Théorème III. — *Dans le groupe circulaire défini au théorème précédent, parmi les points d'intersection des branches de ce groupe et d'une droite qui vient coïncider avec la tangente au point singulier, ceux qui viennent s'y réunir sont au nombre de* $(a+1)$ *sur chaque branche; il y a, en outre, br branches qui en contiennent un de plus. Les rangs de ces branches dépendent de la loi suivant laquelle la droite se rapproche de la tangente, conformément au théorème II.*

C'est là ce qu'on doit substituer à l'ingénieuse fiction rappelée au début de l'Article I[er] (2), et dont l'énoncé ne peut être maintenu qu'à titre de moyen mnémonique. Ainsi, dans le cas le plus simple, celui d'un point de rebroussement ordinaire, au lieu de dire que la tangente rencontre chacune des deux branches en $\frac{3}{2}$ points confondus au point singulier, on doit dire qu'elle rencontre l'une en *un* point, l'autre en *deux* points; et cette dernière branche est celle qui est située, par rapport à la tangente, du côté où l'on suppose qu'une droite variable et réelle, parallèle à la tangente, vient coïncider avec elle.

Ces notions sont susceptibles d'extension au cas où l'on considère deux courbes au lieu d'une courbe et d'une droite. C'est par là que commencera l'Article suivant.

ARTICLE IV.

1. Soient S, Σ, deux courbes algébriques ayant en commun un certain point A, où il y ait ω points d'intersection des deux courbes confondus. La définition de ce nombre ω est la suivante : Soient m, μ les degrés des deux courbes; $(m\mu - \omega)$ est le nombre de leurs points d'intersection autres que A.

Si donc on déplace infiniment peu l'une d'elles, Σ, les deux courbes auront, en vertu de la continuité, $(m\mu - \omega)$ points d'inter-

section à distance finie de A, et ω points d'intersection infiniment voisins de A. La direction du déplacement n'intervenant pas, on a cette proposition, qui se présente comme évidente :

Théorème I. — *Si deux courbes algébriques ont en commun un point* A, *et qu'on déplace infiniment peu l'une d'elles, le nombre des points d'intersection des deux courbes, infiniment voisins de* A, *après le déplacement, est indépendant de ce déplacement même.*

Ce qui doit particulièrement attirer l'attention sur cette proposition tout intuitive, c'est qu'elle souffre une exception bien remarquable, et tout aussi facile à apercevoir. Cette exception a lieu dans le cas où les courbes S et Σ, dans leur première position, ne forment qu'une seule et même courbe S. Il est clair que le raisonnement ci-dessus n'est pas applicable à ce cas. Voici ce que l'on peut lui substituer :

Considérons une translation infiniment petite de la courbe S, et soit S' sa nouvelle position. La théorie du déplacement nous apprend que les points d'intersection de S et de S' diffèrent infiniment peu des points de contact des tangentes menées à S, parallèlement à la direction de la translation. Par conséquent, le nombre de ces points, infiniment voisins de A, est égal au nombre des tangentes à S, parallèles à cette direction, pour lequel compte une droite issue de A dans cette direction. Si la direction de la translation est quelconque, ce nombre est l'abaissement de la classe de la courbe S, dû au point singulier A. Si, au contraire, la direction de la translation est celle d'une tangente à S en A, ce nombre s'augmente de la multiplicité du point qui, dans une courbe corrélative de S, correspond au point A et à cette tangente.

Le théorème et l'exception que je viens de signaler concernent, par le mode de raisonnement, les courbes algébriques. Il est bien certain qu'ils s'étendent d'eux-mêmes aux autres courbes, à la condition d'y considérer seulement les points singuliers algébriques, c'est-à-dire ceux où la courbe se représente approximativement par des groupes circulaires, comme une courbe algébrique. Car les équations des groupes circulaires doivent évidemment suffire à démontrer ces propositions, trouvées par une autre voie. Il en est de même du théorème II de l'Article Ier. Je vais donner ces démons-

trations directes, qui nous conduiront d'ailleurs à des conséquences nouvelles.

2. Je considère deux groupes circulaires au point O,

$$x = f(y), \qquad x = \varphi(y),$$

et les désigne par les lettres f et φ. Je fais subir au second une translation infiniment petite h, parallèle à l'axe des x, en sorte que son équation devient

$$x + h = \varphi(y).$$

D'où je conclus, pour ses points d'intersection avec f,

$$h = \varphi(y) - f(y) = \psi(y).$$

Pour être entièrement exact, il convient de dire que f et φ étant susceptibles chacun de plusieurs déterminations, il en est de même de ψ, et que de plus on peut avoir plusieurs équations différentes telles que

$$h = \psi(y).$$

On doit les considérer toutes et conclure que, dans tous les cas, les variables (h, y) forment un ou plusieurs groupes circulaires. On cherche le nombre des valeurs infiniment petites de y répondant à une valeur infiniment petite donnée de h, dans l'ensemble de ces groupes circulaires. Mais on sait, d'après les résultats de l'Article précédent, que ce nombre est égal à la somme des ordres des valeurs infiniment petites de h répondant à une valeur infiniment petite de y, c'est-à-dire, d'après la signification de h, à la somme des ordres des segments infiniment petits interceptés entre les deux groupes circulaires, dans la position initiale, sur une sécante parallèle à l'axe des x et à distance infiniment petite du premier ordre de l'origine des coordonnées. On obtient donc, sans aucune restriction, la proposition suivante, plus générale que le théorème II de l'Article Ier :

Théorème II. — *Soient deux courbes quelconques* S, Σ, *et* O, Ω, *deux points de* S *et de* Σ *infiniment voisins. Pour obtenir le nombre des points d'intersection des deux courbes, infiniment voisins de* O, *on transporte la courbe* Σ *parallèlement à elle-même en ramenant le point* Ω *en* O, *et l'on fait la somme des ordres des segments infiniment petits et infiniment voisins de* O *inter-*

ceptés par les deux courbes sur une sécante parallèle à OΩ et à distance infiniment petite du premier ordre de cette droite. Cette somme est le nombre cherché.

Remarque. — Ce théorème s'applique même quand la courbe Σ, étant égale à S, vient coïncider avec S après le déplacement. Il fournit alors le nombre des tangentes menées à S, parallèlement à OΩ, pour lequel compte la droite OΩ. Il faut seulement observer que chaque segment doit être compté deux fois, car on doit considérer sucessivement une extrémité de ce segment comme appartenant à la courbe fixe et à la courbe déplacée.

Par le raisonnement ci-dessus, il n'y a aucune difficulté à traiter la même question en considérant seulement une branche déterminée de chacune des courbes S et Σ. En s'aidant du théorème II (Art. III, 5), on voit aisément que, si OΩ n'est pas tangent à ces branches, le théorème II subsiste, sous la condition qu'on substitue, dans son énoncé, à l'ordre du segment unique intercepté par les deux branches sur la sécante, le plus grand entier contenu dans cet ordre, ou ce plus grand entier augmenté de l'unité, suivant l'argument du déplacement OΩ.

Cette question, pour être traitée complètement, exige quelques détails, dont je m'abstiens ici.

3. Pour passer du théorème II à la vérification du théorème I, je n'ai qu'à calculer, pour deux groupes circulaires donnés, la somme des ordres des segments interceptés successivement sur une parallèle à Ox et Oy, à distance infiniment petite du premier ordre de O, et à reconnaître l'identité des deux résultats. Je prends l'axe Oy tangent aux deux groupes, car la proposition est évidente d'elle-même dans le cas où les deux groupes n'ont pas même tangente.

Ce calcul ne présente pas de difficulté, et j'en indique simplement le résultat.

Soit

$$x = (y_1^{\text{P}}) + (y_2^{\text{P}_1}) + (y_3^{\text{P}_2}) + \cdots + (y_{s+1}^{\text{P}_s})$$

l'un des groupes circulaires, où je rappelle que les variables y sont liées par les relations

$$y = y_1^{q}, \qquad y_1 = y_2^{q_1}, \qquad y_2 = y_3^{q_2}, \qquad \ldots, \qquad y_s = y_{s+1}^{q_s}.$$

J'en considère un second, ayant, comme le précédent, la tangente Oy. Je suppose d'abord que l'équation de ce second groupe circulaire diffère de la précédente dès le premier terme.

Soient alors, pour ce second groupe,

$$q', \quad q'_1, \quad \ldots, \quad q'_{s'}; \qquad P', \quad P'_1, \quad \ldots, \quad P'_{s'}$$

les nombres analogues à

$$q, \quad q_1, \quad \ldots; \qquad P, \quad P_1, \quad \ldots.$$

Si l'on suppose $\frac{P}{q} \leqq \frac{P'}{q'}$, la somme des ordres des différences des abscisses relatives à toutes les branches des deux groupes est

$$(qq_1 \ldots q_s)(q'q'_1 \ldots q'_{s'})\frac{P}{q}.$$

Si l'on transpose les axes, il faut changer, comme on sait, q et q' en P et P', et inversement. On a d'ailleurs $\frac{q'}{P'} \leqq \frac{q}{P}$. Le résultat est alors

$$(Pq_1q_2 \ldots q_s)(P'q'_1 \ldots q'_{s'})\frac{q'}{P'},$$

c'est-à-dire identique au précédent, ainsi qu'on devait le trouver.

Le résultat a une forme plus compliquée dans le cas où les deux groupes circulaires commencent par les mêmes termes. Il faut alors que plusieurs des premiers nombres P', q' coïncident avec les nombres P, q de même indice

Soient

$$\begin{array}{llll} q' = q, & q'_1 = q_1, & \ldots, & q'_i = q_i, \\ P' = P, & P'_1 = P_1, & \ldots, & P'_i = P_i, \end{array}$$

et supposons que tous les termes des deux développements de x coïncident au moins jusqu'au premier terme de $\left(y^{P_i}_{i+1}\right)$ *inclusivement*, et au plus jusqu'au premier terme de $\left(y^{P_{i+1}}_{i+2}\right)$ *exclusivement.*

Soit n l'ordre minimum des termes différents dans les deux développements. Ce nombre est au moins égal à $\frac{P_i}{qq_1 \ldots q_i}$, d'après l'hypothèse admise.

Désignons par K le nombre positif

$$K = qq_1 \ldots q_i \times n - P_i.$$

Enfin, pour réduire la formule à son expression la plus simple, remplaçons les nombres $P_1, P_2, \ldots$, par d'autres, $p_1, p_2, \ldots$, dont l'emploi sera très utile. Ces nombres seront définis par les relations

$$\begin{aligned} P_1 &= P q_1 + p_1, \\ P_2 &= P_1 q_2 + p_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ P_s &= P_{s-1} q_s + p_s. \end{aligned}$$

Pour l'autre groupe, les nombres analogues p seront encore

$$p, \quad p_1, \quad \ldots, \quad p_i,$$

puis

$$p'_{i+1}, \quad \ldots, \quad p'_{s'+1}.$$

Ces définitions posées, la formule cherchée est

$$(1) \qquad R = \Pi \left[K + P q . (q_1 q_2 \ldots q_i)^2 + \sum_{\omega=0}^{\omega=i-1} \frac{p_{i-\omega}}{q_{i-\omega}} (q_i q_{i-1} \ldots q_{i-\omega})^2 \right];$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$\Pi = q_{i+1} q_{i+2} \ldots q_s \times q'_{i+1} q'_{i+2} \ldots q'_{s'},$$

et où R est la somme cherchée.

Si l'on transpose les axes des coordonnées, on a vu, dans l'Article précédent, que les lettres P et q se permutent entre elles; les lettres $q_1, q_2, \ldots, q_s$ ne changent pas, et les lettres $P_1, P_2, \ldots, P_s$ se changent en $Q_1, Q_2, \ldots, Q_s$. Ces dernières sont définies par l'équation générale

$$Q_j - q q_1 q_2 \ldots q_j = P_j - P q_1 q_2 \ldots q_j.$$

On en déduit facilement que les nombres Q satisfont aux relations

$$\begin{aligned} Q_1 &= q q_1 \;\; + p_1, \\ Q_2 &= Q_1 q_2 + p_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Q_s &= Q_{s-1} q_s + p_s, \end{aligned}$$

en sorte que les nombres p se conservent.

En outre, il est facile de voir [1] que le nombre K ne change pas.

---

[1] *Voir*, à ce sujet, la Note placée à la fin du Mémoire, paragraphe 3.

Par suite, la transposition des axes ne modifie pas le nombre R, ainsi qu'on l'avait prévu.

Une remarque utile à faire sur la formule (1) ci-dessus est la suivante :

Si l'on remplace P par $p+q$, le nombre $\frac{p}{q}$ étant alors l'ordre du contact des branches considérées avec la tangente Oy, on peut séparer, dans l'expression de R, le nombre

$$\Pi(qq_1q_2\ldots q_i)^2,$$

qui est le produit des multiplicités des deux groupes circulaires. En retranchant ce nombre de R, on a (Art. I, théor. II, coroll.) la somme des ordres des contacts des branches des deux groupes entre elles, qui est ainsi

$$(2)\qquad C=\Pi\left[K+pq(q_1q_2\ldots q_i)^2+\sum_{\omega=0}^{\omega=i-1}\frac{p_{i-\omega}}{q_{i-\omega}}(q_iq_{i-1}\ldots q_{i-\omega})^2\right].$$

4. En dernier lieu, il reste à indiquer ce que deviennent ces formules quand on considère la somme des ordres des segments interceptés entre les branches d'un même groupe circulaire. En désignant cette somme par $\mathfrak{L}$, on obtient la formule suivante :

$$(3)\qquad \begin{aligned}2\mathfrak{L}&=qq_1\ldots q_s(qq_1\ldots q_s-1)\frac{P}{q}\\&+\sum_{\omega=0}^{\omega=s-1}\frac{p_{s-\omega}}{q_{s-\omega}}q_sq_{s-1}\ldots q_{s-\omega}(q_sq_{s-1}\ldots q_{s-\omega}-1),\end{aligned}$$

pour les segments non parallèles à la tangente.

Pour la transposition des axes, on n'à qu'à transposer les lettres P et q. Cette transposition donne pour le résultat cherché

$$(4)\qquad 2\mathfrak{L}'=2\mathfrak{L}+qq_1\ldots q_s\left(\frac{P}{q}-1\right).$$

Or, le dernier terme de cette formule est le produit du nombre des branches du groupe circulaire par l'ordre de leur contact avec leur tangente Oy. Donc, si l'on considère une courbe quelconque, ayant égard à la remarque faite à la suite du théorème II, on peut énoncer cette proposition :

THÉORÈME III. — *La somme des ordres des contacts des branches d'une courbe avec une de ses tangentes est égale à la multiplicité du point correspondant à cette tangente dans la courbe corrélative.*

Malgré l'importance de cette proposition, je n'ai pas détaillé le calcul qui y a conduit, attendu qu'on la retrouvera bientôt par deux autres voies.

Il y a lieu de faire, sur la formule (3), une remarque analogue à celle qui a été faite plus haut sur la formule (1). Le nombre $\mathcal{L}$ peut être décomposé en deux parties :

1° L'une $\frac{N(N-1)}{2}$, N étant le nombre des branches

$$N = qq_1 \ldots q_s,$$

à laquelle se réduirait $\mathcal{L}$, s'il s'agissait d'un point de multiplicité N où il y aurait N tangentes différentes;

2° L'autre $\mathcal{S}$, dont l'expression est, en posant, comme ci-dessus, $P = p + q$,

$$(5) \quad 2\mathcal{S} = N(N-1)\frac{p}{q} + \sum_{\omega=0}^{\omega=s-1} \frac{p_{s-\omega}}{q_{s-\omega}} q_s q_{s-1} \ldots q_{s-\omega}(q_s q_{s-1} \ldots q_{s-\omega} - 1).$$

Et $\mathcal{S}$ est la somme des ordres des contacts des branches entre elles.

5. Les dernières applications que je ferai de la considération des groupes circulaires auront trait à ce qui concerne les courbes corrélatives.

Je montre d'abord qu'un groupe circulaire a pour corrélatif un groupe circulaire unique. Pour y parvenir, j'emploie une transformation corrélative simple. A la droite

$$X = AY + B$$

je fais correspondre le point

$$\xi = B, \qquad \eta = A.$$

Si la droite est tangente à une courbe ou groupe circulaire (x, y), on a

$$\eta = A = \frac{dx}{dy}, \qquad \xi = B = x - \frac{y\,dx}{dy}.$$

Pour obtenir l'équation en ξ et η, il n'y a qu'à exprimer x et $\frac{dx}{dy}$ en fonction de y, et éliminer y. Or, si l'on suppose que le groupe circulaire (x, y) est donné par la formule

$$x = (y_1^{\mathrm{P}}) + (y_2^{\mathrm{P}_1}) + \cdots + (y_{s+1}^{\mathrm{P}_s}),$$

on peut, sans faire l'élimination, écrire immédiatement l'équation en (ξ, η) réduite de même à ses termes caractéristiques. Elle sera de même ([1])

$$\xi = (\eta_1^{\mathrm{P}}) + (\eta_2^{\mathrm{P}}) + \cdots + (\eta_{s+1}^{\mathrm{P}_s}).$$

La seule modification consiste en ce que le nombre q est remplacé par le nombre $\mathrm{P} - q = p$. Ainsi l'on a

$$\eta = \eta_1^{p}, \qquad \eta_1 = \eta_2^{q_1}, \qquad \eta_2 = \eta_3^{q_2}, \qquad \eta_s = \eta_{s+1}^{q_s}.$$

On remarquera d'abord que la multiplicité de ce groupe circulaire (ξ, η) est

$$p q_1 q_2 \cdots q_s = \mathrm{N} \frac{p}{q},$$

ce qui est conforme au théorème III, qui reçoit ainsi une nouvelle démonstration.

En second lieu, nous voyons apparaître le groupe circulaire (ξ, η) comme corrélatif du groupe (x, y), sans distinguer quelles sont les branches des deux groupes qui se correspondent. Une étude plus approfondie, que je ne ferai pas ici, conduirait à faire cette distinction, variable avec le mode de transformation. Toutefois, comme toutes les branches d'un même groupe circulaire ont un contact du même ordre avec leur tangente, on peut énoncer, pour deux branches corrélatives, la relation qui lie l'ordre de ce contact dans les deux figures. Dans la première, il est égal à $\frac{\mathrm{P}-q}{q}$; dans la seconde, à $\frac{\mathrm{P}-(\mathrm{P}-q)}{\mathrm{P}-q} = \frac{q}{\mathrm{P}-q}$. Ainsi :

Théorème IV. — *Dans deux figures corrélatives, les branches correspondantes ont avec leurs tangentes aux points correspondants des contacts d'ordres réciproques.*

([1]) *Voir*, à ce sujet, la Note placée à la fin du Mémoire, paragraphe 4.

Cette proposition peut d'ailleurs se démontrer directement avec la plus grande facilité. Je ne m'y arrête pas.

Je considère maintenant deux groupes circulaires au point O, par exemple ceux pour lesquels on a établi plus haut les formules (1) et (2). Portons notre attention sur la formule (2), et substituons aux deux groupes les groupes corrélatifs. La transformation n'altérant ni les nombres $p_1, p_2, \ldots$, ni les nombres $q_1, q_2, \ldots$, et transposant les nombres p et q, nous voyons que tous les termes se conservent, à l'exception du terme ΠK, Π ne changeant d'ailleurs pas. Or le nombre K se conserve aussi [1]. Donc la formule (2) ne change pas. Il en est encore de même dans le cas plus simple où les deux groupes circulaires n'ont pas de terme commun. De là cette proposition :

Théorème V. — *La somme des ordres des contacts de deux courbes en un point est égale à la même somme pour les courbes corrélatives aux points correspondants.*

Dans quelques cas, ce théorème peut être utile pour réduire un problème à un plus simple, comme dans l'exemple suivant :

Exemple. — Deux courbes ont en un point A, *simple sur ces deux courbes, un contact d'ordre entier t avec leur tangente commune, et ont entre elles un contact d'ordre entier $s \geq t$. On demande combien la tangente commune en* A *absorbe de tangentes communes aux deux courbes.*

Pour résoudre la question, il suffit de savoir combien, au point correspondant à A, les courbes corrélatives ont d'intersections confondues. Or (th. III) ce point est, sur les deux courbes corrélatives, de la multiplicité t. Le nombre cherché surpasse donc t^2 de la somme des ordres des contacts de ces dernières (art. I, th. II, coroll.). Mais, d'après la dernière proposition, cette somme est égale à s. Donc *le nombre demandé est égal à* (t^2+s).

6. Je considère maintenant un groupe circulaire unique, et, fixant mon attention sur la formule (5), je cherche comment elle se transforme quand je passe au groupe corrélatif. Je remarque que le

[1] *Voir*, à ce sujet, la Note placée à la fin du Mémoire, paragraphe 4.

seul terme qui se modifie est celui-ci

$$N(N-1)\frac{p}{q} = N^2\frac{p}{q} - N\frac{p}{q}.$$

Or on a

$$N^2\frac{p}{q} = pq(q_1q_2\ldots q_s)^2.$$

Les lettres p et q étant transposées, ce terme ne change pas. Quant au terme

$$N\frac{p}{q} = pq_1q_2\ldots q_s,$$

il se change, pour la courbe corrélative, en

$$qq_1q_2\ldots q_s = N.$$

Soit $\mathcal{S}'$ le nombre analogue à $\mathcal{S}$ pour la seconde courbe, et

$$N' = pq_1q_2\ldots q_s.$$

Nous avons ainsi

$$2\mathcal{S} - N = 2\mathcal{S}' - N'.$$

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ les abaissements que produisent dans la classe les deux groupes circulaires considérés ; on a vu que

$$\mathcal{A} = N(N-1) + 2\mathcal{S},$$
$$\mathcal{A}' = N'(N'-1) + 2\mathcal{S}',$$

Donc

$$\mathcal{A} - \mathcal{A}' = N^2 - N'^2.$$

Si l'on considère, sur deux courbes corrélatives, deux groupes de points correspondants, c'est-à-dire tels que l'un quelconque de ces points ait son corrélatif dans le groupe opposé, on obtiendra immédiatement, par l'application de cette formule, la proposition suivante :

Théorème VI. — *Si l'on considère, sur deux courbes corrélatives, deux groupes de points correspondants, la somme des abaissements de la classe dus aux points d'un groupe, diminuée de la somme des carrés des multiplicités de ces points, est la même pour les deux groupes.*

Exemple. — On demande l'abaissement de la classe dû au

point corrélatif d'un point simple où une courbe a, avec sa tangente, un contact d'ordre t.

On a ici

$$\mathcal{A} = 0, \qquad N = 1, \qquad N' = t.$$

Donc

$$\mathcal{A}' = t^2 - 1.$$

Le nombre demandé est égal à $t^2 - 1$, résultat bien connu.

ARTICLE V.

1. Les points de contact des tangentes menées d'un point à une courbe algébrique sont, comme on le sait, les intersections de cette courbe avec une autre courbe algébrique, nommée *polaire* du point considéré. Cette polaire passe par chaque point multiple de la courbe. La méthode qui s'offre donc naturellement, pour chercher l'abaissement de la classe dû à un point multiple, consiste dans la recherche du nombre des intersections d'une courbe et d'une polaire, confondues en un point multiple de la courbe. La considération de la polaire ne diffère pas de celle du déplacement de la courbe, considération employée dans l'Article précédent : car, au point de vue de ses intersections avec la courbe, l'équation de la polaire ne diffère pas de celle de la courbe déplacée. Ce n'est donc pas par le fond, mais simplement par le procédé de raisonnement que la méthode ci-après diffère de celle qui a été employée précédemment.

Soit O un point d'une courbe algébrique $f(x,y) = 0$, rapportée à des axes dont l'origine est en O. Soit $\psi(x,y) = 0$ l'équation, sous forme entière, de la polaire d'un point (X, Y). Pour calculer le nombre des intersections des deux courbes réunies en O, on appliquera le théorème II (Art. I), c'est-à-dire qu'on fera la somme des ordres des quantités $\psi(x,y)$, y étant un infiniment petit du premier ordre, et x étant l'une quelconque des racines infiniment petites de $f(x,y)=0$, Je supposerai l'axe des x non tangent à la courbe f au point O. La fonction $\psi(x,y)$ étant, comme on sait, un *covariant*, c'est-à-dire ne changeant pas de forme si l'on change les axes de coordonnées, je peux, pour calculer une quelconque des quantités $\psi(x,y)$, supposer que, l'axe des x restant fixe, celui des y est tangent à la branche de la courbe f, sur laquelle se trouve le point (x,y).

Suivant un usage assez ordinaire, je dénote par f_1, f_2 les dérivées partielles $\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}$, et de même je désignerai plus loin, quand il en sera fait usage, par f_{11}, f_{12}, f_{22} les dérivées partielles du second ordre.

L'équation de la polaire du point (X, Y) est, comme on sait,

$$\psi(x, y) = Xf_1 + Yf_2 + f_3 = 0,$$

f_3 étant la quantité $(mf - xf_1 - yf_2)$, où m est le degré de f. Il est manifeste que, lorsqu'on prend pour x et y les coordonnées d'un point de f infiniment voisin de l'origine, la quantité f_3 est toujours d'un ordre supérieur à celui de $Xf_1 + Yf_2$. Au point de vue où je me place, je peux donc écrire simplement

$$\psi(x, y) = Xf_1 + Yf_2.$$

Pour abréger, je désignerai par la notation (u) l'ordre infinitésimal auquel appartient une quantité u fonction de x et de y, pour les valeurs considérées de ces variables.

Soit x une racine de l'équation $f(x, y) = 0$, on a

$$f_1\,dx + f_2\,dy = 0;$$

d'où

$$f_2 = -f_1 \frac{dx}{dy}.$$

Si l'on suppose l'axe des y tangent à la branche de courbe sur laquelle se trouve le point d'ordonnée y et d'abscisse x, soit $\varepsilon > 0$ l'ordre du contact. Pour y infiniment petit du premier ordre, x est d'ordre $(1 + \varepsilon)$, et $\frac{dx}{dy}$ d'ordre ε. Donc, d'après la notation indiquée, j'ai

$$(f_2) = (f_1) + \varepsilon.$$

Par suite, X et Y étant quelconques,

$$(\psi) = (f_1).$$

Ici $f(x, y) = 0$ est l'équation de la courbe, la tangente de la branche considérée étant prise pour axe des y. Mais si l'on change l'axe des y sans changer celui des x, les nouvelles coordonnées étant x' et y', et l'équation de la courbe devenant $f'(x', y') = 0$, on a $f'_1 = f_1$.

Par suite, la relation ci-dessus est toujours exacte, quel que soit l'axe des y, et la somme des ordres des quantités $\psi(x, y)$ est égale à la somme des ordres des quantités $f_1(x, y)$, l'axe des x étant différent des tangentes de la courbe f.

L'axe des x pouvant être pris arbitrairement, je suppose que la courbe n'ait pas d'asymptote parallèle à cet axe. Cela étant, si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont les racines x infiniment petites de $f(x, y) = 0$ pour y infiniment petit, on a

$$f(x, y) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)\,Q = PQ,$$

Q étant une fonction qui reste finie pour $x = 0$ et $y = 0$, et P étant le produit des n binomes $(x - a)$. J'en conclus

$$f_1(x, y) = QP_1 + PQ_1,$$

et pour $x = a_1, \ldots, a_n$,

$$f_1(x, y) = QP_1, \qquad (f_1) = (P_1).$$

Pour $x = a_i$, on a

$$P_1 = (a_i - a_1)(a_i - a_2)\ldots(a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1})\ldots(a_i - a_n);$$

d'où

$$(P_1) = \sum_j (a_i - a_j);$$

par suite

$$\sum_i (P_1) = \sum_{i,j} (a_i - a_j).$$

Dans le second membre, l'ordre de chaque binome $a_i - a_j$ est répété deux fois. On a donc cette proposition :

Théorème I. — *L'abaissement de la classe d'une courbe, dû à un point singulier quelconque, est égal au double de la somme des ordres des segments infiniment petits et infiniment voisins de ce point, interceptés par la courbe sur une sécante dont la distance au point singulier est infiniment petite du premier ordre, et qui fait des angles finis avec les tangentes de la courbe en ce point.*

Ce théorème est conforme au théorème II (art. IV, § 2).

Si le point (X, Y) est situé sur une des tangentes de la courbe en O, le calcul précédent se modifie. Cette tangente étant prise pour axe des y, la quantité $\psi(x,y)$ se réduit, à cause de $X = 0$, à Yf_2. Par suite, on a alors

$$(\psi) = (f_2) = (f_1) + \varepsilon,$$

en considérant un point (x,y) situé sur une branche ayant un contact d'ordre ε avec l'axe des y. La somme des ordres de ψ se trouve donc augmentée de la somme des quantités ε. Par suite :

Théorème II. — *La somme des ordres des contacts des branches d'une courbe avec une de ses tangentes est égale à la multiplicité du point correspondant à cette tangente dans la courbe corrélative.*

C'est le théorème V de l'article IV, § 5.

Voici une vérification de ces propositions :

Soient φ une courbe corrélative de f, Δ la tangente de φ, corrélative du point O, et Ω le point de Δ corrélatif d'une des tangentes D de f en O.

D'après le théorème II, la multiplicité de Ω est la somme $\sum \varepsilon$ des ordres des contacts des branches de f tangentes à D. De plus, si n est le nombre de ces dernières branches, n est aussi la somme des ordres des contacts des branches de φ tangentes à Δ et Ω. Donc (th. I, art. I) le nombre des intersections de Δ et de φ réunies en Ω est $n + \sum \varepsilon$.

Je considère les différentes tangentes D, D', ... de f en O, et les différents points Ω, Ω', ... corrélatifs sur Δ. J'en conclus que le nombre des intersections de φ et de Δ réunies en ces divers points est

$$n + n' + \ldots + \sum \varepsilon + \sum \varepsilon' + \ldots.$$

Or ce nombre n'est autre que la différence des nombres de tangentes qu'on peut mener à f d'un point quelconque ou du point O. C'est cette vérification qu'il s'agit d'effectuer.

Pour trouver directement combien de tangentes, menées à f du point O, disparaissent, il suffit d'appliquer la méthode ci-dessus à la polaire du point O. Cette polaire se réduit simplement à

$$f_3 = mf - xf_1 - yf_2 = 0,$$

et, pour les valeurs considérées, à

$$xf_1 + yf_2 = 0.$$

Pour un point d'une branche de f, tangente à l'axe des y, et ayant avec cette droite un contact d'ordre ε, on voit que les deux quantités xf_1 et yf_2 sont toutes deux d'ordre $(f_1) + 1 + \varepsilon$. Il est, de plus, facile de montrer, et je ne m'y arrête pas, que les termes de cet ordre ne sauraient se détruire dans la somme. Il en résulte

$$(f_3) = (f_1) + 1 + \varepsilon.$$

Par suite

$$\sum(f_3) = \sum(f_1) + n + n' + \ldots + \sum\varepsilon + \sum\varepsilon' + \ldots,$$

ainsi qu'on l'avait trouvé précédemment par un moyen détourné.

2. C'est avec la plus grande facilité que la méthode précédente s'applique à la recherche du nombre des points d'inflexion absorbés par un point singulier. Les points d'inflexion d'une courbe sont ses points d'intersection avec une autre courbe nommée *hessienne*. On sait que, si, par l'introduction d'une troisième variable z, on rend homogène l'équation d'une courbe $f(x, y, z) = 0$, l'équation de la hessienne est

$$\mathrm{H} = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

La variable z est égalée à l'unité après les différentiations.

Ici je n'ai pas besoin d'introduire cette troisième variable. On peut, en effet, en tenant compte des propriétés des fonctions homogènes, et désignant par m le degré de f, écrire

$$\mathrm{H} = (m-1)^2(2f_1f_2f_{12} - f_1^2f_{22} - f_2^2f_{11}) + m(m-1)f(f_{11}f_{22} - f_{12}^2).$$

Par suite, pour les valeurs de x et y qui annulent f, on a, au facteur constant $(m-1)^2$ près,

$$\mathrm{H} = 2f_1f_2f_{12} - f_1^2f_{22} - f_2^2f_{11}.$$

Pour la question à traiter ici, je prends cette forme de la hessienne. Si, comme plus haut, j'appelle a une racine x de l'équation $f(x, y) = 0$,

on trouve aisément, pour $x = a$,

$$H = \frac{d^2 a}{dy^2} f_1^3(a, y).$$

Si l'axe des y est tangent à la branche de courbe sur laquelle se trouve le point d'ordonnée y et d'abcisse a, et que l'ordre de contact soit ε, il est manifeste que $\frac{d^2a}{dy^2}$, pour y infiniment petit du premier ordre, est de l'ordre $(\varepsilon - 1)$, c'est-à-dire infiniment petit de cet ordre pour $\varepsilon > 1$, fini pour $\varepsilon = 1$, et infiniment grand de l'ordre $(1 - \varepsilon)$ pour $\varepsilon < 1$. Mais il n'est pas nécessaire, pour l'exactitude de cette conclusion, que l'axe des y soit tangent à cette branche de courbe. Elle subsiste aussi dans les autres cas, pourvu que l'axe des x ne soit pas la tangente de la branche de courbe; car la courbure de cette branche en O a pour expression la limite de

$$\frac{\frac{d^2 a}{dy^2}}{\left(1 + \frac{d^2 a}{dy^2}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Par suite, pourvu que $\frac{da}{dy}$ ne soit pas infini, c'est-à-dire pourvu que l'axe Ox ne soit pas tangent à la branche de courbe, l'ordre de $\frac{d^2a}{dy^2}$ est celui de la courbure. Ce nombre est donc indépendant de l'axe des y, et, par suite, toujours égal à $(\varepsilon - 1)$.

Je n'ai donc pas besoin ici de supposer que l'axe des y coïncide successivement avec chaque tangente de la courbe f, pour apercevoir facilement le résultat, comme je l'ai fait dans l'application précédente, et comme on pourrait cependant le faire également ici, l'équation de la hessienne ayant pour premier membre un *covariant*.

D'après ces observations, pour chacune des valeurs de x, y considérées, on a

$$(H) = 3(f_1) + \varepsilon - 1,$$

ε étant l'ordre du contact, avec sa tangente, de la branche de courbe où se trouve le point (x, y). Par suite,

(1) $$\sum(H) = 3\sum(f_1) + \sum\varepsilon - N.$$

Or $\sum (f_1)$ est l'abaissement de la classe, et $\sum \varepsilon$ est (théor. II) la somme des multiplicités des points qui, dans la courbe corrélative, correspondent au point singulier considéré. Donc :

Théorème III. — *Le nombre des points d'inflexion absorbés par un point singulier est égal au triple de l'abaissement que ce point produit dans la classe, diminué de la multiplicité de ce point et augmenté de la somme des multiplicités des points qui lui correspondent dans la courbe corrélative.*

3. *Remarque.* — Dans ce qui précède, je n'ai considéré que des points singuliers à distance finie, et les résultats ne s'en étendent pas moins aux points singuliers placés à l'infini, comme ou le sait par la théorie des transformations homographiques. Dans les applications qui vont suivre, et qui auront trait à l'influence des points singuliers sur les développées des courbes, cette extension ne pourra être faite, et je serai forcé de faire la distinction des deux cas. Pour le moment, je vais appliquer les propositions précédentes à un exemple, que je choisirai précisément de telle sorte qu'il y ait à considérer un point singulier à l'infini.

Exemple. — L'exemple dont il s'agit sera fourni par la courbe

$$(S) \qquad x^{p-q} = y^p,$$

p et q étant des entiers, $q < p$, et p et q pouvant être supposés premiers entre eux, sans quoi la courbe serait décomposable en plusieurs autres. Si l'on cherche à calculer directement l'équation de sa corrélative d'après les équations données dans l'article précédent, on trouve facilement la suivante :

$$(\Sigma) \qquad \left(\frac{p-q}{p}\right)^p \eta^p = \left(-\frac{p-q}{q}\right)^q \xi^q.$$

On voit donc par cette équation, que la courbe proposée est de classe égale à son degré p. On y reconnaît encore à l'origine Ω des coordonnées (ξ, η) le point qui correspond à l'origine O des coordonnées (x, y) sur la courbe proposée.

En O, on a la multiplicité $(p-q)$, et des contacts d'ordre $\frac{p}{p-q} - 1 = \frac{q}{p-q}$ avec la tangente Oy. En Ω, on a la multiplicité

$q = (p-q)\frac{q}{p-q}$, et des contacts d'ordre $\frac{p}{q} - 1 = \frac{p-q}{q}$ avec la tangente $\Omega\eta$. Tout ceci est donc bien conforme aux théorèmes ci-dessus.

Par une transformation homographique bien connue, l'équation de la courbe S se change en $x^q = y^p$. On voit donc que le point à l'infini de S, qui sur cette dernière courbe est venu à l'origine des coordonnées, est composé comme le point Ω, corrélatif du point O de S.

L'abaissement de la classe dû au point O est (théor. I) égal à

$$(p-q)(p-q-1)\frac{p}{p-q} = p(p-q-1).$$

L'abaissement dû au point à l'infini sur S est égal à $p(q-1)$. La somme de ces deux nombres est $p(p-2)$, et la classe de S est donc

$$p(p-1) - p(p-2) = p,$$

comme on l'a trouvé par l'équation de Σ.

Si l'on applique le théorème III à ces deux points, qui sont corrélatifs l'un de l'autre, on voit que la somme des nombres de points d'inflexion qu'ils absorbent est égale au triple de l'abaissement qu'ils produisent dans la classe, c'est-à-dire à $3p(p-2)$. Donc la courbe S n'a pas de point d'inflexion en dehors des deux points considérés. Il en est de même de la courbe Σ.

4. On définit souvent les points d'inflexion, considérés seulement à distance finie, par cette propriété qu'*en ces points la courbure est nulle*. On sait, ainsi qu'on l'a d'ailleurs vu un peu plus haut, que cette propriété appartient à toute branche de courbe ayant avec sa tangente un contact d'ordre supérieur à l'unité. Au contraire, dans le cas où ce contact est d'ordre inférieur à l'unité, la courbure est infinie. Il paraît donc naturel de considérer une branche de courbe comme contenant une ou plusieurs inflexions, dans le premier cas; comme n'en contenant pas, dans le second.

Cette notion se précise davantage, si l'on considère la développée de la courbe. D'après la définition ci-dessus, un point d'inflexion est un point à distance finie, et tel que le point correspondant de la développée soit à l'infini. Il est donc naturel de définir le *nombre*

des inflexions effectives contenues en un point singulier d'une courbe par le nombre des intersections de la développée avec la droite de l'infini qui correspondent à ce point. Je suis donc conduit à étudier cette développée. Pour ne pas avoir à revenir sur cette définition, je fais usage d'un résultat qui va bientôt être obtenu, à savoir que, *si, en un point d'une courbe à distance finie, n est le nombre des branches ayant avec une même tangente en ce point des contacts d'ordre $\varepsilon > 1$, le point correspondant de la développée est à l'infini et est de multiplicité $n(\varepsilon - 1)$.* D'après ce résultat, je puis dire que $n(\varepsilon - 1)$ est le *nombre des inflexions effectives* contenues dans ce groupe de branches au point singulier considéré.

Cette définition admise, soit, en un point, n' le nombre des branches ayant avec une tangente des contacts d'ordre $\varepsilon' < 1$. Elles fournissent, dans la relation (1) qui exprime le théorème III, paragraphe 2, le terme

$$-n'(1 - \varepsilon') = -n'\varepsilon'\left(\frac{1}{\varepsilon'} - 1\right).$$

Or ce nombre est, en vertu de la définition et des théorèmes IV et V (art. IV, § 5), le nombre des inflexions effectives contenues dans les branches correspondantes de la courbe corrélative au point correspondant.

Soit aussi n le nombre des branches ayant avec une même tangente des contacts d'ordre $\varepsilon > 1$. Elles fournissent, dans la relation (1), le terme $n(\varepsilon - 1)$, qui est le nombre des inflexions effectives qu'elles contiennent. Je remarque, en outre, que les branches correspondantes, dans la courbe corrélative, ne contiennent pas d'inflexion, puisque l'ordre de leur contact avec leur tangente est

$$\frac{1}{\varepsilon} < 1.$$

Je remarque enfin que les branches ayant avec leurs tangentes des contacts d'ordre égal à l'unité disparaissent du terme $\sum \varepsilon - N$.

D'après ces observations, retranchant du nombre des inflexions absorbées par le point singulier celui des inflexions effectives qui y sont contenues, je puis énoncer le théorème III sous cette autre forme :

Théorème IV. — *Le nombre des inflexions effectives que fait*

disparaître un point singulier est égal au triple de l'abaissement qu'il produit dans la classe, diminué du nombre des inflexions effectives contenues dans les points corrélatifs.

A cet énoncé il faut ajouter que le *nombre des points d'inflexion absorbés par un point singulier est égal au nombre des inflexions qu'il fait disparaître, augmenté de celui des inflexions effectives qui y sont contenues.*

J'aborde maintenant l'étude de l'influence des points singuliers sur les développées des courbes algébriques, étude liée, comme on le voit, de la manière la plus intime, aux théories précédentes.

ARTICLE VI.

1. L'étude de l'influence d'un point singulier d'une courbe sur la développée de cette dernière offre les questions suivantes : Quel est l'abaissement du degré? Quel est l'abaissement de la classe de la développée dû au point singulier? Quelle est la nature des points correspondants dans cette développée? Pour répondre à ces questions, je suis la méthode employée dans l'article précédent, de la manière suivante :

Je prends une droite arbitraire D, et je cherche les points d'une courbe donnée f, tels que les centres de courbure correspondants soient sur D. Pour déterminer ces points, j'obtiens une équation qui définit une courbe ψ, dont les intersections avec f sont les points cherchés. Si O est un point singulier de f, la courbe ψ passe en ce point, et le nombre des intersections des deux courbes réunies en O est l'abaissement du degré de la développée dû au point O.

J'ai donc ainsi la réponse à la première question. Mais je puis aller plus loin dans cette voie. Soit a le nombre que je viens de trouver ainsi en laissant la droite D arbitraire. Je fais maintenant passer la droite D par un des points Ω, correspondant à O dans la développée. Je trouve alors, au lieu de a, un autre nombre $(a + a_1)$. J'en conclus que a_1 est la multiplicité du point Ω sur la développée. Enfin, et en dernier lieu, je prends pour D une tangente de la développée en Ω. Je trouve un nouveau nombre $(a + a_1 + a_2)$. J'en conclus (art. I, théor. I, coroll. 2) que a_2 est la somme des ordres des contacts de la développée avec D au point Ω. Cela suffit pour connaître la nature du point Ω. Il est, en effet, évident que, si, au

point O, la courbe f se décompose en plusieurs groupes circulaires donnant lieu à un même point Ω, sa développée, en Ω, se décompose également en autant de groupes circulaires correspondants, et qui sont les mêmes que si chacun des premiers existait seul au point O.

Il suffira donc de calculer les nombres a_1 et a_2 dans l'hypothèse où la courbe f possède, en O, un seul groupe circulaire, ainsi qu'on le comprendra immédiatement par l'application de la méthode. Avant de procéder à cette application, je poursuis l'exposition de la méthode elle-même.

D'une manière analogue, je détermine directement la classe de la développée de f. A cet effet, je prends un point A arbitraire, et je cherche les points de f tels que les normales passent par A. Ces points sont les intersections de f et d'une autre courbe θ. Soit b le nombre des intersections de θ et de f réunies en O. J'en conclus que le point O abaisse de b unités la classe de la développée. Je place maintenant le point A sur la normale N en O. Je trouve alors, au lieu de b, un nombre différent $(b+b_1)$. J'en conclus que b_1 est le nombre des tangentes qu'on peut mener en moins à la développée d'un point de sa tangente N, c'est-à-dire (théor. II, art. V, § 2) la somme des ordres des contacts de la développée avec N. En dernier lieu, je place A en Ω, et je trouve le nombre $b+b_1+b_2$. J'en conclus que b_2 est (théor. II, art. V, § 2) la multiplicité de Ω. J'ai donc déterminé de deux manières différentes les mêmes nombres, et si je considère un seul groupe circulaire de f, je suis assuré de trouver $b_1=a_2$, $b_2=a_1$, ce qui donne lieu à une vérification.

Enfin je puis, au moyen de la seule courbe θ, répondre à la première question sans faire usage de la courbe ψ; car je puis, par ce moyen, connaître tous les points de la développée situés à l'infini, et en déduire le degré de cette courbe.

Il serait fastidieux de donner, pour chacun des cas que je vais avoir à examiner, l'application de ces trois procédés. Je choisirai, pour chaque cas, le procédé le plus expéditif, sauf cependant pour le premier, au sujet duquel je vais immédiatement appliquer les trois méthodes, à titre d'exemple.

2. La courbe f étant représentée par l'équation $f(x,y)=0$ *en coordonnées rectangulaires*, soit

$$D = Ax + By + C = 0$$

l'équation d'une droite D quelconque. Il est facile de former l'équation de la courbe ψ, dont les intersections avec f sont les points pour lesquels les centres de courbures de f sont sur D. Désignant par H, comme dans l'article précédent, le hessien de f,

$$H = 2f_1 f_2 f_{12} - f_1^2 f_{22} - f_2^2 f_{11},$$

j'obtiens, pour la courbe ψ, l'équation suivante :

$$\psi = (Ax + By + C)H + (f_1^2 + f_2^2)(Bf_2 + Af_1) = 0.$$

Je suppose que l'origine O des coordonnées soit un point singulier de f, ce qui restreint l'analyse actuelle au cas des points à distance finie; et, pour me conformer à la méthode indiquée, je cherche l'ordre de ψ en supposant le point (x, y) placé à l'intersection de f et d'une parallèle à l'axe des x à distance y du premier ordre de O.

L'ordre de $(Ax + By + C)H$ n'est autre que celui de H. Or on a vu précédemment que, ε étant l'ordre du contact de la branche de courbe (x, y) avec sa tangente, on a

$$(H) = 3(f_1) + \varepsilon - 1.$$

Si l'on suppose l'axe des y quelconque, f_1 et f_2 sont du même ordre, et $f_1^2 + f_2^2$ est de l'ordre $2(f_1)$, à moins que les termes de cet ordre ne se détruisent dans la somme de ces deux carrés. Or on a

$$f_1\,dx + f_2\,dy = 0;$$

d'où

$$1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{f_1^2 + f_2^2}{f_1^2}.$$

Donc, si $f_1^2 + f_2^2$ est d'ordre supérieur à f_1^2, il en résulte

$$1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 0,$$

c'est-à-dire que la tangente de la branche de courbe considérée est une asymptote de cercle, ou, suivant l'expression de M. Laguerre, une *droite isotrope*. J'écarte ce cas d'exception pour le moment, et, sous cette restriction, je vois que l'ordre de

$$(f_1^2 + f_2^2)(Bf_2 + Af_1)$$

est $3(f_1)$.

Ainsi ψ est la somme de deux fonctions, l'une d'ordre $3(f_1)$, l'autre d'ordre $3(f_1)+\varepsilon-1$. Donc l'ordre de ψ est le plus petit de ces deux nombres, c'est-à-dire le premier pour $\varepsilon>1$, le second pour $\varepsilon<1$. Pour $\varepsilon=1$, ces deux nombres sont égaux. Il n'y a pas à craindre qu'alors l'ordre de la somme des deux fonctions s'élève au-dessus de $3(f_1)$, à cause de l'indétermination des coefficients A, B, C.

Si je considère tous les points de f, d'ordonnée y et infiniment voisins de O, j'ai donc

$$\sum(\psi)=3\sum(f_1)+\sum\varepsilon-n,$$

la somme $\sum\varepsilon$ s'appliquant seulement aux nombres $\varepsilon<1$, et n étant le nombre des branches correspondantes. Or $\left(\sum\varepsilon-n\right)$ est précisément égal à $\left(n'-\sum\varepsilon'\right)$, où n' et $\varepsilon'>1$ se rapportent aux branches correspondantes de la courbe corrélative. Ce nombre $n'-\sum\varepsilon'$, changé de signe, n'est autre chose que celui des inflexions effectives contenues dans ces branches. Donc :

Théorème I. — *L'abaissement du degré de la développée d'une courbe, dû à un point singulier à distance finie, et où aucune tangente n'est isotrope, est égal au triple de l'abaissement que ce point produit dans la classe de la courbe elle-même, diminué du nombre des inflexions effectives contenues dans la courbe corrélative de cette dernière, aux points correspondants.*

3. Pour suivre l'application de la méthode indiquée, je dois maintenant disposer de la droite D de manière à élever l'ordre de ψ. Conformément aux explications données, je puis actuellement me borner à considérer en O, sur la courbe f, un groupe de branches ayant, avec une même tangente, que je peux prendre pour axe des y, des contacts du même ordre ε. Ici je suis obligé de distinguer deux cas, suivant que ε est inférieur ou supérieur à l'unité.

Je prends le premier cas. Soit n le nombre des branches de f, ayant en O, avec Oy, des contacts d'ordre $\varepsilon<1$.

Les termes du moindre ordre, dans ψ, proviennent du terme CH, d'ordre $3(f_1)+\varepsilon-1$. Pour élever l'ordre de ψ, il faut donc faire

$C = 0$, c'est-à-dire faire passer D par le point O. Ainsi, comme on le savait, les branches de la courbe ont leurs centres de courbure en O.

Grâce à l'hypothèse $C = 0$, l'ordre des termes provenant de $(Ax + By + C)H$ est celui de yH, ou $3(f_1) + \varepsilon$, y étant du premier ordre. D'ailleurs, l'ordre des autres termes est toujours $3(f_1)$. Ce sont donc ces derniers qui marquent maintenant l'ordre de ψ. Prenons les diverses branches de f, nous avons

$$\sum(\psi) = 3\sum(f_1) = a + a_1$$

tandis que nous avions précédemment

$$\sum(\psi) = 3\sum(f_1) + \sum(\varepsilon - 1) = 3\sum(f_1) - n(1 - \varepsilon) = a.$$

Donc

$$a_1 = n(1 - \varepsilon).$$

J'ai ainsi la multiplicité du point O sur la développée,

Actuellement, c'est le terme Af_1^3 qui fournit, dans ψ, le terme du moindre ordre. Pour élever l'ordre de ψ, il faut donc faire $A = 0$, ce qui réduit la droite D à l'axe des x. Ainsi, comme on le savait, la normale de f est la tangente de sa développée. Actuellement ψ se réduit à $B(Hy + f_2 f_1^2)$.

On a montré plus haut (art. V, 2) que x étant une racine de f, on a

$$f_2 = -\frac{dx}{dy} f_1, \qquad H = \frac{d^2 x}{dy^2} f_1^3.$$

En négligeant le facteur constant B, je peux donc écrire, pour une telle valeur de x,

$$\psi = f_1^3 \left(\frac{d^2 x}{dy^2} y - \frac{dx}{dy} \right).$$

Soit maintenant $Ky^{1+\varepsilon}$ la partie principale de x, on voit que la partie principale de la quantité entre parenthèses est

$$K(1 + \varepsilon)(\varepsilon - 1) y^{\varepsilon},$$

qui ne peut se réduire à zéro, puisque ε est, par hypothèse, inférieur à l'unité. Donc

$$(\psi) = 3(f_1) + \varepsilon,$$

et

$$\sum(\psi) = 3\sum(f_1) + n\varepsilon = a + a_1 + a_2.$$

Donc

$$a_2 = n\varepsilon.$$

Telle est donc la somme des ordres des contacts des branches de la développée avec leur tangente. Leur nombre étant $n(1-\varepsilon)$, l'ordre du contact de chacune d'elles est $\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$.

Au sujet de cette application, je ferai remarquer que ce dernier résultat s'obtient directement avec la plus grande facilité.

Si l'on suppose, en effet, que la partie principale de x est, comme précédemment $Ky^{1+\varepsilon}$, on peut calculer au moyen de cette seule donnée les parties principales des coordonnées du centre du cercle osculateur de la branche de courbe. En employant les formules connues, on trouve

$$X = \frac{1}{\varepsilon(1+\varepsilon)} y^{1-\varepsilon} + \ldots,$$

$$Y = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} y + \ldots.$$

Pour $\varepsilon < 1$, X et Y sont infiniment petits avec y, et l'on a, pour la partie principale de Y, une expression telle que $AX^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$, A étant une constante. On a ainsi une branche de courbe, dont le contact avec sa tangente est d'ordre $\frac{1}{1-\varepsilon} - 1 = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$, comme on vient de le trouver.

En approfondissant davantage ce mode de raisonnement, on pourrait parvenir à trouver le nombre des branches de la développée et les autres résultats de cet article. On voit que ce serait suivre la méthode employée précédemment pour d'autres recherches (art. III).

La même remarque, que je ne répéterai pas, s'applique aux autres cas que je considérerai.

4. Je poursuis en considérant le cas où la courbe f comprend, en O, n' branches, ayant avec Oy des contacts d'ordre $\varepsilon' > 1$.

Les termes du moindre ordre, dans ψ, proviennent de Af_1^3. Pour élever l'ordre de ψ, on fera donc $A = 0$; ce qui montre que les centres de courbure sont à l'infini sur Ox, comme on le savait.

On avait

$$a' = 3\sum(f_1);$$

on aura maintenant

$$\sum(\psi) = 3\sum(f_1) + n'(\varepsilon' - 1) = a' + a'_1,$$

$$a'_1 = n'(\varepsilon' - 1).$$

On fera ensuite $C = 0$, et l'on trouvera

$$\sum(\psi) = 3\sum(f_1) + n'\varepsilon' = a' + a'_1 + a'_2,$$

$$a'_2 = n'.$$

L'ordre du contact de chaque branche de la développée est

$$\frac{a'_2}{a'_1} = \frac{1}{\varepsilon' - 1}.$$

Le cas où l'ordre du contact est l'unité peut être traité par la même voie ; mais il sera plus simple d'employer le second procédé, que j'applique d'abord aux cas précédents.

Les coordonnées étant toujours rectangulaires, les points pour lesquels la normale de f passe en un point donné (X, Y) sont à l'intersection de f et de la courbe θ, dont l'équation est

$$\theta = (X - x)f_2 - (Y - y)f_1 = 0.$$

L'origine des coordonnées O étant un point singulier de f, et x et y étant les coordonnées d'un point de f infiniment voisin de O, je vois que, tant que X et Y sont quelconques, l'ordre de θ est toujours égal à celui de f_1, l'axe des x n'étant pas tangent à f en O.

J'en conclus donc, dans tous les cas,

$$\sum(\theta) = \sum(f_1) = b.$$

Ainsi, *tout point singulier, à distance finie, produit dans la classe de la développée le même abaissement que dans celle de la courbe.*

Pour suivre la méthode exposée précédemment, je suppose maintenant que f comprenne seulement un groupe de n branches ayant avec Oy des contacts d'ordre ε. Pour élever l'ordre de θ, je dois faire

alors $Y=0$; pour le cas de $\varepsilon<1$, le terme Xf_2 est du moindre ordre, et j'ai

$$\sum(\theta)=\sum(f_2)=\sum(f_1)+n\varepsilon=b+b_1,$$
$$b_1=n\varepsilon=a_2.$$

Faisant ensuite $X=0$, j'ai

$$\sum(\theta)=\sum(yf_1)=\sum(f_1)+n=b+b_1+b_2.$$
$$b_2=n(1-\varepsilon)=a_1.$$

Au contraire, si l'ordre du contact est supérieur à l'unité, le désignant par ε', et par n' le nombre des branches, j'ai, pour $Y=0$,

$$\sum(\theta)=\sum(yf_1)=\sum(f_1)+n'=b+b'_1,$$
$$b'_1=n'=a'_2.$$

Pour élever l'ordre de θ, je dois faire ensuite X infini, et j'ai

$$\sum(\theta)=\sum(f_2)=\sum(f_1)+n'\varepsilon'=b+b'_1+b'_2,$$
$$b'_2=n'(\varepsilon'-1)=a'_1.$$

Pour le cas où l'ordre du contact est l'unité, j'ai, en faisant $Y=0$, deux termes d'ordre égal à $(f_1)+1$, dans θ, à savoir :

$$Xf_2 \quad \text{et} \quad Yf_1;$$

X restant quelconque, j'ai toujours

$$\sum(\theta)=\sum(yf_1)=\sum(f_1)+\nu=b+\beta_1,$$
$$\beta_1=\nu,$$

ν désignant le nombre des branches de f. Mais il devient manifeste que, pour élever encore l'ordre de θ, il faut donner à X une valeur finie, à savoir : $-\frac{yf_1}{f_2}$ ce qui montre que les centres de courbure sont à distance finie du point O. L'expression $-\frac{yf_1}{f_2}$ peut avoir plusieurs valeurs finies différentes, c'est-à-dire que les branches de f peuvent se répartir en plusieurs groupes, tels que les branches de chaque groupe aient un même cercle osculateur en O. En raisonnant

comme on l'a fait au début de cet article, on peut se borner à supposer qu'il existe un seul de ces groupes ; le nombre ν est alors sa multiplicité. Soit

$$C = 2Rx - x^2 - y^2 = 0$$

l'équation du cercle osculateur commun aux ν branches de f.

Mettons, dans l'expression de C, pour les coordonnées (x, y) les différentielles dx, dy, relatives à un point de f. En vertu de la relation,

$$f_1\,dx + f_2\,dy = 0,$$

on peut écrire alors, C se réduisant à sa différentielle,

$$dC = 2[(R-x)\,dx - y\,dy] = -\frac{2\,dy}{f_1}[(R-x)f_2 + yf_1].$$

Or l'ordre de cette quantité dC est égal à l'unité augmentée de l'ordre du contact de la courbe avec le cercle C. Soit $(1+\lambda)$ l'ordre de ce contact. L'ordre de dC est alors $(2+\lambda)$ et celui de

$$(R-x)f_2 + yf_1 \quad \text{est} \quad 1 + \lambda + (f_1).$$

Or, pour $X = R$ et $Y = 0$, on a

$$\theta = (R-x)f_2 + yf_1.$$

Donc

$$(\theta) = 1 + \lambda + (f_1),$$

$$\sum(\theta) = \sum(f_1) + \nu(1+\lambda) = \beta_1 + \beta_2,$$

$$\beta_2 = \nu\lambda.$$

Ainsi la développée se compose, au point $(Y = 0, X = R)$, de $\nu\lambda$ branches, ayant avec la tangente Ox des contacts d'ordre

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{1}{\lambda}.$$

5. Au moyen de la courbe θ, j'ai déterminé, pour tous les cas sans exception, l'abaissement de la classe de la développée produit par un point singulier à distance finie, et, en second lieu, la nature des points correspondants de la développée pour tous ces cas, sauf un seul, qui a échappé à l'analyse précédente. Pour cette dernière détermination, j'ai, en effet, supposé que l'un des axes de coordonnées, qui sont d'ailleurs rectangulaires, était la tangente du groupe de branches con-

sidéré. Cette supposition devient impossible dans un cas et un seul, celui où cette tangente est isotrope : car elle est alors sa propre perpendiculaire.

Je dois donc traiter ce cas à part, ce que je fais comme il suit :

Je suppose qu'au point O la courbe f se compose de n'' branches ayant des contacts d'ordre ε'' avec la droite isotrope

$$x+y\sqrt{-1}=0.$$

Je pose

$$x+y\sqrt{-1}=x',$$

et aux variables x, y, je substitue les variables x', y. Le polynome $f(x, y)$ se change en $f'(x', y)$, et la courbe f' se compose, en O, de n'' branches ayant des contacts d'ordre ε'' avec l'axe des y.

On a d'ailleurs

$$f_1=f'_1 \qquad \text{et} \qquad f_2=f'_2+\sqrt{-1}\,f'_1,$$

en sorte que θ devient θ',

$$\theta'=(X\sqrt{-1}-Y)f'_1+Xf'_2+\sqrt{-1}(yf'_2-x'f'_1)-x'f'_2.$$

X et Y étant quelconques, on a

$$\sum(\theta')=\sum(f'_1)=\sum(f_1)=b.$$

Pour $X\sqrt{-1}-Y=0$,

$$\sum(\theta')=\sum(f'_2)=\sum(f_1)+n''\varepsilon''=b+b_1,$$
$$b_1=n''\varepsilon''.$$

Pour $X\sqrt{-1}-Y=0$ et $X=0$,

$$\sum(\theta')=\sum(yf'_2)=\sum(f_1)+n''(1+\varepsilon'')=b+b_1+b_2,$$
$$b_2=n''.$$

Par suite, le point correspondant de la développée est en O, la tangente de cette développée est la droite

$$X\sqrt{-1}-Y=0 \qquad \text{ou} \qquad X+Y\sqrt{-1}=0,$$

c'est-à-dire la tangente même de la courbe f. Elle s'y compose de

$b_2 = n''$ branches, ayant avec la tangente des contacts d'ordre $\frac{b_2}{b_1} = \varepsilon''$. En d'autres termes, le point O est de même nature sur la courbe f et sur sa développée.

6. Ayant ainsi traité tous les cas où le point singulier considéré est à distance finie, au moyen de la courbe θ, je puis, par le troisième procédé indiqué dans l'exposition de ma méthode, déterminer pour tous ces cas l'abaissement du degré de la développée, que j'ai déjà déterminé, par le premier procédé, dans tous les cas, sauf celui où une tangente est isotrope.

Soit un point singulier absolument quelconque, mais à distance finie, et B le nombre des points d'inflexion qu'il absorbe. Il est clair que ce point fait disparaître B intersections de la développée avec la droite de l'infini ; mais, d'autre part, il restitue un certain nombre de ces intersections par les centres de courbure à l'infini qui lui correspondent. Or, pour que le centre de courbure d'un groupe de branches soit à l'infini, il faut et il suffit, d'après ce que nous venons de voir, que la tangente de ce groupe ne soit pas isotrope et ait avec ces branches des contacts d'ordre $\varepsilon' > 1$.

Soit alors n' le nombre des branches d'un tel groupe ; nous avons trouvé que la multiplicité de leur centre de courbure commun à l'infini est $a'_1 = n'(\varepsilon' - 1)$: c'est le nombre des inflexions effectives qu'elles contiennent. Passant de là au cas général, je conclus que :

Théoreme II. — *Un point singulier quelconque d'une courbe, à distance finie, produit :*

1° *Dans le degré de la développée de cette courbe, un abaissement égal au nombre des points d'inflexion qu'il absorbe, diminué du nombre des inflexions effectives contenues, en ce point, dans les branches de la courbe dont les tangentes ne sont pas isotropes ;*

2° *Dans la classe de la développée, il produit le même abaissement que dans celle de la courbe même.*

Pour la composition de la développée, j'énonce comme il suit les résultats obtenus :

Théorème III. — *Si, en un point, à distance finie, une courbe algébrique comprend un groupe de n branches ayant, en ce point,*

avec une même tangente non isotrope, des contacts d'ordre $\varepsilon < 1$, *sa développée comprend un groupe de* $n(1-\varepsilon)$ *branches, ayant avec la perpendiculaire, au même point, des contacts d'ordre* $\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$.

Théorème IV. — *Si, en un point, à distance finie, une courbe algébrique comprend un groupe de* n' *branches ayant, en ce point, avec une même tangente non isotrope, des contacts d'ordre* $\varepsilon' > 1$, *sa développée comprend un groupe de* $n'(\varepsilon'-1)$ *branches, ayant avec la perpendiculaire, à l'infini, des contacts d'ordre* $\frac{1}{\varepsilon'-1}$.

Théorème V. — *Si, en un point, à distance finie, une courbe algébrique comprend un groupe de* ν *branches ayant, en ce point, avec une même tangente non isotrope, des contacts du premier ordre, et, avec un même cercle, des contacts d'un même ordre supérieur à l'unité* $(1+\lambda)$, *sa développée comprend un groupe de* $\nu\lambda$ *branches, ayant avec la normale, au centre de ce cercle, des contacts d'ordre* $\frac{1}{\lambda}$.

Théorème VI. — *Si, en un point, à distance finie, une courbe algébrique comprend un groupe de branches ayant, en ce point, avec une droite isotrope, des contacts d'un même ordre, sa développée comprend un groupe du même nombre de branches ayant, au même point, avec la même droite, des contacts de ce même ordre.*

Remarque. — Il est évident que ces quatre dernières propositions s'appliquent également à des courbes non algébriques, relativement à leurs points singuliers algébriques.

7. J'ai maintenant à traiter les mêmes questions, en considérant les points singuliers situés à l'infini. Je suivrai la même marche, en ayant seulement recours à la courbe θ, qui donne lieu aux calculs les plus simples. Je ramène la question à la recherche du nombre des intersections de deux courbes, réunies en un point à distance finie, au moyen d'une transformation homographique. J'emploie, à cet effet,

la transformation si simple et si utile

$$x = \frac{x'}{y'}, \qquad y = \frac{1}{y'},$$

que j'applique également aux coordonnées (X, Y) du point arbitraire qui figure dans θ. Je remplace donc aussi X par $\frac{X'}{Y'}$ et Y par $\frac{1}{Y'}$. Soit $F(x', y')$, ce que devient $f(x, y)$. Je désignerai par F la transformée de la courbe f. J'exprime les dérivées partielles f_1, f_2 au moyen de F_1 et F_2, et je remplace l'équation $\theta = 0$ par celle-ci :

$$\Theta = (y' - Y')F_1 + (X'y' - x'Y')(x'F_1 + y'F_2) = 0.$$

Cette dernière équation définit la courbe Θ, qui n'est pas la transformée de θ, mais qui la remplace pour l'étude proposée.

Dans la transformation employée, l'axe des y est conservé et l'axe des x' est la transformée de la droite de l'infini. Il convient aussi de rappeler que cette transformation est réciproque, en sorte que, dans la seconde figure, la droite de l'infini est la transformée de l'axe des x de la première. L'origine O' est ainsi le transformé du point à l'infini de Oy. Je suppose que le point considéré de f soit à l'infini sur Oy : le point à considérer sur F est maintenant en O'. Comme les coordonnées primitives (x, y) sont rectangulaires, l'analyse actuelle se trouve restreinte au cas où le point à l'infini considéré n'est pas un *point circulaire*, c'est-à-dire un des points de concours des droites isotropes, d'un même système. Le cas opposé sera ensuite traité à part.

Je raisonne maintenant comme précédemment, et je place le point (x', y') sur F et sur une parallèle à l'un des axes de coordonnées, à distance infiniment petite du premier ordre de O'. Il est tout d'abord manifeste qu'on a toujours

$$\sum(\Theta) = \sum(F_1).$$

Mais il faut observer que l'axe des x' n'est plus une droite quelconque, non tangente à la courbe à l'origine. L'axe des x' est, ai-je dit, la transformée de la droite de l'infini. Donc, en premier lieu, les transformées des branches de f qui ont des asymptotes auront en O' des tangentes différentes de O'x'.

En second lieu, les transformées des branches de f qui sont parabo-

liques auront, en O', la droite $O'x'$ pour tangente. Pour éviter une discussion, je place les points (x', y') sur une parallèle à $O'y'$, d'abscisse x' infiniment petite du premier ordre, en supposant, ce qui m'est permis, que l'axe $O'y'$ n'est tangent à aucune branche de F. Cela revient à supposer que Oy n'est pas une asymptote de f. Alors, pour les branches de F non tangentes à $O'x'$, j'ai

$$(F_1) = (F_2).$$

Pour une branche ayant avec $O'x'$ un contact d'ordre η, j'ai

$$(F_1) = (F_2) + \eta.$$

Donc

$$\sum(\Theta) = \sum(F_2) + \sum\eta.$$

D'ailleurs, $\sum(F_2)$ est l'abaissement de la classe de F dû à O'.

Sans faire aucun calcul, je sais, par les propriétés des transformations homographiques, que cet abaissement est le même que celui qui est produit dans la classe de f, par le point dont O' est le transformé. Donc :

Théorème VII. — *Un point singulier à l'infini et non circulaire abaisse la classe de la développée de la courbe à laquelle il appartient d'un nombre égal à l'abaissement qu'il produit dans la classe de cette courbe, augmenté de la somme des ordres des contacts de la courbe avec la droite de l'infini en ce point.*

8. Pour reconnaître maintenant la nature des points de la développée correspondant à un point singulier de f à l'infini, je procède exactement comme dans les cas précédents, et je me borne à supposer qu'en ce point la courbe f se compose d'un seul groupe de branches. Il en est de même de la courbe F au point O'. Sans qu'il soit maintenant nécessaire de détailler un raisonnement toujours le même, j'indique que, pour élever l'ordre de Θ, il faut faire successivement $Y' = 0$, et $Y' = 0$, $X' = \infty$, en supposant que l'on ait pris actuellement, pour axe des y, l'asymptote même du groupe de branches de f que l'on considère, si ces branches en ont une, ou la direction de ces branches si elles sont paraboliques, de telle sorte que l'un des axes des y' ou des x' est tangent à F en O'. J'obtiens alors :

1° Dans le cas où le groupe de branches a une asymptote, t étant le nombre de ces branches et ζ l'ordre de leur contact avec cette asymptote, tout d'abord, comme on l'a vu,

$$\sum(\Theta) = \sum(F_1) = b,$$

pour $Y' = 0$,

$$\sum(\Theta) = \sum(y'F_1) = \sum(F_1) + t = b + b_1,$$
$$b_1 = t;$$

pour $Y' = 0$, et $X' = \infty$,

$$\sum(\Theta) = \sum(x'y'F_1) = \sum(F_1) + t(2+\zeta) = b + b_1 + b_2,$$
$$b_2 = t(1+\zeta).$$

2° Dans le cas où le groupe de branches est tangent à la droite de l'infini, s étant le nombre des branches, et η l'ordre de leur contact avec la droite de l'infini, on a eu tout d'abord

$$\sum(\Theta) = \sum(F_2) + s\eta = b'.$$

J'obtiens ensuite : pour $Y' = 0$,

$$\sum(\Theta) = \sum(y'F_1) = \sum(F_2) + s(1+2\eta) = b' + b'_1,$$
$$b'_1 = s(1+\eta);$$

pour $Y' = 0$, $X' = \infty$,

$$\sum(\Theta) = \sum(x'y'F_1) = b' + b'_1 + \sum(x') = b' + b'_1 + s = b' + b'_1 + b'_2,$$
$$b'_2 = s.$$

Si j'observe maintenant la signification des hypothèses $Y' = 0$, $X' = \infty$, je reconnais que, dans les deux cas, le point de la développée de f est à l'infini sur Ox, et que la droite de l'infini y touche cette développée. En outre, le nombre des branches de cette dernière est, en ce point, dans le premier cas, b_2 ; dans le second, b'_2 ; l'ordre de leur contact avec la droite de l'infini est $\frac{b_1}{b_2}$ ou $\frac{b'_1}{b'_2}$.

J'ai ainsi les deux théorèmes suivants :

Théorème VIII. — *Si, en un point non circulaire à l'infini, une courbe comprend un groupe de t branches ayant avec une asymptote des contacts d'ordre ζ, le point correspondant de la développée est à l'infini, dans la direction perpendiculaire, et cette courbe comprend, en ce point, un groupe de $t(1+\zeta)$ branches ayant, avec la droite de l'infini, des contacts d'ordre $\frac{1}{1+\zeta}$.*

Théorème IX. — *Si, en un point non circulaire à l'infini, une courbe comprend un groupe de branches ayant avec la droite de l'infini des contacts d'un même ordre, le point correspondant de la développée est à l'infini, dans la direction perpendiculaire, et cette courbe comprend, en ce point, le même nombre de branches ayant, avec la droite de l'infini, des contacts d'ordre supérieur d'une unité.*

9. Comme cas particulier du théorème VIII, on remarquera ce qui en résulte pour les points qui, dans la développée d'une courbe, correspondent aux points ordinaires à l'infini. Si l'on fait $t=1$, $\zeta=1$, on voit que la développée se compose de deux branches ayant, avec la droite de l'infini, des contacts d'ordre $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire que le point considéré est un rebroussement ordinaire dont la tangente est la droite de l'infini. Cette remarque explique bien pourquoi la développée d'une courbe générale, de degré m, est elle-même de degré $3m(m-1)$, comme on le sait. Ses points à l'infini sont :

1° $3m(m-2)$ points ordinaires, correspondant aux points d'inflexion de la courbe ;

2° m points de rebroussement, correspondant aux points à l'infini.

En chacun de ces points, trois intersections avec la droite de l'infini sont confondues. J'ai donc ainsi

$$3m(m-2)+3m=3m(m-1)$$

intersections avec la droite de l'infini.

Cette remarque permet de calculer, au moyen des résultats précédents, l'abaissement qu'un point singulier à l'infini, et non circulaire, produit dans le degré de la développée. Ce calcul pourrait aisément être fait d'une manière directe, comme je l'ai montré dans le cas d'un point singulier à distance finie. Ici je me borne à l'emploi d'un seul procédé.

Je considère donc, sur une courbe f, un tel point singulier. Soient t le nombre des branches d'un des groupes circulaires de f en ce point et ζ l'ordre du contact de chacune de ces branches avec leur asymptote. J'emploie, d'autre part, les notations s, η pour un groupe de branches tangentes à la droite de l'infini. Soit maintenant A l'abaissement que le point considéré produit dans la classe de f; j'observe que :

1° Le nombre des points d'inflexion absorbés est

$$3A + \sum t(\zeta - 1) + \sum s(\eta - 1) = I;$$

2° Le nombre des intersections de f et de la droite de l'infini, réunies au point considéré, est

$$\sum t + \sum s(\eta + 1) = K;$$

3° Le nombre des intersections de la développée et de la droite de l'infini, réunies aux points correspondants, est (théor. VIII et IX)

$$\sum t(2 + \zeta) + \sum s(2 + \eta) = L.$$

J'en conclus, grâce à la remarque ci-dessus, que l'abaissement du degré de la développée dû au point considéré est

$$I + 3K - L = 3A + 3\sum s\eta.$$

Or $A + \sum s\eta$ est, d'après le théorème VII, l'abaissement que le point considéré produit dans la classe de la développée. Donc :

Théorème X. — *Un point singulier à l'infini et non circulaire abaisse le degré de la développée de la courbe à laquelle il appartient d'un nombre égal au triple de l'abaissement qu'il produit dans la classe de cette développée.*

10. Il me reste enfin à traiter le cas d'un point singulier à l'infini et circulaire. J'emploie à cet effet la même transformation que précédemment, et je considère les courbes F et Θ. Toutefois, les coordonnées x, y primitives étant rectangulaires, je ne puis pas, ainsi que je l'ai déjà fait observer, supposer que le point singulier de f considéré

soit sur Oy. Par suite, le point correspondant de F n'est pas à l'origine des coordonnées (x', y'). Ce point est sur $O'x'$. Je le désigne par Ω. En supposant que le point de f soit à l'infini sur la droite $x = y\sqrt{-1}$, l'abscisse de Ω sera $x' = \sqrt{-1}$. Je transporte les axes en Ω, en conservant la variable y' et en remplaçant x' par $\xi + \sqrt{-1}$.

Pour la symétrie de l'écriture, je mets η au lieu de y'; de même $(\Xi + \sqrt{-1})$ et H au lieu de X' et Y'. J'ai, par le changement de variables,

$$F(x', y') = \varphi(\xi, \eta),$$

et j'appelle φ la courbe F envisagée avec les nouveaux axes. Elle passe en Ω, et celles de ces branches qui sont les transformées des branches paraboliques de f y touchent l'axe des ξ. La courbe Θ devient maintenant

$$\begin{aligned}\Theta = \Xi\eta\,(\sqrt{-1}\,\varphi_1 + \xi\varphi_1 + \eta\varphi_2) - \mathrm{H}\big[\sqrt{-1}\,(2\xi\varphi_1 + \eta\varphi_2) + \xi(\xi\varphi_1 + \eta\varphi_2)\big] \\ + \sqrt{-1}\,\eta(\xi\varphi_1 + \eta\varphi_2).\end{aligned}$$

En raisonnant comme dans le cas précédent, désignant par τ le nombre des branches d'un groupe de φ ayant avec une droite différente de $\Omega\xi$, au point Ω, des contacts d'ordre z; et par σ le nombre des branches d'un groupe ayant avec $\Omega\xi$ des contacts d'ordre i, j'obtiens

$$\sum(\Theta) = \sum(\varphi_2) + \sum\tau + \sum\sigma(i+1).$$

D'où je conclus que :

Théorème XI. — *Un point singulier à l'infini, et circulaire, abaisse la classe de la développée de la courbe à laquelle il appartient d'un nombre égal à l'abaissement qu'il produit dans la classe de la courbe, augmenté du nombre des intersections de cette dernière et de la droite de l'infini, confondues en ce point.*

Pour l'étude de la composition de la développée aux points correspondants, je suis toujours la même méthode, qui consiste à ne considérer sur la courbe primitive qu'un seul groupe de branches, et je commence par le cas où ces branches sont tangentes à la droite de l'infini.

Dans ce dernier cas, les branches de φ qu'on a à considérer sont

tangentes en Ω à l'axe des ξ. J'ai, en premier lieu,

$$\sum(\Theta) = \sum(\eta\varphi_2) = b.$$

Puis, pour $\mathrm{H} = 0$,

$$\sum(\Theta) = \sum(\eta\varphi_1) = \sum(\eta\varphi_2) + \sigma i = b + b_1,$$
$$b_1 = \sigma i.$$

Puis, pour $\mathrm{H} = 0$ et $\Xi = 0$,

$$\sum(\Theta) = \sum(\eta\xi\varphi_1) = b + b_1 + \sigma = b + b_1 + b_2,$$
$$b_2 = \sigma.$$

D'où je conclus que :

Théorème XII. — *Si, en un point circulaire à l'infini, une courbe comprend un groupe de branches ayant avec la droite de l'infini des contacts d'un même ordre, sa développée comprend, au même point, un groupe du même nombre de branches ayant les mêmes contacts avec cette même droite.*

11. Je considère maintenant, sur la courbe f, un groupe de branches ayant, en un point circulaire à l'infini, une asymptote déterminée. Je suppose que l'origine des premières coordonnées ait été prise sur cette droite, en sorte qu'avec les dernières coordonnées, l'axe $\Omega\eta$ soit tangent en Ω au groupe de branches correspondantes de la courbe φ. Soient τ le nombre de ces branches, ϖ l'ordre de leur contact avec $\Omega\eta$. On a, en premier lieu, ainsi qu'on l'a déjà trouvé,

$$\sum(\Theta) = \sum(\eta\varphi_1) = \sum(\varphi_1) + \tau = b.$$

Puis, pour $\Xi = 0$,

$$\sum(\Theta) = \sum(2\xi\varphi_1 + \eta\varphi_2).$$

Pour un système de valeurs satisfaisant à l'équation $\varphi = 0$, j'ai

$$2\xi\varphi_1 + \eta\varphi_2 = \varphi_1\left(2\xi - \eta\frac{d\xi}{d\eta}\right).$$

Soit maintenant $\mathrm{K}\eta^{1+\varpi}$ la partie principale de ξ : j'ai, pour celle

de la quantité entre parenthèses, $K(1-z)\eta^{1+z}$. Cette expression ne s'évanouit pas si z est différent de l'unité.

J'ai donc, pour $z \gtrless 1$,

$$\sum(\Theta) = \sum(\eta^{1+z}\varphi_1) = \sum(\varphi_1) + \tau(1+z) = b + b_1,$$
$$b_1 = \tau z.$$

Puis, pour $H = 0$,

$$\sum(\Theta) = \sum(\xi\varphi_1 + \eta\varphi_2) + \sum\eta = b + b_1 + \tau = b + b_1 + b_2,$$
$$b_2 = \tau.$$

D'où il résulte que la développée se compose, comme la courbe f, d'un groupe de τ branches ayant au même point circulaire, avec la même asymptote, des contacts du même ordre z.

Ainsi :

Théorème XIII. — *Si, en un point circulaire à l'infini, une courbe comprend un groupe de branches ayant avec une asymptote des contacts d'un même ordre, différent de l'unité, sa développée comprend, au même point, un groupe du même nombre de branches ayant les mêmes contacts avec cette même droite.*

Dans le cas où z est l'unité, il ne suffit pas de considérer la partie principale de ξ pour calculer l'ordre de Θ. Je considère donc le développement de ξ suivant les puissances croissantes de η, et je suppose d'abord

(1) $$\xi = \alpha y^2 + \beta y^{2+\lambda} + \ldots,$$

λ étant une fraction positive plus petite que l'unité. La signification géométrique de cette supposition est que la branche de courbe représentée par ce développement a un contact d'ordre $(1+\lambda)$ avec son cercle osculateur à l'origine.

Je suppose donc que la courbe φ se compose en Ω d'un certain nombre ν de branches, ayant avec ce même cercle des contacts d'un même ordre.

J'ai d'abord, comme précédemment, en laissant Ξ et H arbitraires,

$$\sum(\Theta) = \sum(\varphi_1) + \nu = b.$$

Pour $\Xi = 0$,

$$\sum(\theta) = \sum(2\xi\varphi_1 + \eta\varphi_2) = \sum(\varphi_1) + \sum(y^{2+\lambda}) = \sum(\varphi_1) + \nu(2+\lambda) = b + b_1,$$

$$b_1 = \nu(1+\lambda).$$

Pour $\Xi = 0$, $H = 0$,

$$\sum(\theta) = \sum(\xi\varphi_1 + \eta\varphi_2) + \sum(\eta) = \sum(\varphi_1) + 3\nu = b + b_1 + b_2,$$

$$b_2 = \nu(1-\lambda).$$

D'où :

Théorème XIV. — *Si, en un point circulaire à l'infini, une courbe comprend un groupe de* ν *branches, ayant avec une même asymptote des contacts du premier ordre, et dont les transformées homographiques aient avec un même cercle, au point correspondant, des contacts d'un même ordre,* $1 + \lambda$, *le nombre* λ *étant une fraction inférieure à l'unité, la développée comprend, au même point, un groupe de branches ayant avec la même asymptote des contacts d'ordre* $\frac{1+\lambda}{1-\lambda}$, *et dont le nombre est* $\nu(1-\lambda)$.

12. Tous les points à l'infini que j'ai considérés jusqu'ici donnent lieu à des centres de courbure situés aussi à l'infini, en sorte qu'en ces points il n'y a point, à proprement parler, de cercles osculateurs. Il n'en est pas de même de la dernière catégorie qu'il me reste à envisager. C'est, en effet, dans cette catégorie que rentrent les points simples, circulaires, à l'infini, en lesquels la courbe possède une asymptote ; par exemple, les points à l'infini d'un cercle. On sait donc d'avance que, pour cette dernière catégorie, il peut se faire qu'il y ait des cercles osculateurs finis. Je montre d'abord qu'il en est toujours ainsi.

Dans le cas où l'on se trouve maintenant, l'abscisse ξ d'une branche de la courbe φ donne lieu à un développement analogue à (1), commençant, comme ce dernier, par un terme du second ordre, mais ne rentrant pas dans la forme (1).

D'après la définition du développement (1), le développement actuel sera de la forme suivante :

$$(2) \qquad \xi = \alpha y^2 + \gamma y^3 + \delta y^{3+l} + \ldots,$$

l étant un nombre positif quelconque.

Je considère un cercle qui, dans le plan de la courbe f, ait son centre sur l'asymptote du point de f considéré. Cette asymptote ayant, avec les coordonnées x, y, l'équation $x - y\sqrt{-1} = 0$, les coordonnées du centre de ce cercle sont $y = u$, $x = u\sqrt{-1}$, u étant indéterminé. Soit R son rayon, son équation est

$$(x - u\sqrt{-1})^2 + (y - u)^2 - R^2 = 0.$$

Je le transforme comme la courbe f, en y appliquant les mêmes changements de variables. Il devient maintenant la courbe suivante :

$$\xi^2 + 2\sqrt{-1}(1 - u\eta)\xi - R^2\eta^2 = 0. \tag{3}$$

Si, par cette dernière équation, on développe ξ suivant les puissances croissantes de η, on trouve, pour la racine infiniment petite avec η,

$$\xi = -\frac{1}{2}\sqrt{-1}\,R^2\eta^2 + uR^2\eta^3 + \left(2\sqrt{-1}\,u^2R^2 - \frac{R^4}{4}\right)\eta^4 + \ldots.$$

Si je pose

$$-\frac{1}{2}\sqrt{-1}\,R^2 = \alpha, \qquad uR^2 = \gamma,$$

je détermine le cercle de manière qu'il ait, au point considéré à l'infini, avec la branche de f dont (2) est la transformée, un contact d'ordre supérieur au second.

Ces équations donnent pour R une valeur finie et pour u une valeur non infinie. J'ai donc un cercle fini.

Je vois de plus que les branches de f, qui constituent un groupe circulaire au point considéré, admettent le même cercle osculateur ainsi déterminé pour l'une d'elles. J'ai donc à envisager maintenant, sur la courbe f, en un point circulaire à l'infini, un groupe de branches ayant avec une droite des contacts du premier ordre et avec un même cercle fini des contacts d'ordre supérieur au second. Soient $(2 + \omega)$ cet ordre et n le nombre des branches.

Je remarque d'abord que je puis supposer l'origine O des coordonnées primitives choisie au centre de ce cercle. Grâce à cette supposition, u et, par suite, γ sont nuls. Cela étant, j'ai d'abord, comme ci-dessus, pour Ξ et H quelconques,

$$\sum(\Theta) = \sum(\varphi_1) + n = b.$$

Puis, pour $\Xi = 0$,

$$\sum(\Theta) = \sum(\eta\xi\varphi_1 + \eta^2\varphi_2) = \sum(\varphi_1) + \sum\eta^3 = \sum(\varphi_1) + 3n = b + b_1,$$

$$b_1 = 2n.$$

Il faut maintenant faire $\Xi = 0$ et $H = \infty$, ce qui concorde avec l'hypothèse faite sur la position du centre du cercle osculateur. Il s'agit de calculer maintenant l'ordre de la quantité à laquelle Θ se réduit, à savoir :

$$\Theta = \sqrt{-1}(2\xi\varphi_1 + \eta\varphi_2) + \xi(\xi\varphi_1 + \eta\varphi_2),$$

ou

$$\frac{\Theta}{\varphi_1} = \sqrt{-1}\left(2\xi - \eta\frac{d\xi}{d\eta}\right) + \xi\left(\xi - \eta\frac{d\xi}{d\eta}\right).$$

Si, dans ce second membre, on remplaçait ξ et $\frac{d\xi}{d\eta}$ par leurs valeurs tirées de l'équation (3), c'est-à-dire si l'on faisait ce calcul, non plus pour la courbe φ, mais pour la courbe (3), transformée du cercle, on sait d'avance que ce second membre s'évanouirait. Θ est, en effet, le résultat de la transformation de

$$\theta = (X - x)f_2 - (Y - y)f_1$$

appliquée à un cercle pris pour la courbe f, et, dans le cas actuel, le point X, Y étant le centre de ce cercle. Or, dans cette hypothèse, θ s'évanouit. Il en est donc de même de Θ, ce qu'un calcul direct permet, d'ailleurs, de vérifier aisément.

De cette observation il résulte que la valeur de $\frac{\Theta}{\varphi_1}$ que j'ai à calculer n'est pas altérée si l'on y met pour ξ la différence des abscisses des courbes φ et (3). Or cette différence est d'ordre $(3 + \omega)$ par hypothèse. Il en résulte que l'ordre de $\frac{\Theta}{\varphi_1}$ est précisément $(3 + \omega)$. J'ai donc maintenant

$$\sum(\Theta) = \sum(\varphi_1) + n(\omega + 3) = b + b_1 + b_2,$$

$$b_2 = n\omega.$$

D'où :

Théorème XV. — *Si, en un point circulaire à l'infini, une courbe comprend un groupe de branches ayant, avec une même*

asymptote, des contacts du premier ordre, sans satisfaire à la condition du théorème XIV, il existe pour chacune de ces branches un cercle fini avec lequel elle a, au point considéré, un contact d'ordre supérieur au second. Si n est le nombre de ces branches ayant avec le même cercle un contact d'ordre $2+\omega$ $(\omega > 0)$, *la développée comprend un groupe de* $n\omega$ *branches ayant, au centre de ce cercle, des contacts d'ordre* $\frac{2}{\omega}$ *avec l'asymptote des précédentes.*

13. Au moyen des divers théorèmes ci-dessus, il est aisé de trouver l'abaissement du degré de la développée, dû à une singularité quelconque en un point circulaire à l'infini. En conservant les notations employées dans ces théorèmes, pour chaque espèce de groupe de branches, et désignant par A l'abaissement de la classe de la courbe elle-même, dû au point singulier, je trouve, en suivant la marche indiquée plus haut, que l'abaissement du degré est

$$3\mathrm{A} + \sum \tau(z+1) + \sum \sigma(3i+1) + \sum \nu(2-\lambda) + 3\sum n.$$

Avec cette dernière proposition s'achève la solution de la question proposée :

1° *Trouver l'abaissement du degré et de la classe de la développée d'une courbe, produit par un point singulier de cette courbe.*

2° *Trouver la nature de la développée aux points correspondants.*

Cette étude ne doit pourtant pas s'arrêter ici, et j'ai à tirer des propositions renfermées dans le présent article plusieurs conséquences importantes, qui feront l'objet du suivant.

ARTICLE VII.

1. La première application que je veux faire des propositions de de l'article précédent a trait à la question inverse, c'est-à-dire : *Quelle est la nature de la développante d'une courbe en un point correspondant à un point singulier algébrique de la courbe?*

On n'a évidemment ici à considérer, en un point singulier de la courbe primitive, que les branches tangentes à une même droite. Je considère d'abord un point à distance finie et une tangente en ce point, qui ne soit pas isotrope. Soient N le nombre des branches du groupe considéré, E l'ordre de leur contact avec la tangente, et O le point singulier.

1° Si je fais passer la développante par le point O, je dois appliquer le théorème III (art. VI), qui détermine les nombres n, ε, relatifs à la développante, par les relations

$$N = n(1-\varepsilon), \qquad E = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

D'où

$$\varepsilon = \frac{E}{E+1}, \qquad n = N(E+1).$$

Ainsi, si l'on prend la courbe $x^q = y^{p+q}$ (p et q positifs et entiers), on a $N = q$, $E = \frac{p}{q}$, et que l'on fasse passer sa développante à l'origine des coordonnées, ce point sera, sur cette dernière courbe, de la même nature que sur la courbe $y^{p+q} = ax^{2p+q}$.

2° Je ne fais pas passer la développante par le point O. C'est maintenant le théorème V (art. VI) qui me fournit les éléments ν, λ du point correspondant de la développante

$$\lambda = \frac{1}{E}, \qquad \nu = NE.$$

Ainsi, au point O de la même courbe $x^q = y^{p+q}$ répond maintenant, sur la développante, un point multiple contenant p branches, qui ont des contacts du premier ordre avec leur tangente commune, et des contacts d'ordre $\left(1+\frac{q}{p}\right)$ avec un même cercle osculateur.

Ces propositions peuvent facilement servir à faire reconnaître la forme du trait de la développante d'une courbe donnée. J'en donne ici un seul exemple, relatif à un point d'inflexion ordinaire. C'est le cas de $N = 1$, $E = 2$.

1° Si je fais passer la développante par le point d'inflexion, j'ai un point de la nature de l'origine sur la courbe $y^2 = ax^5$. C'est l'apparence d'un point d'inflexion, en ce sens qu'on y voit une seule branche réelle, et qui traverse sa tangente. Mais ce point diffère

essentiellement d'un point d'inflexion, en ce sens que la courbe s'y éloigne plus rapidement de sa tangente qu'en un point ordinaire.

2° Si la développante ne passe pas par le point d'inflexion, j'ai deux branches de courbe qui, d'après leur définition, peuvent être figurées comme il suit :

Soient X, Y l'abscisse et l'ordonnée d'un point d'un cercle passant à l'origine des coordonnées, et tangentes à l'axe des y. Les branches de la développante seront représentées par un développement commençant par $X + ay^{\frac{5}{2}} + \ldots$; elles seront donc situées de part et d'autre du cercle et d'un même côté de Oy, et ne seront réelles que du côté des y positifs. Elles présenteront donc l'aspect de ce qu'on nomme ordinairement *rebroussement de deuxième espèce*.

A propos de ce qu'on appelle habituellement *points de rebroussement*, il est utile de faire la remarque suivante :

En un point de rebroussement de première espèce le rayon de courbure n'est pas toujours nul, comme on l'a dit quelquefois.

Il suffit, pour s'en convaincre, d'observer que l'on obtient, par exemple, un rebroussement de première espèce, à l'origine des coordonnées, sur l'une quelconque des courbes représentées par l'équation

$$x^{2n} = y^{2m+1},$$

où n et m sont entiers et $m \geqq n$. Or il suffit que l'on ait $m \geqq 2n$ pour que l'ordre du contact de chaque branche de la courbe avec la tangente Oy soit supérieur à l'unité, et pour que, par suite, le rayon de courbure soit infini. Dans le cas opposé $m < 2n$, le rayon de courbure est effectivement nul.

La recherche de la nature de la développante d'une courbe en un point qui correspond à un point singulier à distance finie, et où la tangente est isotrope, ou à un point à l'infini, se fait aussi facilement au moyen des autres propositions de l'article précédent. Je me contente ici d'avoir indiqué la solution de cette question, et je passe à d'autres conséquences des mêmes propositions.

2. Quand on passe de la considération d'une courbe à celle de sa développée, on voit disparaître, dans cette dernière, la trace de certaines singularités de la première. Ainsi un point double, un point

de rebroussement ordinaire donnent lieu, dans la développée, à des points ordinaires. Ces singularités disparaissent dans cette développée. Il en est, au contraire, d'autres qui subsistent. Les propositions de l'article précédent nous montrent quelles sont ces singularités et nous apprennent, qu'en subsistant, elles subissent cependant certaines altérations.

Si je considère maintenant la développée de la développée, que je désignerai, pour abréger, par deuxième développée de la courbe, j'y vois ces singularités subir encore de nouvelles altérations. De même encore si je considère la troisième développée, et ainsi de suite. En calculant ces altérations successives, nous verrons s'élargir le champ des singularités qui disparaissent entièrement dans les développées d'une courbe, c'est-à-dire qui, dans les développées à l'infini à partir d'un rang déterminé, ne donnent lieu qu'à des points ordinaires à distance finie. Nous trouverons cependant qu'il n'en est pas toujours ainsi, et qu'il est des singularités dont la trace subsiste indéfiniment, mais en s'altérant toujours, à partir d'un certain rang, dans chaque développée successive, d'une manière régulière et uniforme pour toutes les courbes algébriques. Cette étude, devenue maintenant très facile, une fois faite, nous serons en mesure de découvrir la loi suivant laquelle varient les degrés et les classes des développées successives de toute courbe algébrique.

Je commence par ce qui concerne les points singuliers à l'infini et circulaires qui donnent lieu aux propositions les plus simples.

En effet, des théorèmes XII et XIII (Art. VI) résulte immédiatement que :

Théorème I. — *Si, en un point circulaire à l'infini, une courbe comprend un groupe de branches ayant, avec la droite de l'infini, des contacts d'un même ordre, chacune de ses développées successives comprend, au même point, un groupe du même nombre de branches ayant ces mêmes contacts avec cette même droite.*

Théorème II. — *Si, en un point circulaire à l'infini, une courbe comprend un groupe de branches ayant, avec une asymptote, des contacts d'un même ordre, différent de l'unité, chacune de ses développées successives comprend, au même point, un groupe du même nombre de branches ayant ces mêmes contacts avec cette même droite.*

Ainsi, à l'égard de ces groupes de branches, nous voyons s'établir, en quelque sorte, *un régime permanent* à partir de la courbe initiale elle-même.

A l'égard des groupes de branches qui rentrent dans la définition du théorème XIV (Art. VI), j'observe que, dans la première développée, ils donnent lieu à des groupes rentrant dans la définition du théorème II, et que, par suite, il s'établit, pour ces groupes, un régime permanent à partir de la première développée.

Les groupes de branches qui rentrent dans la définition du théorème XV (Art. VI) donnent lieu, dans la première développée, à des groupes tangents à des droites isotropes en des points à distance finie.

Pour ces derniers, le théorème VI (Art. VI) montre qu'à partir de la courbe elle-même s'établit un régime permanent. Pour les précédents, le régime permanent s'établit donc à partir de la première développée.

Cette discussion nous apprend, en premier lieu, que toutes les tangentes isotropes de la courbe initiale lui sont communes avec toutes ses développées, et inversement; en d'autres termes :

Théorème III. — *Les développées successives d'une courbe algébrique quelconque lui sont homofocales.*

En second lieu, je conclus aussi que :

Théorème IV. — *Le nombre des intersections de la droite de l'infini et d'une développée de rang quelconque d'une courbe algébrique, confondues en un point circulaire, est constant quel que soit le rang de la développée.*

3. Je considère actuellement, en un point non circulaire à l'infini, un groupe de branches tangentes à la droite de l'infini. Soient s leur nombre et η l'ordre de leur contact avec cette droite. Ce groupe donne lieu, dans la développée, à un groupe analogue de s branches ayant, avec la droite de l'infini, des contacts d'ordre $\eta + 1$; et, par suite, dans la $K^{ième}$ développée, à un groupe de s branches ayant, avec la droite de l'infini, des contacts d'ordre $(\eta + K)$.

Le nombre des intersections de la droite de l'infini et de ce groupe confondues au point considéré est, pour la courbe initiale, $s(\eta + 1)$, et, pour la $K^{ième}$ développée, $s(\eta + 1 + K)$. Il croît donc suivant les

termes d'une progression arithmétique dont la raison est s. Il en sera de même pour les autres groupes analogues. C'est ce que j'exprime abréviativement en disant qu'*à l'égard des branches paraboliques d'une courbe, il s'établit dans les développées successives, à partir de la courbe elle-même, un régime régulièrement progressif.*

Je considère, en un point à l'infini (il est entendu désormais qu'il ne s'agit plus de point circulaire), un groupe de branches ayant une asymptote. Le théorème VIII (Art. VI) nous apprend que, dans la première développée, il lui correspond un groupe de branches dont la tangente est la droite de l'infini. Donc, d'après le résultat précédent, *à l'égard des branches non paraboliques, il s'établit, à partir de la première développée, un régime régulièrement progressif.*

En résumé, *à l'égard de tous les points à l'infini circulaires ou non circulaires, il s'établit, à partir de la première développée, un régime régulièrement progressif.*

Je considère maintenant les points à distance finie, et, en ces points, des groupes de branches ayant des tangentes non isotropes, le cas inverse ayant été traité plus haut.

S'il s'agit d'un groupe de branches ayant avec la tangente des contacts d'ordre supérieur à l'unité, c'est-à-dire contenant des inflexions effectives, le théorème IV (Art. VI) montre que, dans la première développée, le point correspondant est à l'infini, et que les branches de cette dernière courbe ont une asymptote. Donc, d'après les résultats ci-dessus, *à l'égard des groupes de branches contenant, en des points à distance finie, des inflexions effectives, il s'établit à partir de la deuxième développée, un régime régulièrement progressif.*

S'il s'agit d'un groupe de branches ayant, en un point non à l'infini, avec une droite non isotrope, des contacts d'ordre non supérieur à l'unité, il y a deux cas à considérer, suivant que cet ordre est égal à l'unité ou lui est inférieur.

Je considère le premier cas. J'observe tout d'abord qu'il n'y a lieu de porter l'attention que sur le cas d'un groupe de branches ayant un même cercle osculateur, avec lequel elles ont des contacts du même ordre. D'après le théorème V (Art. VI), si $(1+\lambda)$ est l'ordre de ce contact, les branches correspondantes de la développée ont, au centre du cercle, avec leur tangente, des contacts d'ordre $\frac{1}{\lambda}$. Si donc λ est

différent de l'unité, je me trouve, à partir de la première développée, soit dans le dernier cas examiné, soit dans celui que j'examinerai tout à l'heure. Si, au contraire, λ est égal a l'unité, je me retrouve, à l'égard de cette première développée, dans le cas actuel. Il peut arriver encore que les branches de cette développée aient, avec un même cercle osculateur, des contacts d'un même ordre. J'ai donc à répéter les mêmes raisonnements. En conséquence, il peut se produire deux faits différents :

1° Ou bien on parviendra à une développée pour laquelle les branches considérées auront avec un même cercle osculateur des contacts d'ordre $(1+\lambda)$, λ étant différent de l'unité; et alors, à partir de la suivante, je me trouve dans le cas où chaque branche du groupe a, avec sa tangente, un contact d'ordre différent de l'unité.

2° Ou bien il n'en sera rien, c'est-à-dire que les branches des développées successives auront, à l'infini, des contacts du second ordre avec les cercles osculateurs.

S'il en est ainsi, chacune des branches de la courbe initiale est figurée par un développement ne comprenant que des puissances entières de la variable, et leur ensemble n'est autre que la superposition de plusieurs courbes distinctes en un point simple sur chacune d'elles; en d'autres termes, elles forment chacune un groupe circulaire séparé, composé d'une seule branche. Deux quelconques de ces branches ne peuvent être les mêmes que jusqu'aux infiniment petits d'un ordre fini et déterminé. Soit $(a+1)$ cet ordre. Alors les centres de courbure successifs, pour ces deux branches, coïncident jusqu'à celui de rang a. A partir du suivant, il y a séparation. Donc, dans ce dernier cas, on parvient à une développée de rang déterminé, dans laquelle le groupe de branches considéré donne lieu à des branches ordinaires en des points simples distincts. En d'autres termes, à partir d'un certain rang, la singularité considérée dans la courbe initiale disparaît entièrement.

En résumé, *à l'égard d'un groupe de branches ayant avec la tangente des contacts du premier ordre, à partir d'un rang déterminé, toute singularité disparaît, ou bien ces branches donnent lieu à un groupe de branches ayant avec leur tangente des contacts d'ordre différent de l'unité.*

4. J'arrive au cas où l'on a à considérer un groupe de branches

ayant, en un point non à l'infini, des contacts d'ordre inférieur à l'unité avec la même tangente.

Soient n le nombre de ces branches et $\varepsilon < 1$ l'ordre de ce contact. Je rappelle que, d'après les premiers principes, $n\varepsilon$ est un nombre entier.

D'après le théorème III (Art. VI), les nombres analogues n_1, ε_1, relatifs à la première développée, seront

$$n_1 = n(1-\varepsilon), \qquad \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

Je remarque que ε_1 est toujours supérieur à ε. J'applique successivement les mêmes formules pour calculer les nombres n_2, ε_2, relatifs à la deuxième développée, en fonction de n_1, ε_1, et ainsi de suite, les nombres n_k, ε_k, relatifs à la K[ième] développée; jusqu'à ce que je trouve un nombre ε_k égal ou supérieur à l'unité, ce qui arrive forcément.

J'ai donc à calculer, d'une manière générale, la valeur de n_i, ε_i, par les équations

$$\begin{aligned}
n_1 &= n\,(1-\varepsilon), & \varepsilon_1 &= \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon},\\
n_2 &= n_1(1-\varepsilon_1), & \varepsilon_2 &= \frac{\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & &\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
n_i &= n_{i-1}(1-\varepsilon_{i-1}), & \varepsilon_i &= \frac{\varepsilon_{i-1}}{1-\varepsilon_{i-1}}.
\end{aligned}$$

J'en conclus aisément

$$n_i = n(1-i\varepsilon), \qquad \varepsilon_i = \frac{\varepsilon}{1-i\varepsilon}.$$

La condition $\varepsilon_i \geqq 1$ me donne

$$i+1 \geqq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Donc, *si $\frac{1}{\varepsilon}$ n'est pas un nombre entier, le groupe de branches considéré donne lieu, dans la développée dont le rang est égal au plus grand entier contenu dans $\frac{1}{\varepsilon}$, à un groupe de branches ayant avec leur tangente commune des contacts d'ordre supérieur à l'unité, et, par suite, à partir de la développée de deux rangs plus éloignée, il s'établit un régime régulièrement progressif de points à l'infini.*

En second lieu, si $\frac{1}{\varepsilon}$ est un nombre entier m, j'obtiens, dans la développée de rang $(m-1)$, un groupe de branches ayant avec leur tangente des contacts d'ordre

$$\frac{\varepsilon}{1-(m-1)\varepsilon} = \frac{\frac{1}{m}}{1-\frac{m-1}{m}} = 1.$$

Le nombre de ces branches n_{m-1} se calcule aisément. Comme $n\varepsilon$ est un nombre entier, n est un multiple de m, soit $n'm$ ce nombre. J'ai alors

$$n_{m-1} = n'm \cdot \left(1 - \frac{m-1}{m}\right) = n'.$$

J'ai donc un groupe de n' branches, ayant avec leur tangente des contacts du premier ordre. Si n' est égal à l'unité, je suis parvenu à un point simple ordinaire, et la singularité a disparu. Si n' est plus grand que l'unité, je me trouve dans le cas du paragraphe précédent, lequel peut me ramener au cas actuel, ainsi qu'on l'a vu. Mais si je rentre ainsi dans le cas actuel, c'est en ayant à y considérer un groupe comprenant au plus n' branches, c'est-à-dire un nombre de branches toujours inférieur au nombre initial. Je suis donc assuré de voir, après un nombre fini et déterminé d'opérations, la singularité considérée disparaître ou donner lieu à un groupe de branches ayant avec leur tangente des contacts d'ordre supérieur à l'unité.

Donc, en résumé, *à l'égard de tout groupe de branches ayant, en un point non à l'infini, une tangente non isotrope, on obtient toujours, à partir d'un rang fini et déterminé, des points ordinaires à distance finie ou un régime régulièrement progressif de points à l'infini.*

Dans la dernière partie de l'analyse précédente, il importe de remarquer tout particulièrement le cas où, $\frac{1}{\varepsilon}$ étant un entier m, le nombre des branches est précisément m. On a vu que, dans la $(m-1)^{\text{ième}}$ développée, on obtient alors un point simple ordinaire à distance finie. C'est là un cas bien remarquable d'une singularité qui disparaît entièrement dans les développées successives. D'après les principes de l'Article III, ce point est le corrélatif d'un point simple, où une courbe a, avec sa tangente, un contact d'ordre m. Ainsi :

Théorème V. — *Si une courbe possède un point singulier, non à l'infini, corrélatif d'un point simple, ce point donne toujours lieu, dans une développée de rang déterminé, à un point simple ordinaire.*

5. Après avoir examiné quelles sont, dans les développées successives, les singularités qui proviennent de celles de la courbe initiale, il reste à examiner celles qui proviennent des points simples de cette dernière, en se bornant à ceux où l'ordre du contact de la courbe et de la tangente est l'unité. Les autres sont, en effet, compris dans les points exceptionnels précédemment examinés. Ici quelques mots suffiront maintenant.

La première de ces singularités provient de la réunion, en un même point, des centres de courbure de la courbe initiale en deux ou plus de deux points différents. Il est clair, que la singularité dont il s'agit est la simple superposition de plusieurs courbes différentes en des points simples, ou, en d'autres termes, cette singularité ne donne pas lieu à un groupe circulaire de plusieurs branches. C'est donc une de celles qui disparaissent entièrement dans les développées à l'infini, à partir d'un rang déterminé. Je ne m'arrête pas au cas où la courbe initiale est telle que chacune de ses normales est relative à deux points différents. Une telle courbe est, en effet, la parallèle d'une autre courbe ne jouissant pas de la même propriété. La développée de la courbe proposée n'aura donc, par le fait de cette propriété, aucune particularité.

La seconde singularité, qui provient, dans la développée d'une courbe, d'un point simple unique de la courbe initiale, répond à un sommet de cette dernière, c'est-à-dire à un point où l'ordre du contact de la courbe et de son cercle osculateur est supérieur à 2. Le point étant simple, l'ordre de ce contact est nécessairement un entier. Soit $(1+\lambda)$ ce nombre, λ est un entier supérieur à l'unité. Le théorème V (Art. VI) nous apprend qu'au point correspondant, la développée se compose de λ branches ayant avec leurs tangentes des contacts d'ordre $\frac{1}{\lambda}$. Ce point est, d'après le théorème V, un de ceux qui disparaissent entièrement dans les développées successives.

Si je joins ce résultat à ceux des théorèmes précédents, je puis énoncer la proposition suivante :

Théorème VI. — *Si l'on considère la série infinie des développées successives d'une courbe algébrique quelconque, à partir d'un certain rang déterminé, tous les points, non à l'infini, de l'une quelconque d'entre elles sont tels, que leurs correspondants, dans toutes les suivantes, ne sont jamais à l'infini.*

J'ajoute que, suivant l'expression employée précédemment, *à partir de ce même rang, il s'établit, dans les développées successives, un régime régulièrement progressif de points à l'infini.*

6. Voici maintenant la conséquence de cette proposition. Je considère la développée de ce rang, à partir duquel le régime régulièrement progressif s'établit. Soient M son degré et C sa classe. Ses branches infinies sont de trois espèces :

1° Branches tangentes à la droite de l'infini en un point circulaire. Soient σ le nombre de ces branches appartenant à un même groupe et i l'ordre de leur contact avec la droite de l'infini.

2° Branches passant en un point circulaire et ayant, avec une asymptote, des contacts d'ordre différent de l'unité. Soit τ le nombre total de ces branches.

3° Branches tangentes à la droite de l'infini en des points non circulaires. Soient s le nombre de ces branches appartenant à un même groupe et η l'ordre de leur contact avec la droite de l'infini.

Le nombre des intersections de toutes ces branches avec la droite de l'infini reproduit le degré de la courbe. J'ai donc

$$(1) \qquad \mathrm{M} = \sum \sigma(i+1) + \tau + \sum s(\eta+1).$$

Pour la développée suivante, les nombres σ, i, τ, s se conservent, et η augmente d'une unité. Donc, M_1 étant le degré de cette courbe,

$$\mathrm{M}_1 = \mathrm{M} + \sum s;$$

et, en désignant $\sum s$ par S, j'ai, pour le degré M_k de la développée de rang k,

$$\mathrm{M}_k = \mathrm{M} + k\mathrm{S}.$$

Je considère maintenant les classes de ces courbes. Soient C celle de la courbe initiale, de degré M, et A l'abaissement de la classe dû à

tous ses points singuliers, j'ai

$$C = M(M-1) - A.$$

Je détermine maintenant la classe C_1 de la développée du degré M_1. Tous les points singuliers, non à l'infini, abaissent cette classe d'un nombre égal à l'abaissement qu'ils produisent dans la classe de la courbe initiale elle-même (théorème II, Art. VI). Quant à ceux qui sont à l'infini, les abaissements qu'ils produisent dans la classe de la développée surpassent ceux qu'ils produisent dans la courbe elle-même, ceux des deux premières catégories, de $\sum \sigma(i+1) + \tau$ (théorème XI, Art. VI), et ceux de la troisième, de $\sum s\tau_1$ (théorème VII, Art. VI). L'abaissement total est donc

$$\mathcal{A} = A + \sum \sigma(i+1) + \tau + \sum s\tau_1 = A + M - S,$$

à cause de la relation (1).

La classe de la développée d'une courbe générale de degré M étant M^2, je vois que la classe de la développée de la courbe actuelle est

$$C_1 = M^2 - \mathcal{A} = M(M-1) - A + S = C + S.$$

Par suite, pour la développée de rang k, j'ai une relation analogue à (2), en désignant par C_k sa classe :

$$C_k = C + kS.$$

Donc :

THÉORÈME VII. — *A partir d'un certain rang, les degrés et les classes des développées successives d'une courbe algébrique quelconque forment deux progressions arithmétiques de même raison.*

Cette proposition ne souffre aucune exception. On prévoit bien, d'après les résultats obtenus relativement au régime permanent auquel donnent lieu les singularités situées aux points circulaires à l'infini, et d'après certains exemples déjà connus, qu'il y a des cas où la raison de la progression arithmétique peut être nulle. Je reviendrai tout à l'heure sur ces cas très remarquables, et je donne actuellement quelques exemples simples du cas opposé.

7. Exemples du théorème VII :

1° La courbe initiale est une conique. Le théorème s'applique à partir de la première développée. Soient, en général, M_i, C_i le degré et la classe d'une développée de rang i.

On a :

$$M_1 = 6, \qquad C_1 = 4,$$
$$M_2 = 10, \qquad C_2 = 8,$$
$$\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots$$
$$M_i = 2(2i+1), \qquad C_i = 4i.$$

Le cas de la parabole fait exception et est compris dans un des exemples suivants.

2° La courbe initiale est une courbe générale de degré M. Le théorème s'applique à partir de la deuxième développée.

On a :

$$M_1 = 3M(M-1), \qquad C_1 = M^2,$$
$$M_2 = M(9M-13), \qquad C_2 = 4M(M-1),$$
$$M_3 = M_2 + 2M(3M-5), \qquad C_3 = C_2 + 2M(3M-5),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$M_{i+2} = M_2 + 2iM(3M-5), \qquad C_{i+2} = C_2 + 2iM(3M-5).$$

3° La courbe initiale est la suivante : $y^{M-1} = ax^M$, M étant un nombre entier. Le théorème s'applique à partir de la courbe elle-même, et l'on a, en général,

$$M_i = C_i = M + i.$$

Ce cas comprend celui de la parabole du second degré.

4° La courbe initiale est la suivante : $y^{p-q} = ax^p$, p et q étant des entiers premiers contre eux, et $q < p$. On a démontré plus haut (Art. V, § 3) que la classe de cette courbe est égale à son degré p. Soit r le plus grand entier contenu dans $\frac{p}{q}$. On aura continuellement, jusqu'à $i = r - 1$,

$$M_i = C_i = p + iq, \qquad \ldots, \qquad M_{r-1} = C_{r-1} = p + (r-1)q.$$

Mais le théorème ne s'applique cependant qu'à partir de la développée de rang $(r+1)$, et la raison est $2q$. On a, en effet, et

jusqu'à l'infini,

$$
\begin{array}{ll}
M_r = (2r+1)q, & C_r = p + rq, \\
M_{r+1} = p + 2rq, & C_{r+1} = p + (r+1)q, \\
M_{r+2} = p + 2(r+1)q, & C_{r+2} = p + (r+3)q, \\
\dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots, \\
M_{r+j+1} = p + 2(r+j)q, & C_{r+j+1} = p + (r+2j+1)q, \\
\dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots.
\end{array}
$$

La démonstration de ces résultats est la conséquence immédiate des principes qui ont conduit au théorème VII. Je ne m'y arrête pas. Je vais maintenant considérer des courbes passant par les points circulaires à l'infini.

8. J'ai tout d'abord, à ce sujet, une remarque à faire concernant le résultat obtenu paragraphe 13 (Art. VI).

Je considère une courbe S n'ayant aucune particularité à l'infini, et sa transformée S' par rayons vecteurs réciproques, le pôle de tranformation O étant en dehors de S. Soit p le degré de S. Celui de S' est $2p$, et l'on sait que cette courbe a, en O, un point de multiplicité p, qui produit (théorème II, Art. VI), dans le degré de sa développée, un abaissement $3p(p-1)$. La courbe S' a, en outre, en chacun des points circulaires à l'infini, p branches ayant, avec des asymptotes, des contacts du premier ordre, et sans aucune singularité propre. L'ensemble de ces deux points produit donc, d'après le paragraphe 13 (Art. VI), dans le degré de la développée de S', un abaissement égal à

$$6p(p-1) + 6p = 6p^2.$$

Tous les points singuliers de S se retrouvent d'ailleurs dans S' et produisent, dans les degrés des développées des deux courbes, les mêmes abaissements. Si p_1 et p'_1 sont les degrés des deux développées, ce dernier abaissement est $3p(p-1) - p_1$, et l'on a

$$p'_1 = 6p(2p-1) - 3p(p-1) - 6p^2 - [3p(p-1) - p_1] = p_1.$$

Les deux développées sont donc du même degré. Ce résultat était facile à prévoir.

En effet, le degré de la développée d'une courbe n'est autre que le nombre des cercles osculateurs de cette courbe qui sont orthogonaux à une droite arbitraire. Donc, si l'on transforme cette courbe par

rayons vecteurs réciproques, et que la développée de cette transformée ne passe pas au pôle de transformation, le degré de cette développée est égal à celui de la première. C'est précisément ce qui a lieu si le pôle est quelconque et que la courbe primitive n'ait pas de branche parabolique.

Si cette dernière condition n'est pas remplie, nous voyons immédiatement comment ce résultat se modifie.

Je suppose que la courbe S possède un groupe de s branches, ayant avec la droite de l'infini des contacts d'ordre η. Il est aisé d'en conclure que la transformée S' possède, au pôle O, un groupe de $s(\eta+1)$ branches ayant, avec une même tangente, des contacts d'ordre $\frac{1}{\eta+1}$. Ce dernier nombre étant inférieur à l'unité, les branches correspondantes de la développée de S' passent en O, et leur nombre (théorème III, Art. VI) est égal à

$$s(\eta+1)\left(1-\frac{1}{\eta+1}\right)=s\eta.$$

En suivant le raisonnement précédent, j'en conclus que le degré de la développée de S' surpasse de $s\eta$ celui de la développée de S.

Soit, par exemple, pour S, la courbe déjà citée $y^{p-q}=ax^p$. J'ai ici $s\eta=p-q$. Le degré de la développée de S est, ainsi qu'on l'a dit précédemment (exemple 4), égal à $p+q$. Celui de la développée de S' est donc $p+q+p-q=2p$, c'est-à-dire égal au degré de S'.

Voici donc un exemple curieux de courbe de même degré que sa développée. Mais cette propriété ne se conserve pas dans les développées suivantes, excepté dans un cas particulier, qui est le suivant :

Soit $p=2$, $q=1$. La courbe S est une parabole. Je place le point O au foyer de S. La transformée S' a alors trois points de rebroussement ordinaires, dont un en O, les deux autres aux points circulaires à l'infini. En ces points la courbe a des asymptotes. Comme son degré est égal à 4, on voit qu'elle n'a pas de point d'inflexion. Il en résulte aisément que sa développée est du même degré, conformément à ce qui vient d'être établi dans le cas général. Or on voit que cette développée, sur laquelle les points circulaires à l'infini de S' se conservent, a aussi un point de rebroussement à distance finie. Il en résulte facilement qu'elle est semblable à S'. Ainsi S' est une courbe dont toutes les développées successives sont des courbes semblables

à elle-même. Mais c'est là un résultat connu, attendu qu'on peut démontrer que S' est une épicycloïde. On sait que toute épicycloïde a pour développée une courbe semblable à elle-même. Il est très facile, par une étude sommaire de l'épicycloïde, de reconnaître que ses points singuliers sont de telle nature que ses développées successives, quand elle est algébrique, sont du même degré qu'elle. C'est à quoi je ne m'arrête pas. Je vais donner d'autres exemples de courbes dont les développées successives sont du même degré que la courbe elle-même.

J'ai considéré la courbe du quatrième degré douée de trois points de rebroussement, et j'ai montré que, si deux de ces points sont à l'infini et circulaires, la courbe jouit de la propriété dont il s'agit.

On obtient un nouvel exemple de cette curieuse propriété en considérant une courbe du quatrième degré à trois points de rebroussement, mais différemment située. On sait que cette courbe possède une tangente double. Si cette tangente est la droite de l'infini, et si ses points de contact sont les points circulaires, on voit immédiatement que sa développée touche simplement la droite de l'infini aux mêmes points et n'a pas d'autre point à l'infini, attendu que la courbe initiale n'a aucune inflexion. Il en résulte que toutes les développées successives sont, comme la courbe même, du quatrième degré et de la troisième classe, et, par suite, ont trois rebroussements à distance finie.

9. *Nouvel exemple.* — Je considère une courbe S de degré $(n+1)$ et ayant $\frac{n(n-1)}{2}$ points doubles, ou leurs équivalents en points multiples ordinaires. On voit qu'il s'agit d'une courbe unicursale. La courbe choisie aura, en outre, deux points simples, en chacun desquels son contact avec sa tangente sera d'ordre n, *ce qu'on peut appeler des points de* $(n-1)^{\text{ple}}$ *inflexion*. Je donnerai tout à l'heure un exemple d'une telle courbe.

J'admets, pour le moment, l'existence d'une telle courbe S. Soient A, B des tangentes de $(n-1)^{\text{ple}}$ inflexion. Je prends la corrélative Σ, de telle manière que les corrélatifs a, b de A, B soient les points circulaires à l'infini. La courbe Σ est de degré $2n$. En chacun des points a, b elle a n intersections avec la droite de l'infini confondues. Donc elle n'a pas d'autres points à l'infini. En outre, chacune de ses n branches en l'un quelconque de ces points a, avec la tangente, un

contact d'ordre $\frac{1}{n}$ (théorème IV, Art. III). Donc ces points se conservent tels quels dans la développée de Σ. D'ailleurs Σ ne possède aucune inflexion, et ses singularités, à distance finie, se composent uniquement de points doubles et de points de rebroussement. Donc le théorème VII s'applique à partir de la courbe Σ elle-même, et l'on voit que toutes ses développées successives sont, comme elle, du degré $2n$ et de la classe $(n+1)$.

Ces développées successives correspondent point par point à la courbe Σ. Elles sont donc, comme elle, *unicursales*. Étant de la même classe que Σ et n'ayant généralement, en dehors des points a, b, que des points doubles ou de rebroussement ordinaires comme points singuliers, il en résulte qu'elles ont le même nombre de rebroussements et le même nombre de points doubles que Σ. Elles sont donc toutes de même définition que Σ. Elles contiennent le même nombre d'arbitraires que la courbe Σ elle-même. J'en conclus qu'une quelconque de ces développées est la courbe générale de la définition de Σ. Or cette développée a son arc exprimable algébriquement, puisque sa développante est algébrique. J'en conclus donc que toute courbe de la définition de Σ a son arc exprimable algébriquement.

D'après la définition de Σ, je calcule ses singularités, et je trouve qu'elle a, outre les points a et b, $(n-1)$ points de rebroussement ordinaires, et $(n-1)(n-2)$ points doubles. Je puis donc dire que :

THÉORÈME VII. — *Soit une courbe de degré* $2n$, *ayant, à distance finie,* $(n-1)$ *points de rebroussement ordinaires,* $(n-1)(n-2)$ *points doubles, et à l'infini sur un cercle deux points corrélatifs du point de* $(n-1)^{ple}$ *inflexion. L'arc de cette courbe est algébrique, et ses développées successives sont des courbes de même degré et de même définition.* J'ajoute qu'*une telle courbe est la corrélative d'une courbe unicursale de degré* $(n+1)$, *douée de* $\frac{n(n-1)}{2}$ *points doubles et de deux points de* $(n-1)^{ple}$ *inflexion.*

Je donne, ainsi que je l'ai annoncé, un exemple de la courbe S. L'équation de cette courbe particulière est

$$xy\,\frac{x^n-y^n}{x-y}+\frac{x^{n+1}-y^{n+1}}{x-y}=0,$$

où j'indique, sans l'effectuer, la division par $(x-y)$ pour simplifier

l'écriture. L'origine est, sur cette courbe S, un point multiple ordinaire d'ordre n, qui équivaut à $\frac{n(n-1)}{2}$ points doubles. Quant aux points de $(n-1)^{\text{ple}}$ inflexion, ils sont à l'infini, et leurs asymptotes sont les droites $x+1=0$, $y+1=0$.

Cet exemple comprend un de ceux qui ont été donnés précédemment relativement à des courbes du quatrième degré.

10. Voici un nouvel exemple qui comprend l'autre cas des courbes du quatrième degré, donné plus haut.

Je considère la courbe

$$S = x^n y^n + P_{2n+1} = 0,$$

où P_{2n+1} est un polynome homogène de degré égal à son indice. Cette courbe est unicursale. Elle possède un seul point singulier, l'origine des coordonnées, et s'y compose de deux groupes de branches partielles, dont les tangentes sont les deux axes. Chacun de ces groupes se compose de n branches ayant avec leur tangente des contacts d'ordre $\frac{1}{n}$.

L'abaissement de la classe dû à ce point singulier est

$$2n(n-1)\left(1+\frac{1}{n}\right)+2n^2 = 4n^2-2.$$

Le degré de la corrélative Σ est donc

$$(2n+1)2n-(4n^2-2) = 2(n+1).$$

Aux points a, b, corrélatifs des deux axes, cette courbe Σ a, avec une même droite, corrélative de O, un contact d'ordre n. Cette droite la rencontre donc aux seuls points a, b. Si ces deux points sont à l'infini et circulaires, on voit aisément que la courbe Σ est telle que ses développées successives sont du même degré et de même définition.

J'ai donc la proposition suivante :

Théorème IX. — *On considère la courbe* S, *dont l'équation en coordonnées rectilignes est*

$$x^n y^n + P_{2n+1} = 0,$$

P_{2n+1} *étant un polynome homogène de degré* $2n+1$, *et l'on prend sa corrélative* Σ *de telle sorte que les points corrélatifs des axes de coordonnées soient les points circulaires à l'infini. Les développées successives de* Σ *sont du même degré que* Σ *et ont même définition. L'arc de la courbe* Σ *est algébrique.*

Je me bornerai à ces exemples, qui me paraissent propres à faire préjuger la nature des résultats qu'on pourrait obtenir en continuant une étude de ce genre. J'espère pouvoir y revenir.

NOTE.

Je me propose de montrer dans cette Note, par un calcul direct, quelle est la forme du résultat de la transposition des axes, et, en second lieu, d'une transformation corrélative, dans un groupe circulaire de branches de courbe.

I. Voici d'abord une proposition préparatoire.

Lemme. — *Soient* $\psi(y)$, $\chi(y)$ *deux suites procédant suivant les puissances croissantes de* y, *et dont les premiers termes sont respectivement* αy^a, βy^b, a *et* b *étant positifs, et* b *plus grand que* a. *Soit* Y *une racine de l'équation* $x = \psi(\mathrm{Y})$, *infiniment petite avec* x. *L'équation*

$$x = \psi(y) + \chi(y)$$

admet une racine, dont la différence avec Y *est infiniment petite de l'ordre de* $x^{\frac{b-a+1}{a}}$.

Posons, en effet, $y = \mathrm{Y} + \eta$, en supposant η infiniment petit par rapport à Y, et cherchons à satisfaire ainsi à l'équation

$$x = \psi(\mathrm{Y}+\eta) + \chi(\mathrm{Y}+\eta) = \psi(\mathrm{Y}) + \eta\psi'(\mathrm{Y}) + \ldots + \chi(\mathrm{Y}) + \ldots.$$

D'après les données, on voit immédiatement que cette équation peut être satisfaite si l'on prend, pour la partie principale de η, celle de $-\dfrac{\chi(\mathrm{Y})}{\psi'(\mathrm{Y})}$, laquelle se réduit à $-\dfrac{\beta}{a\alpha^{\frac{b+1}{a}}}\,x^{\frac{b-a+1}{a}}$, qui est effectivement infiniment petite par rapport à Y. Ce qui démontre le lemme annoncé.

Si le coefficient β conserve une valeur indéterminée, on peut en conclure que le développement de la racine y suivant les puissances croissantes de x contient un terme d'ordre $x^{\frac{b-a+1}{a}}$, attendu que la partie principale de η, qu'on vient de trouver, doit faire partie du développement de $\eta = y - Y$, et ne saurait provenir uniquement du développement de Y, puisque β est indéterminé.

Il y a encore un autre cas où l'on peut obtenir la même conclusion. C'est celui où l'on sait d'avance, d'après la nature de $\psi(y)$, que le développement de Y ne peut contenir un terme en $x^{\frac{b-a+1}{a}}$. Alors il est évident que $-\dfrac{\beta}{a\alpha^{\frac{b+1}{a}}}x^{\frac{b-a+1}{a}}$ est un terme du développement de y, et que ce dernier développement coïncide, jusqu'à ce terme exclusivement, avec celui de Y. C'est ce qui a lieu dans l'application que j'ai en vue.

2. Soit un groupe circulaire représenté par l'équation, bornée à ses termes caractéristiques,

$$(1) \qquad x = (y_1^{\mathrm{P}}) + (y_2^{\mathrm{P}_1}) + (y_3^{\mathrm{P}_2}) + \cdots + (y_{s+1}^{\mathrm{P}_s}).$$

Je rappelle qu'on a

$$(2) \qquad y = y_1^{q}, \qquad y_1 = y_2^{q_1}, \qquad \ldots, \qquad y_s = y_{s+1}^{q_s}.$$

Je rappelle aussi que $(y_{i+1}^{\mathrm{P}_i})$ figure une suite à exposants entiers ordonnée suivant les puissances croissantes de la variable y_{i+1} et commençant par un terme de degré P_i, et que le premier terme de chacune de ces suites est, par rapport à y, d'ordre supérieur au premier terme de la précédente. Enfin chacun des nombres P_i est premier avec le nombre q de même indice.

J'admets le résultat suivant, dont la démonstration est immédiate :

x étant un infiniment petit donné, une racine y infiniment petite du système des équations (1) *et* (2) *se développe en une série procédant suivant les puissances croissantes de x, telle que les exposants de tous ses termes ont pour plus petit dénominateur commun un diviseur de $\mathrm{P}q_1q_2\ldots q_s$.*

Cela étant, j'applique le lemme précédent, en posant

$$\psi(y) = (y_1^{\mathrm{P}}) + (y_2^{\mathrm{P}_1}) + \cdots + (y_{i+1}^{\mathrm{P}_i}),$$
$$\chi(y) = (y_{i+2}^{\mathrm{P}_{i+1}}).$$

J'ai ici

$$a = \frac{P}{q}, \qquad b = \frac{P_{i+1}}{q q_1 \ldots q_{i+1}}.$$

J'en conclus que la partie principale de η est de l'ordre

$$\frac{b - a + 1}{a} = \frac{P_{i+1} - P q_1 \ldots q_{i+1} + q q_1 \ldots q_{i+1}}{P q_1 \ldots q_{i+1}} = \frac{Q_{i+1}}{P q_1 \ldots q_{i+1}}.$$

J'admets, pour un instant, comme démontré que de l'équation

$$x = \psi(y)$$

on déduit

$$(3) \qquad y = (x_1^q) + (x_2^{Q_1}) + (x_3^{Q_2}) + \cdots + (x_{i+1}^{Q_i}),$$

où les variables $x_1, x_2, \ldots, x_{i+1}$ sont déterminées par les relations

$$x = x_1^P, \qquad x_1 = x_2^{q_1}, \qquad \ldots, \qquad x_i = x_{i+1}^{q_i}, \qquad \ldots,$$

le symbole $(x_{i+1}^{Q_i})$ représentant une quantité de même définition que ci-dessus.

Parmi les exposants de x dans le développement (3), j'ai les suivants :

$$\frac{q}{P}, \quad \frac{Q_1}{P q_1}, \quad \frac{Q_2}{P q_1 q_2}, \quad \ldots, \quad \frac{Q_i}{P q_1 q_2 \ldots q_i},$$

et je sais que le plus petit dénominateur commun à tous les exposants de x dans (3) est $P q_1 q_2 \ldots q_i$. Or le plus petit dénominateur commun à $\frac{Q_{i+1}}{P q_1 \ldots q_{i+1}}$ et aux fractions précédentes est, comme il résulte des hypothèses, précisément égal à $Q q_1 q_2 \ldots q_{i+1}$. Donc le terme qui est affecté de cet exposant, et qui existe dans le développement de η, ne peut exister dans le développement (3). Il existe donc dans le développement de la racine y de l'équation

$$x = \psi(y) + \chi(y).$$

Donc cette racine y sera représentée par un développement coïncidant avec (3) jusqu'aux termes de ce degré, et contenant en plus un terme de ce degré et des termes suivants. D'ailleurs, d'après une observation faite plus haut, le plus petit dénominateur commun aux exposants du développement de y est un diviseur de $P q_1 q_2 \ldots q_{i+1}$. Donc il est précisément égal à ce nombre, et l'on déduit maintenant de

$$(4) \qquad x = \psi(y) + \chi(y) = (y_1^P) + (y_2^{P_1}) + \cdots + (y_{i+2}^{P_{i+1}})$$

la relation

$$y = (x_1^q) + (x_2^{Q_1}) + \ldots + (x_{i+2}^{Q_{i+1}}).$$

Il est donc prouvé que, si cette proposition est vraie quand l'équation (4) se compose de $(i+1)$ groupes de termes, elle l'est aussi quand elle se compose de $(i+2)$ groupes. Or elle est évidente quand l'équation (4) se compose d'un seul groupe de termes. Donc elle est généralement démontrée.

3. La relation ci-dessus, qui lie les nombres P et les nombres Q, s'écrit comme il suit :

$$(5)\qquad P_i - P q_1 q_2 \ldots q_i = Q_i - q q_1 q_2 \ldots q_i.$$

Je considère maintenant deux groupes circulaires différents, tels que (1), mais dont les développements coïncident au moins jusques et y compris le premier terme du groupe $(y_{i+1}^{P_i})$.

Soit n l'ordre minimum des termes qui diffèrent dans les développements considérés. Il résulte du lemme ci-dessus qu'à une même valeur de x répondront, pour les deux groupes, des racines y dont la différence sera d'ordre

$$m = \frac{n - \frac{P}{q} + 1}{\frac{P}{q}}.$$

Donc les deux développements de y en x différeront seulement a partir des termes d'ordre m. La relation entre m et n s'écrit symétriquement

$$(6)\qquad Pm - q = qn - P.$$

D'après l'hypothèse, les nombres P et q coïncident respectivement dans les deux développements, jusqu'à l'indice i inclusivement. Il en est donc de même, en vertu de la relation (5), des nombres Q.

Je déduis donc de (5) et de (6)

$$P q_1 q_2 \ldots q_i m - Q_i = q q_1 \ldots q_i . n - P_i.$$

Si donc je pose

$$q q_1 \ldots q_i n - P_i = K,$$

le nombre K, défini par la comparaison des deux développements

en y, peut être défini de même, sans être modifié, par la comparaison des deux développements en x.

On a fait usage de ce résultat dans le cours de ce Mémoire (Art. IV, § 3).

4. Pour déduire, du développement qui figure un groupe circulaire, le développement qui figure le groupe corrélatif, je me sers, comme ci-dessus, d'un lemme préliminaire, qu'il est inutile d'énoncer.

Je pose, comme ci-dessus,

$$x = \psi(y) + \chi(y),$$

et maintenant

$$(7) \qquad z = \theta(y) + \pi(y).$$

Les fonctions qui figurent dans ces équations sont des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de y, et commençant par des termes de degrés positifs, à savoir :

$$\begin{array}{lll} \psi(y) & \text{par} & \alpha y^a \\ \chi(y) & \text{par} & \beta y^b \end{array} \Big\} \quad b > a,$$

$$\begin{array}{lll} \theta(y) & \text{par} & \gamma y^c \\ \pi(y) & \text{par} & \lambda y^l \end{array} \Big\} \quad l > c.$$

Et je considère une racine Y, infiniment petite avec x, de l'équation

$$x = \psi(\mathrm{Y}),$$

et je pose

$$\mathrm{Z} = \theta(\mathrm{Y}).$$

Je fais maintenant $y = \mathrm{Y} + \eta$, la partie principale de η étant celle qu'on a déterminée plus haut (§ 1), à savoir : $-\dfrac{\beta}{a\alpha^{\frac{b+1}{a}}} x^{\frac{b-a+1}{a}}$.

Je fais aussi $z = \mathrm{Z} + \zeta$, et je cherche la partie principale de ζ. Je trouve immédiatement qu'elle coïncide avec celle de

$$\eta\theta'(\mathrm{Y}) + \pi(\mathrm{Y}) = c\gamma.\eta\,\mathrm{Y}^{c-1} + \cdots + \lambda\,\mathrm{Y}^l + \cdots.$$

Or η est de l'ordre de $x^{\frac{b-a+1}{a}}$, ou de Y^{b-a+1}. Des deux termes qui figurent ici, l'un est donc d'ordre $b + c - a$, l'autre d'ordre l, relativement à Y. C'est en prenant celui de ces deux termes dont

l'ordre est le moindre qu'on aura la partie principale de ζ. Mais il peut arriver que ces deux termes soient du même ordre ; il est possible alors que leurs parties principales se détruisent et qu'il faille en considérer d'autres pour obtenir la partie principale de ζ. Dans l'application que j'ai en vue, ces deux termes sont effectivement du même ordre, mais leurs parties principales ne se détruisent pas, ainsi qu'on va le voir.

Je suppose donc $b+c-a=l$. Alors, d'après la valeur de la partie principale de η, celle de ζ coïncide avec celle de $\frac{\lambda a\alpha - c\gamma\beta}{a\alpha}\mathrm{Y}^l$, si toutefois le coefficient de cette expression n'est pas nul.

J'applique ce résultat au cas où les fonctions qui figurent dans les équations (7) sont définies comme il suit :

Soient $\psi_1(y)$, $\chi_1(y)$ deux séries procédant suivant les puissances croissantes de y et commençant respectivement par les termes $\alpha_1 y^{a_1}$, $\beta_1 y^{b_1}$, a_1 et b_1 étant plus grands que 1 et $b_1 > b$.

Je pose

$$\psi(y) = \psi'_1(y), \qquad \chi(y) = \chi'_1(y),$$
$$\theta(y) = \psi_1(y) - y\psi'_1(y), \qquad \pi(y) = \chi_1(y) - y\chi'_1(y).$$

J'ai ainsi

$$\alpha = a_1\alpha_1, \qquad \beta = b_1\beta_1, \qquad a = a_1 - 1, \qquad b = b_1 - 1,$$
$$\gamma = \alpha_1(a_1 - 1), \qquad \lambda = \beta_1(b_1 - 1), \qquad c = a_1, \qquad l = b_1.$$

Il en résulte

$$b + c - a = l.$$

Je forme maintenant le coefficient de Y^l dans ζ, et je trouve

$$\frac{\lambda a\alpha - c\beta\gamma}{a\alpha} = -\beta_1.$$

Ce coefficient n'est donc pas nul, et la partie principale de ζ est de l'ordre de Y^l, ou si l'on fait x infiniment petit du premier ordre, ζ est de l'ordre $\frac{l}{a} = \frac{b_1}{a_1 - 1}$.

Je considère maintenant le groupe circulaire

$$(8) \qquad \mathrm{X} = (y_1^{\mathrm{P}}) + (y_2^{\mathrm{P}_1}) + \cdots + (y_{s+1}^{\mathrm{P}_s}).$$

On a vu (Art. IV, § 5) que, si l'on pose

$$x = \frac{d\mathrm{X}}{dy}, \qquad z = \mathrm{X} - y\frac{d\mathrm{X}}{dy},$$

z et x sont les coordonnées d'un point d'un groupe corrélatif, dont on aura l'équation par l'élimination de y. Or le résultat de cette élimination, si l'on borne le développement cherché à ses termes caractéristiques, se trouve aisément par ce qui précède.

Je suppose le groupe circulaire (8) rapporté à sa tangente prise pour axe des y, en sorte qu'on a $P > q$.

Je pose maintenant

$$\psi_1(y) = (y_1^{P}) + (y_2^{P_1}) + \ldots + (y_{i+1}^{P_i}),$$
$$\chi_1(y) = (y_{i+2}^{P_{i+1}}).$$

D'où résulte

$$a_1 = \frac{P}{q}, \qquad b_1 = \frac{P_{i+1}}{q q_1 \ldots q_{i+1}}.$$

Il en résulte que la partie principale de ζ est d'ordre

$$\frac{b_1}{a_1 - 1} = \frac{P_{i+1}}{(P - q) q_1 \ldots q_{i+1}}.$$

En raisonnant maintenant comme on l'a fait au paragraphe 2, on conclura que l'équation cherchée est

$$z = (x_1^{P}) + (x_2^{P_1}) + \ldots + (x_{s+1}^{P_s}),$$

où l'on a posé

$$x = x_1^{P-q}, \qquad x_1 = x_2^{q_1}, \qquad x_2 = x_3^{q_2}, \qquad \ldots, \qquad x_s = x_{s+1}^{q_s}.$$

C'est le résultat énoncé dans ce Mémoire (Art. IV, § 5).

Quant à la propriété relative à deux groupes circulaires considérés simultanément, et dont il a été fait usage au même endroit, à savoir que le nombre K, dont il a été question dans cette Note (§ 3), se conserve dans la transformation corrélative, elle résulte immédiatement de ce qui précède, ainsi qu'on le verra aisément.

SUR UN POINT

DE LA

THÉORIE DES FONCTIONS ABÉLIENNES.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 1874, t. 78, p. 1833.

Soit $T(x, y) = 0$, une équation entière définissant l'irrationnelle y. Les intégrales des fonctions rationnelles de x et y se ramènent, comme on sait, à un nombre fini de transcendantes distinctes, parmi lesquelles il en est qui ne deviennent jamais infinies. Leur nombre est le *genre* de l'irrationnelle y, ou, en langage géométrique, le *genre* de la courbe $T = 0$. Leur recherche revient à celle des conditions que doit remplir un polynome $f(x, y)$, pour que les valeurs critiques des variables ne rendent pas infinie l'intégrale $\int \frac{f(x, y)\,dx}{\frac{dT}{dy}}$. Cette recherche a été faite précédemment dans quelques cas particuliers; je la fais ici dans le cas général. Mon analyse repose sur deux transformations très simples.

I. Soit $x = 0$, $y = 0$ un système de valeurs critiques considéré. Par hypothèse, à une valeur infiniment petite de x (du premier ordre) répondent plusieurs racines y de l'équation $T = 0$, infiniment petites. Si quelques-unes d'entre elles sont d'ordre inférieur à l'unité, j'écarte cette particularité en prenant, au lieu de x, pour variable indépendante $x' = x + \alpha y$. C'est ma première transformation. En voici les propriétés. Les racines y infiniment petites forment, comme on sait, un ou plusieurs systèmes circulaires : soit y_1 l'une d'elles, d'ordre inférieur à l'unité, et n la multiplicité du système circulaire dont elle fait partie : y_1 est une fonction uniforme de $x^{\frac{1}{n}}$, son ordre est donc

de la forme $\frac{n_1}{n}$, n_1 étant un entier qui, d'après l'hypothèse, est inférieur à n. On en déduit aisément que y_1 est une fonction uniforme de $x'^{\frac{1}{n_1}}$. Avec la variable indépendante x', y_1 fait donc partie d'un système circulaire de n_1 racines. En d'autres termes, la multiplicité du système circulaire considéré est réduite de $(n - n_1)$ unités. S'il y a d'autres systèmes dans le même cas, leurs multiplicités subissent des réductions analogues $(n' - n'_1)$, ... Le nombre N des racines infiniment petites y se trouve ainsi réduit de $s = n - n' + n_1 - n'_1 + \ldots$, et devient $N_1 = N - s$.

L'équation $T(x, y) = 0$ se change en $T_1(x', y) = 0$, et, pour les valeurs y satisfaisant, on a

$$\frac{dx}{\frac{dT}{dy}} = \frac{dx'}{\frac{dT_1}{dy}}. \tag{1}$$

Soit a l'ordre d'infiniment petit auquel appartient $\frac{dT}{dy}$ quand on y substitue à y l'une quelconque des n racines du même système que y_1. Soit de même a_1 le nombre analogue pour $\frac{dT_1}{dy}$ (x' étant alors l'infiniment petit principal). Comme x' est d'ordre $\frac{n_1}{n}$, on obtient, en égalant les ordres des deux membres de l'équation (1), $n_1 a_1 = na - (n - n_1)$. De même pour les autres systèmes circulaires. Si je pose donc $A = \Sigma na$, la sommation s'appliquant à tous les systèmes circulaires, et que je désigne par A_1 le nombre analogue après le changement de variable, j'ai $A_1 = A - s$.

Le polynome $f(x, y)$ se change en un autre $f_1(x', y)$. D'après l'équation (1), j'ai maintenant à traiter la même question que précédemment pour l'intégrale $\int \frac{f_1(x, y)\,dx}{\frac{dT_1}{dy}}$, x et y étant liés par l'équation $T_1(x, y) = 0$.

Les N_1 racines infiniment petites de cette dernière équation étant toutes au moins du premier ordre, il en résulte que, dans T_1, les termes de degré inférieur à N_1 manquent. Si donc λ est une constante arbitraire, $T_1(x, \lambda x)$ est divisible par x^{N_1}.

2. Soit y_i une racine appartenant à un système circulaire de multiplicité μ ; je pose, pour abréger, $U_i = \left[\frac{f_1(x, y)}{\frac{dT_1}{dy}}\right]_{y = y_i}$.

Pour les valeurs infiniment petites de x, U_i est une fonction uniforme de $x^{\frac{1}{\mu}}$. Pour que $\int U_i\,dx$ ne soit pas infini, il faut qu'il en soit de même de $x^{\frac{\mu-1}{\mu}}U_i$, et par suite aussi de $x^{\frac{m-1}{m}}U_i$, m étant le plus grand des nombres μ, et y_i une racine quelconque de $T_1 = 0$.

La formule de la décomposition des fractions rationnelles me donne

$$f_1(x, \lambda x) = T_1(x, \lambda x)\sum \frac{U_i}{\lambda x - y_i}.$$

Si je multiplie les deux membres par $x^{\frac{m-1}{m}}$, j'ai, dans le second, une suite de termes dont chacun est un infiniment petit, au moins de l'ordre $(N_1 - 1)$. Il en est donc de même du premier membre $x^{\frac{m-1}{m}} f_1(x, \lambda x)$, et, par suite, de $f_1(x, \lambda x)$. Donc, *dans le polynome* f_1, *les termes de degré inférieur à* $(N_1 - 1)$ *manquent*. De là $\frac{N_1(N_1-1)}{2}$ conditions nécessaires.

Ces conditions étant remplies, je remplace la variable y par la variable η en posant $y = \eta x$. J'ai, en désignant par φ un polynome,

$$f_1(x, y) = x^{N_1-1}\varphi(x, \eta), \qquad T_1(x, y) = x^{N_1}\theta(x, \eta),$$

$$(2) \qquad \frac{dT_1}{dy} = x^{N_1-1}\frac{d\theta}{d\eta}, \qquad \int \frac{f_1(x, y)\,dx}{\frac{dT_1}{dy}} = \int \frac{\varphi(x, \eta)\,dx}{\frac{d\theta}{d\eta}}.$$

C'est ma seconde transformation. En voici les propriétés :

Parmi les racines η de l'équation $\theta = 0$ pour $x = 0$, il n'est évidemment besoin de considérer que celles qui correspondent à $y = 0$. Elles peuvent avoir plusieurs valeurs différentes. S'il en est ainsi, le problème se pose maintenant pour plusieurs valeurs critiques ; mais pour chacune d'elles le nombre des systèmes circulaires est moindre. Dans le cas opposé, le problème n'a pas changé de forme. On remarquera que, dans le premier cas, la somme des nombres analogues à A, pour les différentes valeurs critiques considérées, ou, dans le second cas, le nombre unique analogue et relatif à l'équation $\theta = 0$, est maintenant, comme on le voit par la relation (2), égal à $A_1 - N_1(N_1 - 1)$.

J'envisage le second cas, et j'observe qu'après avoir mis en évidence $\frac{N_1(N_1-1)}{2}$ conditions auxquelles satisfait le polynome f, je suis

ramené au même problème, où le nombre A_1 a subi une diminution double $N_1(N_1-1)$.

3. L'emploi continu de ces deux transformations aboutira évidemment, après un nombre fini d'opérations, à une séparation des valeurs critiques. A chaque application de la première transformation, on diminue les nombres A et N d'un nombre tel que s, sans découvrir aucune condition nouvelle imposée au polynome f. A chaque application de la seconde, on découvre, au contraire, des conditions imposées à ce polynome, et l'on diminue du double le nombre A sans modifier N. Soient donc, après la transformation qui opère la séparation, $\nu, \nu', \ldots,$ les multiplicités auxquelles sont réduits les systèmes circulaires dont les multiplicités étaient primitivement $n, n', \ldots,$ K le nombre des conditions découvertes, $\alpha, \alpha', \ldots,$ les nombres analogues à A pour chacune des valeurs considérées, on aura

$$\Sigma\alpha = A - 2K - \Sigma(n-\nu). \tag{3}$$

L'application successive des mêmes raisonnements à chacune des valeurs critiques distinctes permettra de séparer finalement tous les systèmes circulaires primitifs et de ramener l'intégrale proposée à autant de formes distinctes, dans chacune desquelles à la valeur critique unique qu'on a à considérer répond un seul système circulaire. On voit d'ailleurs aisément qu'à cause de sa forme linéaire l'équation (3) a encore lieu maintenant.

Je considère actuellement une de ces dernières intégrales : soit α le nombre analogue à A, et ν la multiplicité du système circulaire qu'on y envisage. En lui appliquant les mêmes transformations que ci-dessus, je réduis constamment cette multiplicité qui finit par être l'unité ; mais alors la valeur critique cesse de l'être, et le polynome du numérateur n'a plus à remplir aucune condition nouvelle. D'ailleurs, le nombre analogue à α se trouve ainsi réduit à zéro ; si k est le nombre des nouvelles conditions trouvées, l'équation (3), appliquée ici, donne

$$0 = \alpha - 2k - (\nu - 1).$$

Les autres intégrales donnent de même

$$0 = \alpha' - 2k' - (\nu' - 1), \qquad \ldots;$$

d'où je conclus

$$2(K + k + k' + \ldots) = A - \Sigma(n-1).$$

Et enfin, en désignant par t le nombre des systèmes circulaires primitifs, *j'ai, pour le nombre total des conditions nécessaires et suffisantes* $\frac{1}{2}(\mathrm{A} - \mathrm{N} + t)$.

Au point de vue géométrique, si l'axe des y n'est pas tangent à la courbe $\mathrm{T} = 0$ à l'origine des coordonnées, A est l'abaissement que ce point produit dans la classe de la courbe, et N est sa multiplicité. Par suite :

Pour une courbe algébrique plane quelconque, dont p est le genre, c la classe, m le degré, $\mathfrak{N}$ *la somme des multiplicités des points singuliers, et* T *la somme des nombres de systèmes circulaires formés par les branches de la courbe en ces points*, on a

$$2(p-1) = c - 2m + \mathfrak{N} - \mathrm{T}.$$

Je ne donnerai ici qu'un exemple. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ des constantes différentes entre elles, et $a, b_1, b_2, \ldots, b_k$ des nombres entiers positifs, et

$$\mathrm{T}(x, y) = y^a - (x - \alpha_1)^{b_1}(x - \alpha_2)^{b_2} \ldots (x - \alpha_k)^{b_k} = 0.$$

On doit naturellement supposer que les nombres $a, b_1, \ldots, b_k$ ont pour plus grand commun diviseur l'unité, sans quoi l'équation serait décomposable. Cela étant, en désignant par Δ le plus grand commun diviseur de a et de $b_1 + b_2 \ldots + b_k$, et par δ_i le plus grand commun diviseur de a et de b_i, on aura

$$2(p-1) = a(k-1) - \Delta - \Sigma\,\delta_i.$$

SUR LE CONTACT DES SURFACES.

Bulletin de la Société mathématique, 1874-1875, t. III, p. 28.

1. On a jusqu'à présent accordé peu d'attention aux questions qui concernent le contact des surfaces quelconques avec les surfaces algébriques. Plusieurs sont cependant dignes d'intérêt : on en jugera peut-être ainsi de celle qui a donné lieu au présent travail. Peu de mots suffiront pour en faire connaître l'origine.

Le contact d'ordre n entre deux surfaces, S, Σ, dont l'une est supposée donnée ainsi que le point de contact, exige, comme on sait, $N_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ conditions. Donc : 1° si l'autre surface, Σ, renferme M arbitraires, on peut en disposer de manière à élever l'ordre du contact jusqu'à la plus grande valeur de n qui laisse N_n non supérieur à M; 2° pour que le contact puisse s'élever à l'ordre immédiatement supérieur $(n+1)$, il faut que le point de contact satisfasse à $(N_{n+1} - M)$ conditions.

Cette proposition, à laquelle on borne le plus souvent cette partie de la théorie du contact, souffre, dans un des cas les plus simples, une exception remarquable signalée dans le *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, par M. Hermite. Il s'agit du cas où Σ est une surface arbitraire du second degré. Le nombre M est ici égal à 9. Conformément à ce qui vient d'être rappelé, le maximum de n est égal à 2. Mais la seconde partie de la conclusion cesse d'être exacte. Le contact devrait pouvoir s'élever au troisième ordre en des points satisfaisant à *une* condition sur la surface donnée. Il n'en est rien : les points dont il s'agit satisfont à *deux* conditions. Ils sont donc en nombre fini. De plus, en chacun d'eux, il existe un faisceau de surfaces du second degré ayant avec la proposée un contact du troisième ordre.

Cette exception est-elle un fait isolé, ou a-t-elle lieu dans d'autres cas? Telle est la question qui s'offre ici. Je prouverai qu'une exception analogue a lieu dans le cas où la surface arbitraire est du troisième, du quatrième ou du cinquième degré, et qu'il n'en existe point pour les surfaces de degré supérieur.

2. Voici d'abord une remarque des plus simples, qui donne une première indication sur le sujet dont il s'agit. Soit $\Sigma = 0$ l'équation d'une surface, et $T = 0$ celle de son plan tangent en un point a. Soit λ une constante arbitraire. Les surfaces du faisceau $\Sigma + \lambda T^m = 0$ ont manifestement, en a, avec Σ, un contact d'ordre $(2m-1)$. Si, en effet, on substitue aux coordonnées, dans l'équation du faisceau, celles d'un point de Σ, à distance infiniment petite du 1[er] ordre de a, Σ s'évanouit, et T est du deuxième ordre. Donc $\Sigma + \lambda T^m$ est infiniment petit d'ordre $2m$. Donc le contact est bien d'ordre $(2m-1)$.

Supposons maintenant que Σ soit du degré m. Nous avons formé, de la sorte, en un point arbitraire a de Σ, un faisceau de surfaces du même degré, ayant avec la proposée un contact d'ordre $(2m-1)$. Donc :

Si, en un point d'une surface, il existe une surface de degré m, ayant, avec la proposée, un contact d'ordre non supérieur à $(2m-1)$, *il en existe une infinité.*

Si, comme je l'ai rappelé plus haut, on calcule le maximum de n relatif à une surface arbitraire de degré m, on trouve, pour $m = 2$, 3 ou 4, que ce maximum est $(2m-2)$, c'est-à-dire 2, 4 ou 6.

Par conséquent, un contact d'ordre 3, 5 ou 7, en un mot d'ordre $(2m-1)$, est exceptionnel. La remarque précédente nous avertit donc que, si ce contact exceptionnel a lieu, en un point d'une surface S, à l'égard d'une surface de degré 2, 3 ou 4, il a également lieu à l'égard d'une infinité de pareilles surfaces.

Le maximum de n, calculé de même pour le cas où $m = 5$, est égal à 9. Ici le nombre N_9 des conditions est précisément le même que celui des surfaces arbitraires, à savoir 55. On croirait donc qu'en chaque point d'une surface S il existe *une* surface du cinquième degré ayant avec S un contact du neuvième ordre. Je dis *une* à cause de la forme linéaire des équations qui servent à déterminer la surface. Mais, d'après la remarque ci-dessus, s'il en existe une, il en existe

une infinité. Voilà donc encore une exception à la théorie générale ; et celle-là est un peu différente des précédentes.

Pour les valeurs de m supérieures à 5, le maximum de n, calculé de même, est, on le prouve aisément, supérieur à $(2m-1)$. La remarque ci-dessus cesse alors d'être utile.

Les indications précédentes ne suffisent pas pour résoudre les questions proposées. Une étude plus approfondie est nécessaire. Avant de l'aborder, je ferai remarquer que cet ordre de recherches peut être envisagé d'un point de vue, au premier abord, différent.

3. Soit, comme plus haut, Σ une surface à M arbitraires, et n l'ordre le plus élevé du contact que ces arbitraires permettent d'établir entre Σ et une surface donnée S en un point donné. Pour que l'ordre de ce contact puisse s'élever à $(n+1)$, il faut que le point de contact satisfasse à des conditions qui se traduisent par des relations entre les coordonnées et les dérivées partielles prises sur S. Or, il est manifeste que ces relations ne sont autre chose que les équations aux dérivées partielles du groupe de surfaces Σ; c'est-à-dire les équations qu'on obtient en différentiant l'équation de Σ jusqu'à l'ordre minimum qui permette l'élimination de toutes les arbitraires, et en faisant cette élimination.

Cette double interprétation des équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes est un fait général en analyse, et sur lequel je pourrai revenir dans une autre occasion. Dans tous les cas de la théorie du contact, elle est immédiatement évidente. Par exemple, l'équation aux dérivées partielles des surfaces réglées, considérée comme définissant un lieu de points sur une surface donnée, y définit le lieu des points de contact des droites surosculatrices, c'est-à-dire ayant avec la surface un contact du troisième ordre.

La considération de ce lieu, qui s'offre ici comme un exemple, fournit une explication simple de l'exception relative au contact des surfaces du second degré. Je l'indique en passant. Soit P cette courbe. Si, en un point p d'une surface S, il existe une surface Σ du deuxième degré ayant avec S un contact du troisième ordre, les droites de Σ, qui passent en p, ont avec S un contact de ce même ordre. Le point p appartient donc doublement à la ligne P ; il en est un point double. Il n'y a donc qu'un nombre fini de tels points. Ainsi :

Les points d'une surface S, *en lesquels il existe des surfaces du deuxième degré ayant avec* S *un contact du troisième ordre sont des points doubles du lieu des points de contact de* S *avec ses droites surosculatrices.*

La réciproque de cette proposition est exacte, comme on le verra plus loin.

J'arrive maintenant à la question générale, qui peut être ainsi posée : *Quelles sont les équations aux dérivées partielles d'ordre minimum, ne contenant aucune constante arbitraire, auxquelles satisfont les surfaces de degré* m ?

4. Les surfaces de degré m contiennent un nombre M d'arbitraires, marqué par

$$M = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} - 1.$$

J'en prends une passant à l'origine O des coordonnées, et y touchant le plan des xy. Elle contient (M — 3) arbitraires, et satisfait à trois équations, à savoir, pour $x = 0$, $y = 0$,

$$(1) \qquad z = 0, \qquad \frac{dz}{dx} = 0, \qquad \frac{dz}{dy} = 0.$$

Formons les dérivées partielles de z, au point O, jusqu'à l'ordre minimum qui permette l'élimination des (M — 3) arbitraires, et faisons cette élimination. Nous obtenons ainsi des équations :

$$(2) \qquad \theta = 0, \qquad \theta_1 = 0, \qquad \ldots,$$

entre les dérivées partielles considérées. Ces équations, à cause de (1), ne contiennent ni les coordonnées, ni les dérivées partielles du premier ordre.

Je dis que *les équations* (2) *sont précisément les équations aux dérivées partielles des surfaces de degré* m, que je cherche.

Changeons, en effet, de coordonnées, en posant :

$$(3) \qquad a + x = X, \qquad b + y = Y, \qquad c + px + qy + z = Z.$$

Tirons de ces équations x, y, z et remplaçons ces variables par leurs expressions dans (1) et (2). Il est clair que les équations (2) ne changent pas, sauf que x, y, z sont remplacées par les lettres X, Y, Z.

Quant aux équations (1), elles deviennent, pour $X=a$, $Y=b$,

(4) $$Z=c, \quad \frac{dZ}{dx}=p, \quad \frac{dZ}{dy}=q.$$

Les équations (2) et (4) conviennent donc aux surfaces de degré m, passant au point $X=a$, $Y=b$, $Z=c$, et y touchant le plan

$$Z-c=p(X-a)+q(Y-b).$$

Il suffira d'éliminer les constantes arbitraires a, b, c, p, q pour avoir les équations qui conviennent à toutes les surfaces de degré m. Ces équations se réduisent donc aux équations (2). Ce qu'il fallait démontrer.

Donc, premier résultat : *les équations aux dérivées partielles des surfaces d'un degré donné ne contiennent ni les coordonnées, ni les dérivées partielles du premier ordre.*

Ce résultat s'applique également à toute famille de surfaces, telle qu'on puisse mener une d'elles par un point quelconque, de manière à y toucher un plan quelconque. Dans ce cas général, comme dans celui qui nous occupe, on peut, pour former les équations, supposer la surface passant à l'origine des coordonnées et y touchant le plan des xy.

Dans cette hypothèse, si un terme de l'équation de la surface est de la forme $Az^py^rx^q$, et que x et y soient infiniment petits du premier ordre, ce terme est lui-même infiniment petit d'ordre $(r+q+2p)$. Comme les dérivées partielles de z sont, à des facteurs numériques près, les coefficients du développement de z suivant les puissances croissantes de x et y, on voit que le terme considéré n'a aucune influence sur les dérivées partielles d'ordre inférieur à $(r+q+2p)$.

Ainsi, dans le cas du deuxième degré, le terme en z^2 n'a pas d'influence sur les dérivées partielles d'ordre inférieur à 4. Les 7 dérivées du deuxième et du troisième ordre dépendent donc simplement de 5, et non pas de 6 arbitraires $(M-3=6)$. *Donc il y a au moins deux équations du troisième ordre.*

Pour le troisième degré, le terme en z^3 n'intervient pas dans le calcul des dérivées avant le sixième ordre. Les 18 dérivées du deuxième au cinquième ordre dépendent donc de 15 et non de 16 coefficients $(M-3=16)$. *Donc au moins trois équations du cinquième ordre.*

Pour le quatrième degré, le terme en z^4 n'intervient pas dans le calcul des dérivées avant le huitième ordre. Les 33 dérivées du deuxième au septième ordre dépendent donc de 30, et non de 31 coefficients ($M - 3 = 31$). *Donc encore au moins trois équations du septième ordre.*

Pour le cinquième degré, le terme en z^5 n'intervient pas dans le calcul des dérivées avant le dixième ordre. Les 52 dérivées du deuxième au neuvième ordre dépendent donc de 51 et non de 52 coefficients ($M - 3 = 52$). *Il y a donc au moins une équation du neuvième ordre.*

Là s'arrête l'application de cette nouvelle remarque. Elle ne diffère pas essentiellement de celle qui a été faite plus haut (n° 2). Elle la complète et fait prévoir les résultats du calcul dont je vais m'occuper.

5. Je considère une surface passant à l'origine des coordonnées et y touchant le plan des xy, conformément à une remarque du numéro précédent. Soit

$$z = S_2 + S_3 + S_4 + \dots \tag{5}$$

le développement de z suivant les puissances croissantes de x et y. Je désigne ici par S_k un polynome homogène en x, y, de degré k. Ses coefficients sont, à des facteurs numériques près, les dérivées partielles d'ordre k.

Je représente de même par une lettre tout polynome homogène en x, y, en indiquant son degré par l'indice inférieur, en sorte que

$$T^{(k)} = t_0^{(k)} + t_1^{(k)} + t_2^{(k)} + \dots + t_k^{(k)} \tag{6}$$

est un polynome quelconque en x, y, de degré k. D'après ces définitions, les symboles $t_{k+1}^{(k)}$, $t_{k+2}^{(k)}$, ... sont nuls.

L'équation d'une surface de degré m, d'après ces conventions, pourra s'écrire :

$$T^{(m)} + T^{(m-1)} z + T^{(m-2)} z^2 + \dots + T^{(1)} z^{m-1} + T^{(0)} z^m = 0. \tag{7}$$

On obtiendra toutes les relations entre les dérivées partielles de z et les coefficients de (7) en écrivant que l'expression (6), mise à la place de z dans (7), fournit une identité.

Je forme les termes par degrés successifs croissants. J'ai ainsi :

$$(8)\qquad t_0^{(m)} = 0, \qquad t_1^{(m)} = 0,$$

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} & t_2^{(m)} + t_0^{(m-1)} S_2 = 0, \\ & t_3^{(m)} + t_0^{(m-1)} S_3 + t_1^{(m-1)} S_2 = 0, \\ & t_4^{(m)} + t_0^{(m-1)} S_4 + t_1^{(m-1)} S_3 + t_2^{(m-1)} S_2 + t_0^{(m-2)} S_2^2 = 0, \\ & t_5^{(m)} + t_0^{(m-1)} S_5 + t_1^{(m-1)} S_4 + t_2^{(m-1)} S_3 \\ & \quad + t_3^{(m-1)} S_2 + 2 t_0^{(m-2)} S_2 S_3 + t_1^{(m-2)} S_2^2 = 0, \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right.$$

Pour appliquer ces équations, je suppose d'abord $m=2$. Alors $t_3^{(m)}$ est nul. La seconde des équations (9) indique que S_3 *est divisible par* S_2. Donc :

Les surfaces du deuxième degré satisfont à deux équations aux dérivées partielles du troisième ordre qu'on obtient en écrivant que le polynome du troisième degré en α

$$A = \alpha^3 \frac{d^3 z}{dx^3} + 3\alpha^2 \frac{d^3 z}{dx^2\,dy} + 3\alpha \frac{d^3 z}{dx\,dy^2} + \frac{d^3 z}{dy^3}$$

est divisible par le polynome du deuxième degré

$$B = \alpha^2 \frac{d^2 z}{dx^2} + 2\alpha \frac{d^2 z}{dx\,dy} + \frac{d^2 z}{dy^2}.$$

Ce sont précisément les conditions, indiqués par M. Hermite, pour la possibilité du contact du troisième ordre entre une surface et une surface du second degré.

Les équations (9) sont évidemment susceptibles elles-mêmes de la double interprétation signalée plus haut (n° 3). On y peut considérer les coefficients des polynomes S comme donnés. Les équations servent alors à déterminer la surface (7) de manière à ce qu'elle ait avec la surface (5) un contact d'ordre égal au degré de celle des équations (9) à laquelle on s'arrête.

Si donc on suppose que S_3 soit donné, divisible par S_2, les équations (8) et les deux premières des équations (9) déterminent, dans l'hypothèse $m=2$, un faisceau de surfaces du deuxième degré, de la forme $\Sigma + \lambda z^2 = 0$, qui ont avec la surface proposée, en O, un contact du troisième ordre.

6. Quelques mots encore au sujet du contact des surfaces du deuxième degré. L'équation d'une surface étant mise sous la forme du développement (5), les points d'intersection de cette surface et du plan des xy doivent vérifier la relation

$$(10) \qquad 0 = S_2 + S_3 + S_4 + \cdots.$$

S'il arrive que la courbe, lieu de ces points, se compose de plusieurs lignes distinctes, et que $Q = 0$ soit l'équation, sous forme entière, de l'une d'elles, le second membre de (10) est divisible par Q.

Ce fait se présente dans le cas d'une surface réglée. Pour la génératrice rectiligne qui passe en O, Q est linéaire et homogène. C'est un des deux facteurs de S_2. Le second membre de (10) étant divisible par ce facteur, il en est ainsi de S_3. Par suite, *on obtient*, comme on le sait d'ailleurs, *l'équation aux dérivées partielles des surfaces réglées en écrivant que le polynome* A, du numéro précédent, *a un facteur commun avec le polynome* B.

Qu'on se reporte au résultat du numéro précédent, et l'on voit que *les deux équations aux dérivées partielles des surfaces du deuxième degré expriment la double génération rectiligne de ces surfaces*. Comme conséquence, l'équation du deuxième degré à trois variables en est la solution générale.

Au point de vue de la théorie du contact, les points d'une surface, en lesquels les polynomes A et B ont un facteur commun, sont les points de contact des droites surosculatrices ; ils forment ce que j'ai désigné précédemment par la ligne P. D'ailleurs, nous venons de trouver que les points où A et B ont deux facteurs communs sont ceux où le contact du troisième ordre avec une surface du deuxième degré est possible, et inversement. Nous retrouvons donc par le calcul que ces points sont doubles sur la ligne P, et aussi la proposition réciproque.

7. J'applique maintenant les équations du n° 5 au cas où $m = 3$. Ici $t_4^{(m)}$, $t_5^{(m)}$, $t_3^{(m-1)}$ sont nuls. La troisième des équations (9), si l'on y fait $t_0^{(2)} = 1$, ce qui est permis, devient

$$(11) \qquad S_4 + t_1^{(2)} S_3 + (t_2^{(2)} + t_0^{(1)} S_2) S_2 = 0.$$

Je dis qu'on en peut déduire aisément les polynomes $t_1^{(2)}$ et $t_2^{(2)} + t_0^{(1)} S_2$.

A cet effet, je considère la fraction rationnelle $\frac{S_4}{S_3}$ en y supposant que le rapport $\frac{x}{y}$ soit remplacé, dans cette fraction, par une racine de $S_2 = 0$. A ce point de vue, la fonction rationnelle peut être réduite à un polynome du premier degré homogène en x, y, dont les coefficients s'expriment rationnellement par ceux de S_4, S_3, S_2. La définition de ce polynome A_1 peut être rappelée abréviativement par la relation

$$(12) \qquad A_1 \equiv \frac{S_4}{S_3} \pmod{S_2}.$$

Sans autre explication, on comprend de même quel est le polynome A_2 du second degré, homogène en x, y, qui est défini par

$$(13) \qquad A_2 \equiv \frac{S_4}{S_2} \pmod{S_3}.$$

Le polynome $A_1 S_3 + A_2 S_2$, qui est, comme S_4, du quatrième degré, lui est égal pour cinq valeurs distinctes de la variable $\frac{x}{y}$, à savoir les racines de S_2 et de S_3. C'est donc précisément S_4. On en conclura aisément que la solution de l'équation (11) est donnée par

$$(14) \qquad t_1^{(2)} = -A_1, \qquad t_2^{(2)} + t_0^{(1)} S_2 = -A_2.$$

La quatrième des équations (9) devient maintenant

$$(15) \qquad S_5 - A_1 S_4 - A_2 S_3 + (t_0^{(1)} S_3 + t_1^{(1)} S_2) S_2 = 0.$$

Désignons par B_5 le polynome

$$B_5 = S_5 - A_1 S_4 - A_2 S_3,$$

dont les coefficients sont exprimables rationnellement par ceux de S_2, S_3, S_4 et S_5. L'équation (15) exprime trois conditions :

1° B_5 *est divisible par* S_2 ; ce qui donne deux équations.

2° Le *quotient* $\frac{B_5}{S_2}$ *est de la forme* $\alpha S_3 + \beta S_2$, α *et* β *étant une constante et un polynome du premier degré indéterminés*, ce qui donne une équation.

Il s'agit de former cette dernière équation.

Je dénote par un accent les dérivées prises par rapport à la variable $\frac{x}{y}$, les coefficients des polynomes étant, bien entendu, considérés comme constants.

Puisque B_5 est divisible par S_2, j'ai

$$\frac{B_5}{S_2} \equiv \frac{B'_5}{S'_2} \qquad (\bmod S_2).$$

Soit donc

$$(16) \qquad \frac{B'_5}{S'_2} \equiv y^2(ax + by) \qquad (\bmod S_2),$$

$$(17) \qquad S_3 \equiv y^2(cx + \varepsilon y) \qquad (\bmod S_2).$$

On verra sans peine que l'équation cherchée est

$$(18) \qquad a\varepsilon - bc = 0,$$

a, b, c, ε étant, comme l'indiquent les relations (16) et (17), exprimables rationnellement en fonction des dérivées partielles du deuxième au cinquième ordre.

Ainsi : *En joignant à l'équation* (18) *celles qu'on obtient en exprimant que* B_5 *est divisible par* S_3, *on a les trois équations aux dérivées partielles du cinquième ordre des surfaces du troisième degré.*

A un autre point de vue, *ces trois équations expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'en un point d'une surface, le contact avec une surface du troisième degré puisse s'élever au cinquième ordre. Quand elles sont satisfaites en un point, il existe en ce point un faisceau de telles surfaces du troisième degré.*

Pour cette dernière partie, on voit, en effet, que les équations considérées, jointes aux deux premières équations (9) et à (8), déterminent tous les coefficients de l'équation du troisième degré, sauf celui du terme en z^3. Les surfaces cherchées sont donc de la forme $\Sigma + \lambda z^3 = 0$.

8. Considérons maintenant les équations (9) dans le cas général. Nous les distinguons en deux groupes : en premier lieu, la série des premières jusqu'à celle qui commence par le terme $t_m^{(m)}$, inclusivement. Les équations de ce groupe serviront à déterminer

$$T^{(m)} = t_0^{(m)} + t_1^{(m)} + t_2^{(m)} + \ldots + t_m^{(m)},$$

quand les autres polynomes t auront été déterminés par les équations suivantes, qui forment le second groupe.

C'est seulement ce second groupe, qui ne contient pas les polynomes $t^{(m)}$, qui servira à trouver les équations aux dérivées partielles cherchées. C'est ainsi que le calcul a été fait dans les deux cas précédents.

Ainsi, par cette voie, tous les coefficients de $T^{(m)}$, au nombre de $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$, sont immédiatement éliminés. Les équations qui subsistent, et dont les degrés, par rapport à $\frac{x}{y}$, vont en croissant, commencent au degré $(m+1)$. Chacune d'elles fournit des équations distinctes, indépendantes de x et y, en nombre égal à son degré en $\frac{x}{y}$. Ces équations sont d'ailleurs linéaires et homogènes par rapport aux coefficients des polynomes t, qu'il s'agit d'éliminer. Dès que leur nombre permettra l'élimination complète, cette élimination fournira les équations aux dérivées partielles qu'on cherche.

Pour le quatrième et le cinquième degré, conformément à des remarques déjà faites, l'élimination est possible avant que la constante $T^{(0)}$ se soit introduite. Ainsi, pour le quatrième degré, on aura à considérer des équations des degrés 5, 6, 7 en $\frac{x}{y}$. Elles donneront lieu à $6+7+8=21$ équations linéaires et homogènes, entre lesquelles on doit éliminer les coefficients de $T^{(3)}$, $T^{(2)}$, $T^{(1)}$. En formant ces équations, ce qui est facile, mais un peu compliqué, on verra qu'aucun de ces coefficients, au nombre de 19, n'y manque. On aura donc, par l'élimination, trois équations du septième ordre. On peut donc dire que :

Les surfaces du quatrième degré satisfont à trois équations aux dérivées partielles du septième ordre.

A un autre point de vue, *ces équations expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour, qu'en un point d'une surface, le contact avec une surface du quatrième degré puisse s'élever au septième ordre. En un tel point, il existe un faisceau de telles surfaces du quatrième degré.*

Pour le cinquième degré, on aura à considérer des équations des degrés 6, 7, 8, 9 en $\frac{x}{y}$. Elles donneront lieu à 34 équations linéaires et homogènes entre les coefficients de $T^{(4)}$, $T^{(3)}$, $T^{(2)}$, $T^{(1)}$, au nombre de 34, et dont aucun n'y manque. Donc :

Les surfaces du cinquième degré satisfont à une équation aux dérivées partielles du neuvième ordre.

Cette équation caractérise, sur une surface quelconque, le lieu des points en lesquels le contact avec une surface du cinquième degré peut s'élever au neuvième ordre. En chaque point de ce lieu, il existe un faisceau de surfaces du cinquième degré ayant avec la surface considérée des contacts de cet ordre.

Il est clair que l'équation du neuvième ordre dont il s'agit a pour solution générale une surface qui, en chacun de ses points, a un contact du neuvième ordre avec un faisceau de surfaces du cinquième degré.

Au delà du cinquième degré, les mêmes raisonnements prouvent sans peine que la théorie générale, rappelée au n° 1, a toujours lieu. Il paraît bien difficile de parvenir à trouver la loi des équations définitives. S'il est cependant permis de l'espérer, c'est peut-être en suivant la marche que je viens d'indiquer, et dont l'effet est de faire disparaître immédiatement un assez grand nombre des quantités qu'on doit éliminer.

PROPRIÉTÉS RELATIVES

A LA

COURBURE DE LA DÉVELOPPÉE

D'UNE SURFACE QUELCONQUE.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 1875, t. 80, p. 116.

Sur une surface quelconque, les points peuvent être *associés* par couples, m, μ, de telle sorte que la droite $m\mu$ lui soit tangente en ces deux points. A l'égard de pareils couples, la *développée* d'une surface quelconque (lieu des centres de courbure principaux) jouit d'une propriété caractéristique, qui consiste, on le sait, dans la perpendicularité de ses plans tangents en m et μ. Cette propriété se traduit analytiquement par une relation entre deux points associés, et cette relation contient les dérivées partielles du premier ordre. On en peut aisément conclure l'existence de deux relations contenant les dérivées du second ordre, de trois relations contenant les dérivées du troisième ordre, et ainsi de suite. Ainsi, relativement à la courbure d'une développée, il existe deux relations entre les points associés. Ces relations ont été trouvées par M. Mannheim [1], qui les a déduites de considérations géométriques. J'en donne ici une démonstration analytique, dont le point de départ est dans les considérations précédentes.

Soient m, μ deux points associés sur une développée, dont je désignerai par (m) et (μ) les nappes. Soient mz et $\mu\zeta$ les normales en m et μ. Je place l'origine des coordonnées en un point O de $m\mu$. Je désigne cette droite par OB, et je la prends pour axe de coordon-

[1] *Comptes rendus*, t. 79, p. 1328.

nées, ainsi que des parallèles OA, OC à mz et $\mu\zeta$. Par hypothèse, ces coordonnées sont rectangulaires. Les points m et μ sont déterminés par leurs distances b, β au point O. Soient x, y, z les coordonnées d'un point m' par rapport à des axes parallèles menés par m, les coordonnées y, z étant prises suivant $m\mu$ et mz. Les coordonnées de m', par rapport aux axes d'origine O, sont z, $y + b, x$, suivant OA, OB, OC.

Soient, de même ξ, η, ζ les coordonnées d'un point μ' par rapport à des axes parallèles menés par μ; η et ζ étant prises suivant μm et $\mu\zeta$. Les coordonnées du même point, par rapport aux axes d'origine O, sont $\xi, \eta + \beta, \zeta$, suivant OA, OB, OC.

Je désigne, suivant l'usage, par p, q, r, s, t, les dérivées partielles $\frac{dz}{dx}, \ldots$, relatives à la nappe (m), et par les lettres grecques correspondantes les dérivées partielles $\frac{d\zeta}{d\xi}, \ldots$, relatives à la nappe (μ). Je représente, en outre, pour abréger, par l la distance $(b - \beta)$ des points m et μ.

J'écris d'abord que les points m', μ' sont *associés*, c'est-à-dire que la droite $m'\mu'$ est tangente à la surface en ces deux points. J'ai ainsi :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \xi - z &= p(\zeta - x) + q(\eta - y - l), \\ x - \zeta &= \pi(z - \xi) + \chi(y - \eta + l). \end{aligned} \right.$$

J'écris ensuite que les plans tangents en m' et μ' sont rectangulaires :

$$(2) \qquad p + \pi - q\chi = 0.$$

C'est en différentiant ces équations qu'on obtiendra les relations cherchées. Pour y parvenir rapidement, il suffit d'observer qu'aux points m, μ les coordonnées et les dérivées du premier ordre sont nulles. Par suite, pour notre objet, les équations (1) et (2) peuvent être réduites à

$$\xi = -ql, \qquad x = \chi l, \qquad p + \pi = 0,$$

qui, différentiées, donnent

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} d\xi + l(s\,dx + t\,dy) &= 0, \\ dx - l(\sigma\,d\xi + \tau\,d\eta) &= 0, \\ r\,dx + s\,dy + \rho\,d\xi + \sigma\,d\eta &= 0. \end{aligned} \right.$$

Ayant deux variables indépendantes, je peux, pour obtenir une

relation, annuler une différentielle, par exemple $d\xi$. Faisant donc $d\xi = 0$, je déduis aisément des équations (3)

$$l\tau(rt - s^2) + t\sigma = 0. \tag{4}$$

Semblablement, faisant $dx = 0$, j'obtiens

$$lt(\rho\tau - \sigma^2) - \tau s = 0. \tag{5}$$

Les équations (4) et (5) sont les équations cherchées. Si l'on veut y introduire, au lieu des dérivées partielles, les rayons de courbure principaux en m et μ, on y parviendra comme il suit.

Soient r_1, r_2 ces rayons de courbure en m, et a l'angle que fait avec $m\mu$ le plan de la section dont le rayon est r_1. On a

$$t = \frac{\cos^2 a}{r_1} + \frac{\sin^2 a}{r_2}, \qquad s = \frac{\sin 2a}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right), \qquad rt - s^2 = \frac{1}{r_1 r_2}.$$

Soient de même ρ_1, ρ_2 et α les quantités analogues et relatives au point μ. On aura des équations analogues. Les relations (4) et (5) se changeront en

$$\frac{r_1 \sin^2 a + r_2 \cos^2 a}{\rho_1 \sin^2 \alpha + \rho_2 \cos^2 \alpha} = \frac{\sin 2a}{2l}(r_2 - r_1) = \frac{2l}{(\rho_1 - \rho_2)\sin 2\alpha};$$

d'où l'on peut déduire

$$4l^2 + \sin 2a \sin 2\alpha (r_1 - r_2)(\rho_1 - \rho_2) = 0.$$

Ce sont précisément les équations de M. Mannheim.

Comme conséquence de ce calcul, je signalerai le cas où l'on a

$$rt - s^2 = 0.$$

La formule (4) montre que σ s'évanouit. Donc le plan BOC détermine une section principale en μ dans la nappe (μ). Or ce plan est aussi celui d'une section principale pour une surface dont la proposée est la développée. D'ailleurs, l'équation $rt - s^2 = 0$ caractérise un point *parabolique*. On peut donc dire :

Soit m un point parabolique de la développée d'une surface S. *Le plan de la section principale de* S, *dont le centre de courbure*

est au point associé μ, est aussi celui d'une section principale de développée en μ.

La réciproque est exacte. Ce cas est celui dans lequel le plan osculateur d'une des lignes de courbure de S est normal à cette surface.

SUR

UN POINT DE LA THÉORIE DES SURFACES.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 80, 1875, p. 258.

Dans une Communication précédente, j'ai établi les relations qui lient les éléments de la courbure de la développée d'une surface en deux points *associés*, c'est-à-dire centres de courbure principaux pour un même point de la surface primitive. Je donne aujourd'hui les relations qui existent entre les éléments de cette courbure et les dérivées partielles du troisième ordre.

Soit M un point de la surface (M). Les axes de coordonnées seront la normale MZ et les tangentes MX, MY aux lignes de courbure. Je désignerai par des majuscules les coordonnées et les dérivées partielles relatives à un point M' de (M). Soient m le centre de courbure de la section YMZ et mx, mz des parallèles à MX, MY. En y adjoignant la droite MZ, qui passe en m, j'ai trois axes rectangulaires mx, my, mz, auxquels je rapporte les points m' de la nappe (m) de la développée. Les coordonnées et les dérivées partielles correspondantes seront représentées par des minuscules. Soient, de même, μ le centre de courbure de la section XMZ, et $\mu\xi$, $\mu\zeta$ des parallèles à MY, MX. En y adjoignant MZ, j'ai trois axes $\mu\xi$, $\mu\eta$, $\mu\zeta$, auxquels je rapporte les points μ' de la nappe (μ) de la développée. Les coordonnées et les dérivées partielles correspondantes seront représentées par des lettres grecques. Les droites mz et $\mu\zeta$ sont les normales à la développée en m et μ; ce sont les *droites de courbure* de M. Mannheim.

D'après ces définitions, si Λ et L sont les distances $M\mu$ et Mm, les coordonnées, par rapport aux axes MX, MY, MZ, seront pour m' : $x, z, y+\mathrm{L}$; et pour μ' : $\zeta, \xi, \eta+\Lambda$. Si je suppose que m' et μ' soient

les centres de courbure principaux pour M′, ces trois points sont en ligne droite, et j'ai

$$X = x + \theta(x - \zeta), \qquad Y = z + \theta(z - \xi), \qquad Z = y + L + \theta(y - \eta + L - \Lambda).$$

Pour la position initiale de la figure, c'est-à-dire M′ coïncidant avec M, je tire de là

$$(1) \qquad (\Lambda - L)\, dX = \Lambda\, dx, \qquad (L - \Lambda)\, dY = L\, d\xi.$$

Je considère maintenant le point M′ comme l'origine de nouveaux axes, que, pour abréger, j'appelle axes M′, et qui sont les tangentes aux lignes de courbure et la normale à (M) en M′. J'exprime les dérivées partielles du second ordre, relatives au point M′ et aux axes M, en fonction des mêmes dérivées, relatives au même point et aux axes M′. Je distingue ces dernières par des accents, et je représente par α, β, γ; α', ... les cosinus directeurs des axes M′ par rapport aux axes M. J'obtiens facilement

$$(2) \qquad \begin{cases} \gamma''^3 R = (\alpha\gamma'' - \gamma\alpha'')^2 R' + (\alpha'\gamma'' - \gamma'\alpha'')^2 T', \\ \gamma''^3 S = (\alpha\gamma'' - \gamma\alpha'')(\beta\gamma'' - \gamma\beta'') R' + (\alpha'\gamma'' - \gamma'\alpha'')(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'') T', \\ \gamma''^3 T = (\beta\gamma'' - \gamma\beta'')^2 R' + (\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'')^2 T', \end{cases}$$

Je différentie ces équations, et j'attribue ensuite aux variables les valeurs initiales. Le résultat de cette opération se réduit à

$$(3) \qquad dR = dR', \qquad dS = d\alpha'(T' - R'), \qquad dT = dT'.$$

J'emploie la première et la troisième de ces équations seulement. Comme R′ et T′ sont les inverses des rayons de courbure principaux en M′, j'ai

$$R' = \frac{\gamma''}{\eta + \Lambda - Z}, \qquad T' = -\frac{\gamma''}{\eta + L - Z};$$

d'où, pour la position initiale,

$$dR' = -\frac{d\eta}{\Lambda^2}, \qquad dT' = -\frac{dy}{L^2}.$$

Soient A, B, C, D les dérivées partielles du troisième ordre; je déduis des équations (3)

$$A\, dX + B\, dY = -\frac{d\eta}{\Lambda^2}, \qquad C\, dX + D\, dY = -\frac{dy}{L^2}$$

ou, à cause des équations (1),

$$(4) \qquad A\Lambda^3\, dx - BL\Lambda^2\, d\xi + (\Lambda - L)\, d\eta = 0, \qquad DL^3\, d\xi - C\Lambda L^2\, dx + (L - \Lambda)\, dy = 0.$$

Dans ma précédente Communication, j'ai employé les relations suivantes, qui expriment simplement que la droite $m\mu$ se déplace en restant tangente aux nappes (m), (μ) de la développée

$$dx + (\Lambda - \mathrm{L})(\sigma\, d\xi + \tau\, d\eta) = 0, \qquad d\xi + (\mathrm{L} - \Lambda)(s\, dx + t\, dy) = 0.$$

Il suffit de les comparer aux équations (4) pour conclure

$$(5) \qquad \mathrm{A} = \frac{1}{\tau\Lambda^3}, \qquad \mathrm{B} = \frac{(\mathrm{L} - \Lambda)\sigma}{\tau\Lambda^2\mathrm{L}}, \qquad \mathrm{C} = \frac{(\Lambda - \mathrm{L})s}{t\mathrm{L}^2\Lambda}, \qquad \mathrm{D} = \frac{1}{t\mathrm{L}^3}.$$

Ce sont les équations que je me proposais d'établir. Elles donnent les éléments du troisième ordre de la surface, sans ambiguïté, en fonction des éléments du second ordre des deux nappes de la développée. Réciproquement, ceux-ci sont déterminés, sans ambiguïté, en fonction des premiers, comme on le voit, en joignant aux équations (5) les deux relations de M. Mannheim, établies dans ma Communication précédente. Ces deux relations peuvent être démontrées de nouveau, au moyen de la deuxième équation (3), dont je n'ai pas fait usage.

Remarques. — 1° Les expressions de A et D prouvent que le plan d'une section principale coupe la développée suivant une courbe osculatrice à la développée de cette section [1].

2° Les expressions de B et C peuvent être mises sous la forme

$$\mathrm{B} = \frac{(\mathrm{L} - \Lambda)^2}{t r_1 r_2 \Lambda^2 \mathrm{L}}, \qquad \mathrm{C} = \frac{(\Lambda - \mathrm{L})^2}{\tau \rho_1 \rho_2 \mathrm{L}^2 \Lambda},$$

où ρ_1 et ρ_2, r_1 et r_2 sont les rayons de courbure principaux de la développée en μ et m.

3° La méthode employée dans cette Note est celle du déplacement d'un solide, dont M. Mannheim a tant de fois montré la fécondité, notamment dans cet ordre de recherches.

4° Les courbures des deux branches de la section faite dans une surface par un plan tangent dépendent des dérivées du troisième ordre. Dans le cas particulier où ces deux courbures sont nulles à la

---

(1) *Voir*, à ce sujet, les Recherches géométriques sur le contact du troisième ordre, par M. Mannheim.

fois, on trouve les deux équations

$$\rho_1 \rho_2 = - 3(L - \Lambda)^2 \frac{\Lambda}{L}, \qquad r_1 r_2 = - 3(\Lambda - L)^2 \frac{L}{\Lambda}.$$

Ces équations ont constamment lieu si la surface proposée est du second degré. Dans les autres cas, elles se rapportent aux points en lesquels il existe des surfaces de ce degré ayant avec la proposée un contact du troisième ordre.

SUR UNE QUESTION D'ÉLIMINATION

OU

SUR L'INTERSECTION DE DEUX COURBES

EN UN POINT SINGULIER.

Bulletin de la Société mathématique, t. III, 1874-1875, p. 76.

1. Quand deux courbes ont en commun un point singulier et que leurs tangentes y sont distinctes, le nombre de leurs intersections confondues en ce point est, comme on sait, égal au produit des ordres de multiplicité du point sur chacune des deux courbes. Si, au contraire, les courbes ont, au point dont il s'agit, des tangentes communes, ce nombre s'augmente. *L'augmentation est égale à la somme des ordres des contacts des branches des courbes entre elles.* Cette proposition est due à M. Cayley, et j'en ai moi-même donné des démonstrations, l'une dans ce *Bulletin* (t. I, p. 133), l'autre dans un *Mémoire sur les points singuliers des courbes algébriques*, dont l'Académie a décidé l'insertion au recueil des Savants étrangers. On voit immédiatement comment cette proposition fournit le moyen de calculer l'augmentation dont je viens de parler. M. de la Gournerie, qui a écrit plusieurs Mémoires *Sur les singularités élevées des courbes planes* (*Journal de Math.*, 2e série, t. XIV et XV et *Comptes rendus*, t. 77) a eu l'occasion d'en faire des applications à des cas très complexes.

On a cependant pensé qu'il restait encore un pas à faire : on a demandé une formule générale qui fournisse immédiatement la solution du problème, quand les courbes sont données par leurs équations.

La question a été nettement posée par M. Painvin dans les termes suivants :

Trouver le nombre des points coïncidant avec l'origine et communs aux deux courbes

$$x^a \varphi_{p-a} + x^b \varphi_{p-b+1} + x^c \varphi_{p-c+2} + \ldots = 0,$$
$$x^\alpha \psi_{q-\alpha} + x^\beta \psi_{q-\beta+1} + x^\gamma \psi_{q-\gamma+2} + \ldots = 0,$$

les lettres φ_i et ψ_i désignant des fonctions homogènes en x et y, et du degré i. (*Bull. des Sc. math.*, t. IV, p. 131, et t. V, p. 139.)

Sous la forme géométrique, c'est, comme on voit, un problème d'élimination, tout algébrique. M. Painvin en a donné une solution élégante dans un cas particulier, celui où l'exposant β est nul. On la trouvera un peu plus loin.

Sur le problème ainsi posé, il importe de faire une remarque : En ne caractérisant les polynomes φ_i et ψ_i que par leurs degrés, on suppose essentiellement que leurs coefficients ne soient pas particularisés de manière à modifier le nombre cherché. C'est cependant ce qui peut arriver, et c'est là précisément le cas le plus compliqué du problème général. Dans ce cas, il me paraît impossible de ne pas recourir aux développements employés par M. de la Gournerie, ou à des transformations équivalentes.

Le problème, tel que M. Painvin l'a posé, n'en reste pas moins digne d'intérêt. J'en donne ici une solution ; j'y rattache ensuite le second cas, plus complexe, de telle sorte que la résolution du problème général s'obtient par l'application, plusieurs fois répétée, de la solution du problème particulier.

2. C'est une proposition rappelée plus haut qui sert de point de départ à mes recherches actuelles :

Théorème I. — *Le nombre des intersections de deux courbes, réunies en un point, est égal au produit des multiplicités de ce point sur les deux courbes, augmenté de la somme des ordres des contacts des branches de l'une avec les branches de l'autre au même point.*

C'est cette dernière somme qu'il s'agit de déterminer ; et il est clair que, pour y parvenir, il suffit de considérer successivement

chaque tangente commune, et de faire la somme des résultats. Pour abréger le langage, je désignerai cette somme par *ordre total du contact.*

J'ai donné au théorème une autre forme souvent utile (*Bull. de la Soc. math.*, t. II, p. 35) :

Théorème II. — *Le nombre des intersections de deux courbes, réunies en un point* O, *l'équation de l'une d'elles étant, sous forme entière,* $f(x, y) = 0$, *est égal à la somme des ordres des quantités* $f(x, y)$ *quand le point* (x, y) *est placé successivement sur les diverses branches de l'autre courbe, à distance infiniment petite du premier ordre du point* O.

Ces propositions rappelées, j'entre en matière. J'emploie la notation $[n]$ pour désigner abréviativement un polynome homogène de degré n en x, y ne s'évanouissant pas avec x. Je suppose, comme l'a fait M. Painvin, une courbe ayant, à l'origine des coordonnées, des branches tangentes à l'axe des y, et ordonnant son équation, je l'écris

$$(1)\quad 0 = f(x, y) = x^{m_0}[p - m_0] + x^{m_1}[p - m_1 + a_1] + x^{m_2}[p - m_2 + a_2] + \ldots + x^{m_i}[p - m_i + a_i] + \ldots,$$

où les nombres entiers $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots$, dont le premier est au moins égal à l'unité, croissent avec leurs indices. L'entier p marque la multiplicité de l'origine sur la courbe (1). Parmi les entiers m_0, m_1, ..., m_i, ..., un au moins est nul, sans quoi $f(x, y)$ serait divisible par une puissance de x. On voit que la forme de l'équation (1) est un peu plus générale que celle adoptée par M. Painvin ; on obtiendra cette dernière en supposant $a_i = i$.

Je suppose que y soit infiniment petit du premier ordre, et qu'on mette dans $f(x, y)$, au lieu de x, un infiniment petit d'ordre supérieur $1 + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$). L'expression $x^{m_i}[p - m_i + a_i]$ est infinininiment petite d'ordre $p + a_i + \varepsilon m_i$. Donc l'ordre de $f(x, y)$ est le minimum de cette dernière expression, quand on y fait varier l'indice i. La seule exception à cette règle a lieu si l'infiniment petit, qu'on substitue à x, a pour partie principale celle d'une racine de l'équation (1). L'ordre de $f(x, y)$ s'élèverait dans ce cas.

Je considère maintenant une seconde courbe se composant, au point O, de ρ branches ayant avec l'axe des y des contacts d'ordre ε.

D'après ce que je viens de dire, et conformément au théorème II, le nombre des intersections des deux courbes, réunies au point O, est égal à ρ fois le minimum de $p + a_i + \varepsilon m_i$. Comme ρp est le produit des multiplicités du point O sur les deux courbes, je vois que *l'ordre total du contact des deux courbes est le minimum de* $\rho(a_i + \varepsilon m_i)$, sauf toutefois le cas d'exception signalé plus haut.

Soit, comme exemple,

$$(2) \qquad 0 = x^{\mu}[\pi - \mu] + [\pi + \alpha] + \ldots$$

l'équation de la seconde courbe, ordonnée comme $f(x, y)$. On voit aisément que, parmi les π branches de courbe qui passent en O, il en est μ dont Oy est la tangente, et que l'ordre commun de leur contact avec Oy est $\frac{\alpha}{\mu}$. Si, d'ailleurs, je laisse aux polynomes qui figurent dans (1) et (2) toute leur généralité, le cas d'exception n'a pas lieu. Donc, en appliquant le résultat précédent, et faisant $\rho = \mu$, $\varepsilon = \frac{\alpha}{\mu}$, j'ai cette conclusion :

L'ordre total du contact des courbes (1) *et* (2) *au point* O *est le minimum de* $\mu a_i + \alpha m_i$.

En supposant $\alpha = 1$, et $a_i = i$, on obtient l'élégante solution que M. Painvin a donnée pour ce cas particulier du problème, et à laquelle j'ai fait précédemment allusion.

Si la seconde courbe au lieu de contenir en O un seul groupe de branches ayant des contacts du même ordre avec Oy, contient plusieurs groupes analogues, ce n'est plus le minimum de $\rho(a_i + \varepsilon m_i)$ qu'on devra chercher, mais bien le minimum de $\rho(a_i + \varepsilon m_i) + \rho'(a_j + \varepsilon' m_j) + \ldots$, en supposant toujours, bien entendu, mis de côté le cas d'exception dont j'ai parlé, et sur lequel je reviendrai dans la dernière partie de ce travail. Ce qu'on doit chercher, c'est d'exprimer ce minimum au moyen des nombres qui interviennent dans l'équation de la seconde courbe, et qui sont analogues à m_i, a_i. J'y parviendrai, comme on va le voir, assez rapidement, en faisant usage du *parallélogramme de Newton*, dont je modifie très légèrement la définition pour l'approprier à mon objet actuel.

3. Je reprends l'équation (1), et je marque, sur un plan, des points P_0, P_1, ..., P_i, ..., dont les coordonnées, par rapport à des

axes rectangulaires, soient

$$\begin{array}{ll} X_0 = m_0, & Y_0 = 0, \\ X_1 = m_1, & Y_1 = a_1, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, \\ X_i = m_i, & Y_i = a_i, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots \end{array}$$

Comme il a été dit plus haut, si l'on fait y infiniment petit du premier ordre, et x infiniment petit d'ordre $1+\varepsilon$, l'ordre de $f(x,y)$ surpasse p de la plus petite des quantités $a_i+\varepsilon m_i$. Je figure ces quantités en traçant une droite D passant par l'origine des coordonnées et faisant avec la direction négative de l'axe des x l'angle ω dont la tangente est ε. J'ai ainsi

$$a_i+\varepsilon m_i = Y_i + \operatorname{tang}\omega . X_i = \frac{\delta_i}{\cos\omega},$$

δ_i étant la distance du point P_i à la droite D.

Ainsi le groupe de termes d'ordre le moindre dans $f(x,y)$ correspond au point P_i dont la distance à D est minima. On remarquera d'ailleurs que, dans un tel groupe, un seul terme est de l'ordre $p+a_i+\varepsilon m_i$; c'est celui qui contient y à la puissance $p-m_i+a_i$. Par conséquent, le cas d'exception dans lequel la partie principale de x est celle d'une racine de (1), et où les termes d'ordre minimum disparaissent, ne peut se produire que si deux points au moins, tels que P_i, sont à la distance minima de D. De là cette conclusion facile que, si une droite contient plusieurs points P et sépare l'origine de tous les autres, et si les points extrêmes qu'elle contient sont P_i et P_{i+j}, l'équation (1) admet m_i-m_{i+j} racines x infiniment petites d'ordre $1+\eta$, η étant la tangente de l'angle que fait, avec la direction négative de l'axe des x, la droite considérée. Par suite, on n'aura qu'à tracer un polygone, tournant sa convexité vers l'origine, ayant pour sommets des points P_i et séparant l'origine de tous les autres, pour obtenir la figuration des diverses quantités telles que η, et du nombre des racines x auxquelles elles se rapportent.

Tout ceci est trop semblable à la célèbre règle du *parallélogramme de Newton*, pour qu'il soit utile d'entrer dans plus de détails.

Pour abréger, je désignerai le polygone dont je viens de parler, et relatif à $f(x, y)$ par ce mot : *le polygone* (f).

Soit maintenant une seconde courbe dont l'équation est

$$(3) \qquad 0 = \varphi(x, y) = x^{\mu_0}[\pi - \mu_0] + x^{\mu_1}[\pi - \mu_1 + \alpha_1] + \ldots + x^{\mu_j}[\pi - \mu_j + \alpha_j] + \ldots,$$

ordonnée comme $f(x, y)$; en sorte que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_j, \ldots$, sont des entiers croissants, dont le premier est au moins égal à l'unité.

Nous nous proposons de chercher l'ordre total du contact de cette courbe avec la courbe (1) au point O.

Nous figurons φ, comme f, par des points Π_j, et nous considérons encore un polygone (φ), défini comme le précédent.

Nous supposerons en plus, pour le moment, et cette hypothèse disparaîtra plus loin, que le polygone (φ) sépare l'origine de tous les points P, en sorte que le polygone (f) est entièrement à droite de (φ).

Je suppose que l'équation (3) admette un groupe de ρ racines x infiniment petites d'ordre $1+\varepsilon$, pour y infiniment petit du premier ordre. En appliquant à φ ce qui a été dit pour f, je vois que ε est la tangente de l'angle ω que fait avec la direction négative de l'axe des x un certain côté Λ du polygone (φ), et que ρ est la projection de ce côté sur l'axe des x. Par suite, $\frac{\rho}{\cos\omega}$ est la longueur λ de ce côté. D'ailleurs, si D est la parallèle menée par O à Λ, et δ_i la distance de P_i à D, nous avons trouvé

$$a_i + \varepsilon m_i = \frac{\delta_i}{\cos\omega}.$$

Donc

$$\rho(a_i + \varepsilon m_i) = \frac{\rho\delta_i}{\cos\omega} = \lambda\delta_i.$$

Comme, par hypothèse, O et P_i sont de part et d'autre de Λ, la quantité $\lambda\delta_i$ est le double de la somme des aires des triangles ayant le côté Λ pour base, et pour sommets les points O et P_i. Le premier de ces triangles ne dépend pas du point P_i. Quant au second, on voit aisément qu'on le rendra minimum en prenant pour P_i un sommet du polygone (f), tellement choisi que les directions des côtés qui y aboutissent comprennent entre elles celle de Λ.

J'ai à considérer ensuite d'autres groupes de racines de φ. Soit ρ' le nombre des racines d'un de ces groupes, et soit aussi $1+\varepsilon'$ leur ordre. Il y correspond un autre côté Λ' du polygone (φ).

La quantité $\rho'(a_i + \varepsilon' m_i)$ est représentée par le double de l'aire du

triangle de sommet O et de base A′, augmenté du double de l'aire du triangle de sommet P_i et de même base, et ainsi de suite.

J'ai d'ailleurs à chercher le minimum de

$$\rho(a_i + \varepsilon m_i) + \rho'(a_j + \varepsilon' m_j) + \ldots,$$

pour obtenir l'ordre total du contact des courbes (1) et (3). Ce nombre est donc égal au double de l'aire comprise entre les axes et le polygone (φ), augmenté du double de la somme des aires minima des triangles construits sur les côtés successifs de ce polygone et ayant pour sommets des points P.

Rien n'est plus aisé que de trouver la règle pour former ce minimum. Je ne m'y arrête pas ici. Je remarque seulement que les divers triangles de sommets P_i, P_j, ..., dans la figure qui fournit l'aire minima, n'empiètent pas les uns sur les autres, en sorte qu'on peut dire que : *La moitié de l'ordre total du contact de* (1) *et* (3) *est égale à l'aire comprise entre les axes et une ligne polygonale aboutissant à ces axes, et ayant alternativement pour sommets des points* P *et des sommets de* (φ), *de manière que cette aire soit minima.*

J'ai supposé que le polygone (φ) séparait l'origine de tous les points P. Je suppose qu'en outre tous les points Π soient compris entre le polygone (φ) et le polygone (f). Dans cette hypothèse, on peut modifier le dernier énoncé et dire que :

La moitié de l'ordre du contact de (1) *et* (3) *est égale au minimum de l'aire comprise entre les axes et une ligne polygonale aboutissant à ces axes et ayant pour sommets alternativement un point* Π *et un point* P.

Pour traduire ce résultat en une formule algébrique sans qu'il y ait aucune ambiguïté, je vais supprimer *a priori* un certain nombre de termes dans les équations proposées. A cet effet, j'observe qu'un point Π_i ne peut faire partie du polygone (φ), si l'exposant correspondant μ_i n'est pas inférieur à tous les nombres μ d'indices moindres. Comme je sais d'ailleurs que ce sont les sommets du polygone qui doivent intervenir seuls pour la solution, je peux supprimer un tel point. Il en est de même pour les points P. En d'autres termes, je puis supposer que, dans les équations (1) et (3), les nombres m_0, m_1, ... et μ_0, μ_1, ... vont en décroissant quand leurs indices croissent.

Soit alors $k+1$ le rang du dernier groupe de termes subsistant

dans $\varphi(x,y)$. Je peux supposer $\mu_k = 0$, c'est-à-dire $\varphi(x,y)$ non divisible par x. Parmi les points Π, il en est un sur l'axe des x, c'est Π_0; et un sur l'axe des y, c'est Π_k. Je peux, dans tous les cas, supposer que la ligne polygonale, limite de l'aire considérée, part de Π_0 et aboutit à Π_k.

Une quelconque de ces lignes polygonales peut être définie comme il suit. Parmi les points $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{k-1}$, j'en choisis quelques-uns. Soit r leur nombre. Leurs indices seront r nombres, compris entre 1 et $k-1$ inclusivement. Je les désigne, dans l'ordre croissant, par $(1), (2), \ldots, (r)$. Parmi tous les points P, j'en choisis de même $r+1$. Leurs indices seront $r+1$ nombres compris entre zéro et l'indice supérieur des points P inclusivement. Je les désigne, dans l'ordre croissant, par $[1], [2], \ldots, [r+1]$. En mettant simplement l'indice pour représenter chaque point, j'ai ainsi une ligne polygonale

$$0[1](1)[2](2)\ldots(r)[r+1]k.$$

C'est cette ligne qu'on doit faire varier, tant en changeant ses sommets, sauf les extrêmes, qu'en modifiant le nombre de ces sommets, de manière à rendre minima l'aire comprise entre cette ligne et les deux axes.

Je considère la portion de cette aire comprise dans le quadrilatère formé par l'origine et les points (i), $[i+1]$ et $(i+1)$. Son double a pour expression

$$S_i = a_{[i+1]}(\mu_{(i)} - \mu_{(i+1)}) + m_{[i+1]}(\alpha_{(i+1)} - \alpha_{(i)}).$$

Le double de l'aire totale est

$$S = S_0 + S_1 + \ldots + S_r.$$

Pour exprimer ce résultat d'une manière plus simple, je donne une désignation uniforme aux coordonnées des sommets successifs de cette ligne polygonale.

J'appelle A_j, M_j les coordonnées du sommet de rang $j+1$. Le sommet (i) occupe le rang $2i+1$, et le sommet $[i]$ le rang $2i$. J'ai donc

$$\begin{array}{ll}
A_0 = 0, & M_0 = \mu_0, \\
A_1 = a_{[1]}, & M_1 = m_{[1]}, \\
\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\
A_{2i-1} = a_{[i]}, & M_{2i-1} = m_{[i]}, \\
A_{2i} = \alpha_{(i)}, & M_{2i} = \mu_{(i)}, \\
\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\
A_{2r+2} = \alpha_{(k)}, & M_{2r+2} = 0.
\end{array}$$

Soit

$$A_{j+1}M_j - M_{j+1}A_j = \Sigma_j;$$

j'ai

$$S_i = \Sigma_{2i} + \Sigma_{2i+1}.$$

Par suite

$$S = \Sigma_0 + \Sigma_1 + \ldots + \Sigma_{2r+1}.$$

Telle est l'expression dont le minimum fournira le nombre qu'on cherche. Il ne faut pas perdre de vue que cette formule n'est établie que dans l'hypothèse où tous les points Π sont compris entre les polygones (φ) et (f). Je vais maintenant montrer que cette restriction peut être écartée, et que mon dernier résultat en est affranchi.

On assure la réalisation de l'hypothèse que je viens de rappeler, en donnant à la figure formée par les points P une translation suivant la direction positive de l'axe des x. Ceci revient à multiplier $f(x, y)$ par une puissance de x. Il est vrai que, de la sorte, aucun des points P ne se trouve plus sur l'axe des y. Mais on peut remarquer que, dans ce qui précède, on n'a pas supposé qu'il y en eût. Les conclusions ne sont donc pas troublées. Mais on a fait subir au nombre cherché une augmentation dont il faut actuellement tenir compte.

En multipliant $f(x, y)$ par x^λ, j'augmente l'ordre total du contact des deux courbes f et φ, d'un nombre égal à celui de φ avec l'axe des y, répété λ fois. Cette augmentation est donc $\lambda\alpha_k$. Pour obtenir l'ordre total du contact de f et φ, j'ai donc : 1° à augmenter chaque nombre m dans l'expression S, de la quantité fixe λ; 2° à retrancher $\lambda\alpha_k$. Or la première opération conduit à augmenter chaque nombre S_i de $\lambda(\alpha_{(i+1)} - \alpha_{(i)})$. Par suite, S, qui est la somme des nombres S_i, se trouve augmenté de $\lambda\alpha_k$, c'est-à-dire précisément du nombre qu'il faut retrancher ensuite. Donc, ainsi que je l'ai annoncé, les résultats ci-dessus sont affranchis de l'hypothèse qui a servi à les établir.

La généralité de ces résultats étant reconnue, on peut maintenant supposer que $f(x, y)$, ainsi que $\varphi(x, y)$, ne contient pas le facteur x. Ceci permet de prendre les couples extrêmes de nombres A, M, dans l'une ou l'autre des équations, pour former les diverses valeurs de S, entre lesquelles on aura à choisir la plus petite.

Pour énoncer sous forme de théorème les résultats obtenus, de telle sorte qu'ils soient applicables à tous les cas, je donnerai au nombre ainsi calculé le nom de *premier surcroît d'intersection* des branches

des deux courbes, tangentes à l'axe des y. J'ai supposé jusqu'ici que, si deux branches des deux courbes ont avec la tangente commune, à l'origine des coordonnées, un contact du même ordre, elles ont aussi entre elles un contact de ce même ordre. Dans cette hypothèse, le premier surcroît d'intersection n'est autre chose que l'ordre total du contact cherché. Quand cette hypothèse n'a plus lieu, il n'en est plus de même. Ainsi que je l'ai annoncé, je traiterai plus loin ce cas, et j'aurai encore à y faire usage du nombre calculé comme il vient d'être dit. C'est en vue de cet usage que j'adopte ici, pour ce nombre, une dénomination particulière. Cette définition posée, voici le théorème :

Théorème III. — *Soient deux courbes représentées par les équations entières*

$$0 = x^{m_0}[p - m_0] + x^{m_1}[p - m_1 + a_1] + \ldots + x^{m_i}[p - m_i + a_i] + \ldots,$$
$$0 = x^{\mu_0}[\pi - \mu_0] + x^{\mu_1}[\pi - \mu_1 + \alpha_1] + \ldots + x^{\mu_i}[\pi - \mu_i + \alpha_i] + \ldots,$$

dans lesquelles $[n]$ *représente un polynome homogène en* x *et* y, *de degré* n, *non divisible par* x, *où les entiers* a *croissent avec leurs indices, le premier étant au moins égal à l'unité, et où il en est de même des entiers* α. *On fera abstraction de tous les termes de la première équation, dans lesquels l'exposant* m *n'est pas inférieur à tous ceux qui le précèdent ; et de même dans la seconde équation, à l'égard des exposants* μ. *Parmi les termes qui subsistent, on prendra le premier terme de l'une des équations, puis un quelconque de rang* t *dans l'autre, puis un quelconque de rang* t' *dans la première, puis un quelconque de rang supérieur à* t *dans la seconde, un terme de rang supérieur à* t' *dans la première, et ainsi de suite en alternant, sans jamais rétrograder dans une même équation, et en terminant par le dernier terme de l'une des deux équations. Soient* M_i, A_i *les deux nombres* m, a, *ou* μ, α, *caractérisant le terme auquel on a ainsi assigné le rang* $i+1$. *On formera la somme des expressions*

$$A_{i+1}M_i - A_iM_{i+1}.$$

Le minimum de cette somme est le premier surcroît d'intersection des branches des deux courbes tangentes à l'axe des y, *à l'origine des coordonnées.*

D'après les raisonnements employés ci-dessus, il est très aisé de démontrer la proposition suivante que je me borne à énoncer :

Théorème IV. — *Si l'on a soin de rejeter les combinaisons dans lesquelles quelques éléments*

$$A_{i+1} M_i - A_i M_{i+1}$$

de la somme ci-dessus seraient nuls, et que, dans ces conditions, le minimum de cette somme s'obtienne d'une seule manière, ce minimum n'est autre que l'ordre total du contact des branches des courbes tangentes à l'axe des y, à l'origine des coordonnées.

Il importe de remarquer que la réciproque de cette proposition ne serait pas exacte.

Pour l'application du théorème III, on peut manifestement prendre les termes extrêmes à volonté dans l'une ou l'autre des équations et s'abstenir de les faire varier. Supposons, par exemple, qu'on ait $\mu_1 = 0$, la seconde équation, bornée aux termes convenables, ainsi qu'il est dit dans l'énoncé du théorème, se réduit à deux termes

$$0 = x^{\mu_0}[\pi - \mu_0] + [\pi + \alpha_1].$$

Je prends ces deux termes pour extrêmes. Je n'y peux intercaler qu'un seul terme de la première équation. J'ai donc

$$M_0 = \mu_0, \qquad M_1 = m_i, \qquad M_2 = 0,$$
$$A_0 = 0, \qquad A_1 = a_i, \qquad A_2 = \alpha_1.$$

La somme à considérer se réduit à

$$\mu_0 a_i + \alpha_1 m_i,$$

dont le minimum fournit le premier surcroît cherché. On voit donc que le théorème III contient le résultat particulier déjà trouvé précédemment.

4. Pour former le minimum qui, suivant le théorème III, fournit le surcroît cherché, on peut former toutes les combinaisons différentes des termes des deux équations. On peut y parvenir aussi d'une manière généralement plus rapide en suivant une règle que je vais énoncer. Cette règle n'est autre chose que la traduction algébrique

du procédé géométrique le plus simple pour former le minimum de l'aire qui a été considérée ci-dessus. Voici cette règle :

Règle. — *Dans la première des équations du théorème III, considérons les nombres* $\frac{a_n}{m_0 - m_i}$. *Soient* L *le plus petit d'entre eux et* n *le plus grand indice pour lequel on ait* $\frac{a_n}{m_0 - m_i} = \mathrm{L}$. *Considérons ensuite les nombres* $\frac{a_i - a_n}{m_n - m_i}$, *pour les valeurs de* i *supérieures à* n, *et soit* n' *le plus grand indice* i *qui donne à ce nombre sa valeur minima* L'. *Considérons ensuite les nombres* $\frac{a_i - a_{n'}}{m_{n'} - m_i}$ *pour les valeurs de* i *supérieures à* n', *et soit* L'' *le plus petit d'entre eux, et ainsi de suite. Nous formons ainsi des nombres* L, L', L'', ..., *qui vont en croissant.*

Relativement à la seconde des équations du théorème III, nous formons, de la même manière, des nombres Λ, Λ', Λ'', ...

Rangeons tous les nombres L *et* Λ *par ordre de grandeur en commençant par le plus petit. Nous formons ainsi une suite de groupes alternativement composés, les uns de nombres* L, *les autres de nombres* Λ. *Considérons le premier nombre de chacun de ces groupes sauf le premier, et prenons, parmi les deux couples de nombres* m, a *ou* μ, α, *qui figurent dans son expression, celui dont l'indice est le plus petit. Nous avons ainsi une série de couples de nombres* $(\mathrm{M}_0, \mathrm{A}_0)$, $(\mathrm{M}_1, \mathrm{A}_1)$, ... *Joignons-y le couple, d'indice le plus grand, qui figure dans le dernier nombre de l'avant-dernier groupe.*

Ces couples de nombres (M, A) *sont, dans l'ordre même où nous les rencontrons, ceux qui fournissent le minimum mentionné au théorème III.*

Chaque nombre tel que L est la tangente de l'inclinaison d'un côté du polygone (f) sur l'axe des x ; en d'autres termes, $1 + \mathrm{L}$ est l'ordre d'infiniment petit auquel appartient un groupe de racines x de la première équation, y étant supposé du premier ordre.

Le dénominateur de L est égal au nombre de ces racines. Donc un nombre Λ ne peut être égal à un nombre L, que si les deux équations considérées admettent des racines x infiniment petites du même ordre. Ce n'est aussi que dans ce dernier cas que l'ordre total du

contact peut surpasser le premier surcroît. On peut donc ajouter à la règle précédente cette remarque, qui s'accorde avec le théorème IV :

Si aucun des nombres Λ *n'est égal à un des nombres* L, *le premier surcroît d'intersection des branches des deux courbes tangentes à l'axe des* y, *à l'origine des coordonnées, est égal à l'ordre total de leur contact.*

A peine est-il besoin de faire observer que :

Si, au contraire, deux nombres L, Λ *sont égaux, on peut, pour l'application de la règle ci-dessus, en intervertir l'ordre, sans troubler le résultat.*

L'application de la règle que je viens de donner est simple et rapide. J'en donnerai un exemple :

Exemple. — Désignant par n un entier positif, je pose

$$m_i = (n-i)^2, \qquad a_i = i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

$$\mu_j = \frac{(2n-j)(2n-j+1)}{2}, \qquad \alpha_j = j \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, 2n).$$

Il y a n nombres L, et l'on a

$$L_k = \frac{a_k - a_{k-1}}{m_{k-1} - m_k} = \frac{1}{2n-2k+1} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Il y a $2n$ nombres Λ, et l'on a

$$\Lambda_k = \frac{\alpha_k - \alpha_{k-1}}{\mu_{k-1} - \mu_k} = \frac{1}{2n-k+1} \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2n).$$

Dans cet exemple, se présente la particularité $L_k = \Lambda_{2k}$, dont il vient d'être question : il y a plusieurs manières de ranger les nombres L et Λ par ordre de grandeur. J'en choisis une

$$\Lambda_1 \Lambda_2 L_1 \Lambda_3 \Lambda_4 L_2 \ldots \Lambda_{2(i+1)} L_{i+1} \Lambda_{2i+3} \ldots \Lambda_{2n} L_n,$$

j'ai ainsi

$$\left.\begin{aligned} M_{2i} &= (n-i)^2, & A_{2i} &= i \\ M_{2i+1} &= (n-i-1)(2n-2i-1), & A_{2i+1} &= 2i+2 \end{aligned}\right\} \quad [i = 0, 1, 2, \ldots, (n-2)],$$

Le dernier couple sera

$$M_{2n-2} = 0, \qquad A_{2n-2} = 2n.$$

J'ai à former la quantité

$$S = \sum_{k=0}^{k=2n-3} (M_k A_{k+1} - A_k M_{k+1}),$$

que je puis écrire

$$S = A_1 M_0 + \sum_{k=1}^{k=2n-3} M_k (A_{k+1} - A_{k-1}).$$

En groupant les termes suivant la parité de l'indice de M, et à cause de

$$A_{2i+1} - A_{2i-1} = 2, \qquad A_1 = 2, \qquad A_{2i+2} - A_{2i} = 1,$$

je puis écrire

$$S = 3(n+2) + 2\sum_{i=0}^{i=n-2} (n-i)^2 + \sum_{i=0}^{i=n-3} (n-i-1)(2n-2i-1)$$
$$= \frac{n(4n^2+5)}{3} + \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Cette dernière valeur de S est le résultat demandé.

5. Je dois signaler ici un cas particulier, celui où les nombres (μ, α) coïncident avec les nombres (m, a). Les équations, dans lesquelles figurent ces nombres, donnent lieu au même polygone. Dans ce cas, le premier surcroît d'intersection est égal au double de l'aire comprise entre ce polygone et les axes. On voit bien aisément aussi que, pour appliquer ici le théorème III, on devra prendre simplement pour les couples successifs (M, A) des couples (m, a) dans l'ordre croissant des indices. Enfin, pour appliquer la règle du paragraphe précédent, on prendra pour les couples (m, a) donnant le minimum, tous ceux qui figurent dans les expressions des nombres L.

On voit ainsi comment les résultats généraux acquis jusqu'à présent s'appliquent au cas particulier considéré. J'en veux maintenant tirer une importante conséquence; à savoir le procédé pour calculer l'abaissement produit dans la classe d'une courbe par un point singulier.

Pour un instant encore, je raisonne sur les deux courbes f et φ, définies au théorème III, en supposant que les couples successifs de nombres μ, α soient respectivement égaux aux couples de nombres m, a.

A chaque branche B de f, tangente à l'axe des y, à l'origine des coordonnées, on peut, dans le cas actuel, faire correspondre une branche B' de φ, ayant avec la même droite, au même point, un contact du même ordre, et inversement. Du nombre S, qui est le premier surcroît d'intersection de toutes les branches B avec toutes les branches B', je retranche le nombre T, premier surcroît d'intersection des couples de branches correspondantes. De la sorte, si C, C' sont deux autres branches correspondantes, et si je désigne abréviativement par (BC') le premier surcroît d'intersection de B et de C', le nombre $S-T$ se compose d'une somme d'éléments tels que $(BC')+(CB')$.

Je rappelle que, par définition, le premier surcroît d'intersection de deux branches n'est autre chose que l'ordre de leur contact, si elles ont avec la tangente commune des contacts d'ordres différents ; si, au contraire, elles ont avec cette tangente des contacts du même ordre, c'est précisément cet ordre. D'après cela, il n'y a aucune difficulté à étendre cette définition à deux branches B, C d'une même courbe. Ceci étant convenu, j'ai, dans le cas actuel,

$$(BC')=(CB')=(BC).$$

Par suite, $S-T$ se compose du double de la somme des éléments tels que (BC). En d'autres termes, $S-T$ est le double du premier surcroît d'intersection de toutes les branches de f, tangentes à l'axe des y, à l'origine des coordonnées, prises deux à deux de toutes les manières. Dans des cas particuliers, ce premier surcroît est précisément égal à la somme des ordres des contacts de ces branches entre elles. Dans le cas général, c'est un élément de cette somme, dont l'usage apparaîtra dans le paragraphe suivant.

Or, d'après M. Cayley, si p est l'ordre de multiplicité d'un point singulier, ce point produit dans la classe un abaissement égal à $p(p-1)$, augmenté du double de la somme des ordres des contacts des branches qui y passent, prises deux à deux. On voit donc que $S-T$ est, dans le cas général, un premier élément du nombre qu'on doit ajouter à $p(p-1)$, pour obtenir l'abaissement de classe dû au point singulier.

Je l'appelle *premier surcroît d'abaissement de classe,* relatif aux branches considérées. Pour être en mesure de le calculer, il me suffit, connaissant S, de chercher l'expression de T.

Je considère, à cet effet, un côté du polygone (f), et soient B, C, ... les branches qui lui correspondent. Leur nombre est égal à la projection de ce côté sur l'axe des x, et l'ordre commun de leur contact avec la tangente est la tangente de l'inclinaison de ce côté sur l'axe des x. Par suite, la somme des ordres de leurs contacts avec la tangente est égale à la projection du même côté sur l'axe des y. Cette somme n'est pas autre chose que $(BB') + (CC') + \ldots$. Je considère successivement tous les côtés du polygone (f), et je conclus que T est égal à la projection de ce polygone sur l'axe des y, c'est-à-dire au dernier des nombres a. De là, en premier lieu, cet énoncé géométrique :

Théorème V. — *Étant donnée la courbe $f(x,y) = 0$, traçons le polygone (f), ainsi qu'il a été expliqué au paragraphe* 3; *joignons le point où ce polygone rencontre l'axe des y au point situé sur l'axe des x et ayant pour abscisse l'unité. L'aire comprise entre cette dernière droite, l'axe des x et le polygone, est égale à la moitié du premier surcroît d'abaissement de classe dû aux branches de la courbe tangentes à l'axe des y, à l'origine des coordonnées.*

On remarquera ici que : *Si aucun côté du polygone (f) ne contient plus de deux points représentatifs de $f(x,y)$, ce premier surcroît est égal au double de l'ordre total du contact des branches considérées entre elles.*

J'ai, en second lieu, sous une forme analogue à celle du théorème III :

Théorème VI. — *L'équation d'une courbe étant réduite comme il est dit au théorème III, et a_n étant le dernier des nombres a, on prendra une suite de couples m, a, dans l'ordre croissant des indices, en y comprenant les extrêmes. Soit* M_s, A_s *le couple m, a, qui occupe ainsi le rang $s+1$.*

Le premier surcroît d'abaissement de classe, relatif aux branches de la courbe tangentes à l'axe des y, à l'origine des coordonnées, est le minimum de l'expression

$$-a_n + \sum (A_{s+1} M_s - A_s M_{s+1}).$$

Semblablement au théorème IV, j'ai cette proposition :

Théorème VII.— *Si le minimum de cette somme s'obtient d'une seule manière, ce minimum est égal à l'ordre total du contact des branches considérées entre elles.*

J'ai enfin, pour former le minimum, une règle analogue à celle du paragraphe IV :

Règle. — *Pour former le minimum indiqué au théorème VI, on n'aura qu'à prendre pour les couples* M, A, *les couples de nombres* m, a, *qui figurent dans les expressions des nombres* L, *dont la formation est expliquée dans la règle du paragraphe* 4, *et en respectant leur ordre.*

J'applique cette dernière règle à l'exemple cité plus haut, à savoir

$$m_i = (n-i)^2, \qquad a_i = i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Je trouve, pour le surcroît cherché, $\frac{2}{3}n(n^2-1)$. Il est facile de voir que, dans cet exemple, le théorème VII a lieu. Ainsi le nombre indiqué est précisément égal à l'ordre total du contact des branches considérées entre elles, quelle que soit d'ailleurs la forme des polynomes qui entrent dans l'équation de la courbe.

6. Dans ce paragraphe, je vais m'occuper du cas le plus général de l'intersection de deux courbes en un point singulier, et montrer quel usage on peut faire alors des résultats obtenus précédemment. J'invoquerai quelques propositions contenues dans mon *Mémoire sur les points singuliers des courbes algébriques*, auquel je renvoie pour les démonstrations.

Soit $f(x,y) = 0$ l'équation d'une courbe, contenant des branches tangentes à l'axe des y, à l'origine des coordonnées. Ces branches se répartissent, comme on sait (*voir* le Mémoire cité), en un certain nombre de *systèmes circulaires*, correspondant aux systèmes circulaires formés par celles des racines x de l'équation, qui sont infiniment petites avec y. J'envisage un de ces systèmes circulaires D. Soit $uy^{1+\frac{s}{q}}$ la partie principale d'une racine appartenant à ce système, s et q étant des entiers positifs premiers entre eux. On sait que les parties principales de toutes les autres racines appartenant au système D, ont la même expression, qui est d'ailleurs susceptible de q valeurs.

On sait, en outre, qu'à chacune de ces q valeurs correspond un même nombre r de racines, dont le nombre total est ainsi rq. Je pose

$$(1) \qquad y_1 = y^{1+\frac{s}{q}}, \qquad x_1 = x - u y_1.$$

J'obtiens ainsi une transformée $f_1(x_1, y_1) = 0$ de l'équation primitive.

Dans cette transformée, le système circulaire D se change en un autre D_1, composé de $r(q+s)$ racines x_1 infiniment petites par rapport à y_1 (*ibid.*).

De même, tout autre système circulaire D' composé de $r'q$ racines x, ayant uy_1 pour partie principale, donne également lieu, dans la transformée, à un système circulaire D'_1, composé de $r'(q+s)$ racines x_1 infiniment petites par rapport à y_1. En d'autres termes, ces systèmes D, D' donnent lieu à des branches de la courbe transformée f_1, qui sont tangentes à l'axe des y_1, à l'origine des coordonnées.

Au contraire, tout système circulaire de racines x ayant une partie principale différente de uy_1, donne lieu, dans la transformée, à un système circulaire de racines x_1 qui appartiennent à un ordre d'infiniment petit ne surpassant pas celui de y_1. Si, en effet, x est de l'ordre de y_1, sans avoir pour partie principale uy_1, ou bien si x est d'ordre supérieur à celui de y_1, x_1 est du même ordre que y_1. Enfin, si x est d'un ordre inférieur à celui de y_1, il en est de même de x_1. Dans tous les cas, à cette racine x_1 correspond une branche n'ayant pas, à l'origine des coordonnées, l'axe des y_1 pour tangente.

Si maintenant je considère à part, dans la transformée, comme je l'ai fait précédemment pour la courbe primitive, les branches tangentes à l'axe des y, j'ai éliminé toutes celles qui correspondent aux racines x dont la partie principale diffère de uy_1.

Je considère, à présent, une seconde courbe $\varphi(x,y)=0$, contenant, comme la première, des branches tangentes à l'axe des y, à l'origine. Par les formules (1), j'en déduis une transformée φ_1. Si uy_1 n'est la partie principale d'aucune racine de φ, on voit que φ_1 n'a aucune branche tangente à l'axe des y_1, à l'origine. L'ordre du contact des branches de f_1 et de φ_1, tangentes à cet axe, est nul. Et dans ce cas aussi, l'ordre du contact des branches de f, correspondant aux racines x dont la partie principale est uy_1, avec les branches de φ, se borne au premier surcroît d'intersection de ces branches.

Si, au contraire, uy_1 est la partie principale d'une racine de φ, les choses changent. La transformée φ_1 a, comme f_1, des branches tangentes à l'axe des y_1, à l'origine des coordonnées. Dans ce cas aussi, l'ordre total du contact des branches des deux courbes f et φ, correspondant aux racines dont la partie principale est uy_1, surpasse leur premier surcroît d'intersection. Je vais prouver qu'*il le surpasse d'un nombre précisément égal à l'ordre total du contact des branches de* f_1 *et de* φ_1, *tangentes à l'axe des* y_1, *à l'origine*.

Soit Δ un système circulaire de racines x de φ, ayant uy_1 pour partie principale. Je considère une branche δ correspondant à une de ces racines, et une branche d du système circulaire D. Soit $\frac{s}{q}+\varepsilon\,(\varepsilon>0)$ l'ordre du contact de d et de δ. On sait (*ibid.*) que le nombre des couples, tels que d, δ, de branches des deux systèmes ayant entre elles un contact de ce même ordre est toujours un multiple de q. Par suite, la somme des ordres des contacts de toutes ces branches entre elles est un nombre tel que $t(s+q\varepsilon)$, t étant un nombre entier, et tq le nombre des couples d, δ envisagés.

Dans les transformées f_1 et φ_1, à deux branches, telles que d et δ, correspondent des racines x_1 dont la différence est de l'ordre $\left(1+\frac{s}{q}+\varepsilon\right)$ relativement à y, c'est-à-dire de l'ordre $\left(1+\frac{s}{q}+\varepsilon\right)\frac{q}{s+q}$ relativement à y_1. C'est-à-dire qu'à deux branches telles que d et δ correspondent, dans les transformées, des branches d_1 et δ_1, dont l'ordre du contact est

$$\left(1+\frac{s}{q}+\varepsilon\right)\frac{q}{s+q}-1=\frac{q\varepsilon}{s+q}.$$

Les couples d, δ et les couples d_1 et δ_1 ne se correspondent pas un à un. Mais au groupe de tq couples d, δ, correspond un groupe de couples d_1, δ_1 ; et le nombre de ces derniers est $t(s+q)$ (*ibid.*). Donc, la somme des ordres des contacts des branches composant ces derniers couples est égale à $tq\varepsilon$. Ce dernier nombre est précisément égal à celui dont la somme des ordres des contacts des branches d, δ de chaque couple surpasse leur premier surcroît d'intersection.

On répétera le même raisonnement en considérant successivement toutes les combinaisons des branches d'une courbe avec les branches de l'autre. On obtiendra ainsi la démonstration de la proposition énoncée, et comme conclusion :

Théorème VIII. — *Si* $uy^{1+\zeta}(\zeta > 0)$ *est la partie principale à la fois d'une racine infiniment petite* x *de chacune des deux équations* $f(x,y) = 0$, $\varphi(x,y) = 0$, *formons deux tranformées* $f_1(x_1, y_1) = 0$, $\varphi_1(x_1, y_1) = 0$, *en posant* $y_1 = y^{1+\zeta}$, $x_1 = x - uy_1$. *Formons de même toutes les transformées analogues et relatives aux autres quantités différentes entre elles* $u'^{1+\zeta'}(\zeta' > 0), \ldots$, *analogues à la première, et soient* $f_2 = 0$, $\varphi_2 = 0$; $f_3 = 0$, $\varphi_3 = 0$; *etc., ces divers couples de transformées.*

L'ordre total du contact des branches des courbes f *et* φ, *tangentes à l'axe des* y, *à l'origine des coordonnées, est égal à la somme des nombres analogues et relatifs aux divers couples de courbes* f_1 *et* φ_1, f_2 *et* φ_2, f_3 *et* φ_3, ..., *augmentée du premier surcroît d'intersection des branches considérées des deux courbes* f *et* φ.

Il résulte de ce théorème que l'application du théorème III, faite successivement aux équations proposées et à un certain nombre de transformées, conduira toujours au calcul précis de l'ordre total du contact cherché.

On aperçoit immédiatement comment le théorème VIII s'applique au calcul de l'abaissement de classe dû à un point singulier; cette application peut s'énoncer ainsi :

Théorème IX. — *Les notations restant les mêmes qu'au théorème VIII, si une même valeur de* $uy^{1+\zeta}$ *est la partie principale de plus d'une racine de* $f(x,y) = 0$, *et de même pour* $u'y^{1+\zeta'}, \ldots$, *le double de l'ordre total du contact des branches de* f, *tangentes à l'axe des* y, *à l'origine des coordonnées, entre elles, est égal à la somme des nombres analogues pour les diverses tranformées* f_1, f_2, ..., *augmentée du premier surcroît d'abaissement de classe, dû aux branches considérées de* f.

Par suite, *l'application des théorèmes V ou VI, faite successivement à* $f(x,y)$ *et à des transformées, conduira toujours au calcul précis de l'ordre total du contact des branches considérées dans la courbe* f, *entre elles.*

En répétant les mêmes calculs relativement à chaque tangente d'une courbe donnée, en un point singulier, multiple d'ordre p, *et ajoutant à* $p(p-1)$ *la somme de tous les premiers surcroîts*

calculés, on obtiendra l'abaissement produit par le point singulier dans la classe de la courbe.

Je dois faire remarquer que la considération des transformées ci-dessus revient complètement à celle des développements relatifs aux branches partielles employés par M. de la Gournerie. On observera, en outre, que ces considérations présentent de grandes analogies, qu'on pourrait rendre complètes, avec un ordre de recherches bien différent en apparence. Je veux parler des recherches relatives à la simplification des points singuliers dans les transformées d'une courbe. Les résultats que j'ai obtenus dans un Mémoire déjà cité ici, relativement aux développées successives des courbes algébriques se rattachent à ce sujet. Il en est de même de la méthode que j'ai employée dans une Note sur les fonctions abéliennes (*Comptes rendus*, t. 78, p. 1833) (¹); j'ai d'ailleurs été de beaucoup prévenu dans cette voie par M. Nöther (*Gött. Nachr.*, 1871).

(¹) *Œuvres d'Halphen*, t. I, p. 312.

SUR CERTAINES PERSPECTIVES GAUCHES

DES

COURBES PLANES ALGÉBRIQUES.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 80, 1875, p. 638.

On doit à M. Nöther la proposition suivante, qui est d'une grande importance dans les théories se rattachant aux fonctions abéliennes : *A toute courbe plane algébrique on peut faire correspondre* point par point *d'autres courbes qui ne possèdent que des singularités ordinaires* (*Gött, Nachr.*, 1871).

Voici une proposition nouvelle qui comprend la précédente :

Théorème. — *Toute courbe plane algébrique est la perspective d'une courbe gauche n'ayant qu'un point singulier, et telle qu'en ce point toutes les branches aient des tangentes distinctes.*

Je démontre ce théorème en formant les équations de la courbe gauche, comme je vais l'expliquer.

Soient a, b les coordonnées d'un point singulier de la courbe représentée par l'équation $T(x, y) = 0$. Pour une valeur de x infiniment voisine de a, cette équation admet plusieurs racines y infiniment voisines de b. Ces racines forment, en général, plusieurs systèmes circulaires. Soit n le nombre des racines comprises dans l'un deux. Si je pose $x - a = \xi^n$, ces n racines constituent une seule et même fonction uniforme de ξ, qui se représente par une série $\mathfrak{F}(\xi)$ procédant suivant les puissances entières et positives de ξ. Je prends, dans $\mathfrak{F}$, l'ensemble de ses premiers termes, en nombre, pour le moment indéterminé, et je désigne le polynome ainsi formé par $f(\xi)$. Je désigne par $F(\xi)$ le reste de la série; en sorte que le système

circulaire considéré est représenté par

$$(1) \qquad x = a + \xi^n, \qquad y = \mathfrak{F}(\xi) = f(\xi) + F(\xi).$$

Soient maintenant ω une racine primitive $n^{\text{ième}}$ de l'unité et $\varphi(\xi)$ un polynome entier. Je définis une fonction u par l'équation

$$(2) \qquad u = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{\varphi\left[\omega^s (x-a)^{\frac{1}{n}}\right]}{y - f\left[\omega^s (x-a)^{\frac{1}{n}}\right]}.$$

Cette fonction u est, comme on le voit, rationnelle en x et y.

Soit maintenant un second système circulaire relatif, soit au même point singulier que le précédent, soit à un autre. Je le représente par des équations analogues à (1), savoir :

$$(3) \qquad x = a_1 + \xi^n, \qquad y = \mathfrak{F}_1(\xi) = f_1(\xi) + F_1(\xi).$$

Au moyen d'un nouveau polynome entier φ_1, je définis, par une équation analogue à (2), une nouvelle fonction rationnelle u_1, relative au système circulaire (3). Je fais la même opération pour chaque système circulaire. J'ai ainsi introduit, pour chacun d'eux, un polynome entier φ_i, et défini une fonction rationnelle u_i. Je considère maintenant la somme

$$U = u + u_1 + u_2 + \ldots.$$

La fonction rationnelle U jouit de la propriété suivante, que j'énonce seulement, et dont la démonstration est facile :

LEMME. — *En substituant, dans* U, *à* x *et* y *successivement les systèmes de valeurs* (1), (3), ..., *on obtient des fonctions uniformes de* ξ : *les développements de ces fonctions suivant les puissances croissantes de* ξ *coïncideront respectivement avec ceux de* $\frac{\varphi(\xi)}{F(\xi)}, \frac{\varphi^1(\xi)}{F^1(\xi)}, \ldots,$ *jusqu'à un terme de rang aussi élevé qu'on voudra, sous la condition qu'on ait pris, dans chaque série* $\mathfrak{F}_i$, *pour composer chaque polynome* f_i, *un nombre de termes assez grand, mais toujours fini.*

Pour l'objet actuel, il suffira de faire coïncider respectivement les deux premiers termes de chaque couple de développements correspondants.

Soit maintenant V une autre fonction rationnelle, exactement définie comme U, mais au moyen de polynomes ψ_i, différents des

polynomes φ_i. De plus, le degré de chaque polynome ψ_i devra surpasser de n_i unités celui du polynome correspondant φ_i. Cela étant, je dis que : *si la courbe* $\mathrm{T}(x,y)=0$ *n'offre aucune particularité à l'infini, la courbe gauche* $\mathrm{T}(x,y)=0$, $z=\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{U}}$ *n'a qu'un point singulier, que ce point est à l'infini sur l'axe des* z, *et que chacune des branches qui passent en ce point a une asymptote distincte.*

En effet : 1° aux valeurs infinies de x, y répondent des branches infinies de la courbe gauche ; en raison des degrés respectifs de ψ_i et φ_i, ces branches répondent à des points simples et ont des asymptotes à distance finie ; 2° les valeurs finies de x, y qui rendent V infini rendent en même temps infinie la fonction U, et l'on voit aisément qu'elles laissent à z des valeurs finies ; 3° à chaque système de valeurs finies de x et de y qui annulent U répond une branche infinie de la courbe gauche, avec une asymptote distincte parallèle à l'axe des z : ces branches se croisent au point singulier unique de la courbe gauche ; 4° à tous les autres points simples de la courbe plane répondent des points simples de la courbe gauche ; 5° aux points singuliers de la courbe plane répondent des points simples de la courbe gauche. Cette dernière propriété peut se démontrer comme il suit.

Dans l'expression de z, je substitue à x et y les valeurs (1). D'après le lemme, les deux premiers termes des développements de U et V sont respectivement les mêmes que dans les développements de $\frac{\varphi(\xi)}{\mathrm{F}(\xi)}$ et de $\frac{\psi(\xi)}{\mathrm{F}(\xi)}$. Donc les deux premiers termes du développement de z sont les mêmes que dans le développement de $\frac{\psi(\xi)}{\varphi(\xi)}$. En raison de l'indétermination des polynomes φ et ψ, le développement de z commence par $c+\alpha\xi$, c et α étant deux constantes entièrement arbitraires. Il me suffit que α ne soit pas nul pour conclure que ξ est une fonction uniforme de z, et que, par suite, les valeurs de x et y, infiniment voisines de a et b, qui satisfont aux équations (1), sont des fonctions uniformes de z. Donc au système circulaire (1) répond, sur la courbe gauche, un point simple dont la coordonnée z est égale à la constante arbitraire c. Je répète le même raisonnement pour les autres systèmes circulaires, et je vois qu'il me suffit de prendre toutes les constantes, telles que c, différentes entre elles, pour que la courbe gauche satisfasse à toutes les conditions énoncées.

Pour arriver maintenant au théorème énoncé au début de cette Note, je suppose que j'aie pris des coordonnées homogènes, et que x, y, z ne désignent plus des coordonnées, mais les rapports de trois des coordonnées homogènes à la quatrième. La courbe plane n'est plus soumise à aucune restriction. Quant à la courbe gauche, dont la courbe plane, au lieu d'être la projection, est maintenant la perspective, son point singulier unique est placé au point de vue. Elle satisfait aux conditions énoncées dans le théorème ci-dessus, qui se trouve ainsi démontré.

Voici maintenant une conséquence. Soient μ l'ordre de multiplicité du point singulier sur la courbe gauche, M son degré, m celui de la courbe plane. On a manifestement $M = m + \mu$. Nous pouvons facilement aussi trouver la classe de la courbe gauche. Remarquons que, si n est le nombre des branches de la courbe plane comprises dans un des systèmes circulaires, la courbe gauche, au point correspondant, a avec sa tangente un contact d'ordre $(n-1)$. Il en résulte aisément que, la classe de la courbe plane étant c et celle de la courbe gauche C, on a

$$C = c + 2\mu + \Sigma(n-1) = c + 2\mu + N - T,$$

N désignant la somme des ordres de multiplicité de tous les points singuliers de la courbe plane, et T le nombre total des systèmes circulaires formés par les branches de la courbe en ces points. L'élimination de μ conduit à la relation

$$C - 2M = c - 2m + N - T.$$

La perspective de la courbe gauche, faite d'un point de vue quelconque, est une courbe plane, de degré M et de classe C, n'ayant que des singularités ordinaires. Donc, si p est son *genre*, on a $C - 2M = 2(p-1)$. Or cette courbe et la primitive se correspondent point par point. Donc p est le genre de la courbe primitive, et l'on a

$$2(p-1) = c - 2m + N - T.$$

Je retrouve ainsi la formule qui donne immédiatement le genre de toute courbe plane algébrique, et que j'ai déjà démontrée par une méthode très différente, dans une précédente Communication (*Comptes rendus*, t. LXXVIII, p. 1833) [1].

[1] *Œuvres d'Halphen*, t. I, p. 312.

SUR LES CENTRES DE COURBURE GÉODÉSIQUE.

Bulletin de la Société mathématique, t. III, 1874-1875, p. 183.

M. Halphen communique le théorème suivant : *Étant données, sur une surface quelconque, plusieurs séries de courbes, telles que deux courbes quelconques de deux mêmes séries se coupent sous le même angle, les centres de courbure géodésique des courbes de toutes les séries, relatifs à un même point, sont en ligne droite.*

SUR LE GENRE DES COURBES ALGÉBRIQUES.

Association française pour l'avancement des Sciences,
Congrès de Nantes; 1875, p. 237.

1. C'est dans le Calcul intégral que la notion du *genre* des courbes algébriques a pris naissance. Elle s'y présente à trois points de vue différents : à propos du théorème d'Abel, du nombre des périodes des intégrales de première espèce, et enfin du nombre de ces intégrales elles-mêmes. Suivant l'ordre d'exposition, on tire la définition du genre d'une de ces trois considérations ; et, de l'un quelconque de ces trois points de vue, il est immédiatement visible que cet élément nouveau se conserve dans les transformations *uniformes*. En d'autres termes, le genre de deux courbes qui se correspondent *point par point* est le même.

Pour introduire dans la Géométrie cette notion nouvelle, il fallait connaître l'expression géométrique du genre. Cette question était résolue dans des cas particuliers, notamment dans celui où la courbe considérée n'offre que des singularités *ordinaires* (1). J'en ai donné la solution générale suivante, que j'ai démontrée de plusieurs manières différentes (2) :

Soient : p le genre, m le degré, c la classe d'une courbe algébrique, N *la somme des ordres de multiplicité de tous ses points singuliers, et* T *le nombre total des systèmes circulaires formés par les branches de la courbe en ces points. Ces éléments satisfont à la relation*

$$2(p-1) = c - 2m + \mathrm{N} - \mathrm{T}.$$

(1) Clebsch et Gordan, *Fonctions abéliennes.*

(2) *Comptes rendus*, t. LXXVIII et t. LXXX; *Journ. de Math.*, 1re série, t. XV; *Œuvres d'Halphen*, t. I, p. 312, 358, 420.

Étant en possession de l'expression géométrique du genre, et sachant, par le Calcul intégral, que ce nombre se conserve dans les transformations uniformes, on est conduit à désirer de ce théorème une démonstration indépendante du Calcul intégral. Pour le cas particulier déjà cité, où la courbe considérée n'offre que des singularités ordinaires, MM. Clebsch et Gordan et M. Zeuthen ont donné des démonstrations directes. On peut, comme je l'ai déjà montré, passer de là au cas général en employant diverses transformations uniformes, qui changent une courbe en une autre, n'offrant que des singularités ordinaires. Mais ces détours de raisonnement peuvent être évités : je me propose de donner ici une démonstration directe de la conservation du genre dans les transformations uniformes. C'est là l'objet principal de cette Note; j'y donnerai cependant quelques détails sur des sujets qui s'offriront au cours de cette étude, et qui ne sont pas nécessaires à la démonstration du théorème.

2. Je rappelle d'abord ce qu'il faut entendre par ce mot : *système circulaire de branches*. Soit O un point singulier d'une courbe plane algébrique S. Je le suppose pris pour origine des coordonnées rectilignes, et j'admets, en outre, que l'axe des y ne soit pas tangent à S en O. Soit k l'ordre de multiplicité de ce point. Pour une valeur infiniment petite de x, k valeurs de y sont infiniment petites. On sait (¹) que ces k valeurs se répartissent en systèmes circulaires; c'est-à-dire en des groupes tels que les n valeurs comprises dans l'un quelconque d'entre eux forment une seule et même fonction synectique de $x^{\frac{1}{n}}$. Sous la réserve faite plus haut au sujet de l'axe des y, cette répartition ne dépend pas des axes de coordonnées. Elle correspond donc à une répartition des branches de S, aux environs du point O, en groupes bien définis : ce sont ces groupes que j'appelle *systèmes circulaires de branches*. Le point O est *l'origine* et le nombre n est *l'ordre de multiplicité* du système circulaire. L'ordre de multiplicité peut être égal à l'unité. Dans ce dernier cas, M. Cayley emploie le mot de branche *linéaire*; dans le cas opposé, celui de branche *superlinéaire*.

Soit $f(t)$ une fonction synectique (pour les valeurs infiniment petites

---

(¹) V. Puiseux, *Mémoire sur les fonctions algébriques* (*Journ. de Math.*, 1re série, t. XV).

de t), ne s'évanouissant pas avec la variable. Je considère les équations

$$(1) \qquad x = t^n, \qquad y = t^r f(t),$$

où n et r sont des entiers positifs. La fonction y, de la variable x, a, pour chaque valeur de x, un nombre de valeurs égal à n ou à un diviseur de n. C'est d'ailleurs la forme la plus générale d'une fonction synectique de $x^{\frac{1}{n}}$, s'évanouissant avec x. Donc, sous les conditions que y ait précisément n valeurs, et que r ne soit pas inférieur à n (pour que l'axe des y ne soit pas une tangente), les équations (1) représentent, pour les valeurs infiniment petites de t, un système circulaire quelconque, multiple d'ordre n, et dont l'origine est celle des coordonnées.

Si y a moins de n valeurs, et sous la condition $r \geq n$, les équations (1) représentent un système circulaire de branches, dont l'ordre de multiplicité est égal au nombre des valeurs de y, c'est-à-dire à un diviseur de n.

J'observe encore qu'on peut supposer $r = n$, sans restreindre la généralité : c'est, en effet, supposer que l'axe des x ne coïncide pas avec la tangente du système circulaire.

Au lieu des équations (1), considérons celles-ci :

$$(2) \qquad x = t^n \varphi(t), \qquad y = t^n f(t),$$

n étant toujours un entier positif, et φ et f des fonctions synectiques ne s'évanouissant pas avec la variable. Il est aisé de voir que l'élimination de t entre les équations (2) conduit à

$$y = x\theta\left(x^{\frac{1}{n}}\right),$$

où θ est une fonction de même définition que f et φ. Le résultat est donc de même forme que celui qui provient de l'élimination de t entre les équations (1) en y supposant $r = n$. Donc, comme les équations (1), les équations (2) représentent, sans plus de généralité, un système circulaire de branches dont l'ordre de multiplicité est n ou un diviseur de n.

3. Ces explications données, je vais établir diverses propositions concernant les systèmes circulaires de deux courbes se correspondant point par point.

Théorème I. — *Soient* S *et* Σ *deux courbes planes algébriques*,

dont la seconde soit une transformée rationnelle de la première : à un système circulaire de branches de S *correspond un seul système circulaire de branches de* Σ.

Soit, en effet (S), un système circulaire de branches de S, ayant son origine à l'origine des coordonnées, et représenté par les équations (1). Les coordonnées ξ, η des points de Σ, étant des fonctions rationnelles de x et y, sont, pour les points qui correspondent à des points du système circulaire (S), des fonctions synectiques de t. Il n'y aurait à excepter que le cas où ces coordonnées seraient infinies ; j'écarte ce cas en employant, s'il y a lieu, une transformation homographique. Donc, pour t infiniment petit, ξ et η tendent respectivement vers des limites finies, qui sont déterminées d'une seule manière. Donc, en premier lieu, au point O, considéré comme limite des points de (S), répond un seul point limite sur Σ. Prenant alors ce point Ω pour origine des coordonnées ξ, η, j'ai, pour les valeurs de ces coordonnées, correspondant à (S), des expressions telles que :

$$(3) \qquad \xi = t^{\nu}\Phi(t), \qquad \eta = t^{\nu}F(t),$$

où Φ et F sont des fonctions de même définition que f. Donc, d'après ce qui a été dit précédemment, ces valeurs définissent un seul système circulaire (Σ), qui correspond à (S). Le théorème est ainsi démontré.

On voit, en outre, que l'ordre de multiplicité de (Σ) est ν ou un diviseur de ν. Remarquons que, si x est infiniment petit d'ordre n, c'est-à-dire t infiniment petit du premier ordre, il résulte de (3) que ξ et η sont infiniment petits d'ordre ν. Il suit de là :

Théorème II. — *Soient* S *et* Σ *deux courbes, dont la seconde est une transformée rationnelle de la première, et* n *et* ν *les ordres de multiplicité de deux systèmes circulaires* (S), (Σ), *se correspondant sur ces deux courbes : à un point placé sur* (S), *à distance infiniment petite d'ordre* n *de l'origine de* (S), *correspond sur* (Σ) *un point dont la distance à l'origine de* (Σ) *est un infiniment petit dont l'ordre est un multiple entier de* ν.

Je suppose maintenant qu'en outre S soit une transformée rationnelle de Σ, c'est-à-dire que S et Σ se correspondent point par point. D'après le théorème II, si un point a est placé sur (S) à distance infiniment petite du premier ordre de l'origine O de (S), la distance $\Omega\alpha$ du

point correspondant à l'origine de (Σ) est infiniment petite d'ordre $\frac{\nu'}{n}$, ν' étant un multiple de ν. De même aussi, si $\Omega\alpha$ est du premier ordre, Oa est d'un ordre marqué par $\frac{n'}{\nu}$, n' étant un multiple de n, et, par suite, si Oa est un infiniment petit du premier ordre, $\Omega\alpha$ est de l'ordre $\frac{\nu}{n'}$. Donc : $\frac{\nu'}{n} = \frac{\nu}{n'}$. Ceci exige $n' = n$, $\nu' = \nu$. Donc :

Théorème III. — *Soient* S *et* Σ *deux courbes se correspondant point par point, et* n *et* ν *les ordres de multiplicité de deux systèmes circulaires* (S), (Σ), *se correspondant sur ces deux courbes : à un point placé sur* (S) *à distance infiniment petite d'ordre* n *de l'origine de* (S), *correspond sur* (Σ) *un point à distance infiniment petite d'ordre* ν *de l'origine de* (Σ).

4. Je considère la surface gauche A qu'on obtient en joignant par des droites les points a, α correspondants, de deux courbes planes S, Σ, se correspondant point par point, et placées dans des plans différents. Soit G la génératrice qui joint les origines O, Ω des deux systèmes circulaires correspondants (S), (Σ), dont les ordres de multiplicité sont respectivement n et ν. Je considère une autre section quelconque S_1 de A, rencontrant la droite $a\alpha$ au point a_1. La courbe S_1 correspond point par point à S et à Σ ; le point a_1 est le correspondant des points a et α. Donc, aux systèmes circulaires (S), (Σ), correspond sur S_1 un système circulaire (S_1), dont l'origine O_1 est sur G. En outre, si Oa est infiniment petit, O_1a_1 est infiniment petit du même ordre que la plus grande des deux distances Oa, $\Omega\alpha$. Donc, d'après le théorème III, l'ordre de multiplicité de (S_1) est le plus petit des deux nombres n, ν. Ainsi :

Théorème IV. — *Soient* S *et* Σ *deux courbes planes se correspondant point par point,* A *la surface gauche obtenue en joignant les points correspondants de* S *et* Σ, *et* S_1 *une section plane quelconque de* A : *le système circulaire de branches de* S_1, *qui correspond à deux systèmes circulaires de* S *et* Σ, *a pour ordre de multiplicité le plus petit des ordres de multiplicité de ces derniers.*

Il convient d'observer que le théorème IV souffre des exceptions, pour certaines sections particulières. En premier lieu, pour les sec-

tions qui passent à l'origine du système circulaire dont l'ordre de multiplicité est le plus grand, on a ce même ordre de multiplicité. En second lieu, pour les sections qui passent par G, le résultat est différent. A l'égard de ces sections, je citerai le résultat suivant, facile à établir : Soit $\nu > n$; le système circulaire de la section considérée a pour origine Ω, pour tangente G, pour ordre de multiplicité $(\nu - n)$, et enfin les branches de ce système circulaire ont avec G des contacts d'ordre $\frac{n}{\nu - n}$.

Supposons encore $\nu > n$. D'après le théorème III, si O a est infiniment petit, $\Omega\alpha$ est infiniment plus petit. Donc les génératrices infiniment voisines de G tournent autour du point Ω. Donc le plan mené par G et la tangente de (S) est tangent à A tout le long de G. Au contraire, cette particularité n'a pas lieu si n et ν sont égaux, sauf au cas où les tangentes de (S) et de (Σ) seraient dans un même plan. Il existe un certain nombre de génératrices qui joignent deux points correspondants dont les tangentes se rencontrent. Je les désigne par Γ, et je suppose d'ailleurs les plans de S et de Σ tellement placés que les points de ces courbes auxquels aboutissent les droites Γ soient des points simples. Il est aisé de trouver le nombre de ces droites. Il suffit d'établir une correspondance entre les points où les tangentes en a et en α, à S et Σ, rencontrent l'intersection des plans de ces courbes. Les coïncidences correspondent aux droites Γ, dont le nombre est ainsi égal à la somme des classes des deux courbes.

Pour trouver le nombre de ces droites, on peut encore répéter le même raisonnement en se servant, au lieu des courbes S et Σ, de la courbe S ou de la courbe Σ jointe à une section quelconque S_1 de A. J'obtiendrai ainsi plusieurs expressions du même nombre; la comparaison de ces expressions fournira deux théorèmes, dont l'un est précisément celui de la conservation du genre.

5. Je rappelle d'abord la règle suivante, due à M. Zeuthen ([1]), pour trouver l'ordre de multiplicité d'une coïncidence :

Si deux séries de points p, p_1 se correspondent sur une droite, le nombre des couples de points correspondants confondus, qui sont réunies en un point P, *est égal à la somme des ordres des segments*

([1]) *Bulletin des Sciences math. et astr.*, t. V, p. 186.

infiniment petits compris entre un point p, à distance infiniment petite du premier ordre de P, et les points p_1 correspondants.

En appliquant le raisonnement ci-dessus aux courbes S et S_1, je trouve encore un nombre de coïncidences égal à la somme des classes de ces courbes ; mais ces coïncidences ne correspondent pas toutes aux droites Σ.

En premier lieu, soit b un point de rencontre de S et du plan de S_1. Le point b appartient à S_1, et donne lieu à des coïncidences. Je compte ces coïncidences d'après la règle de M. Zeuthen. Sur l'intersection L des plans de S et de S_1, je prends un point p, à distance infiniment petite du premier ordre de b. Par ce point passent deux tangentes à S, dont les points de contact sont à distance infiniment petite de b. Cet infiniment petit est d'ordre $\frac{1}{2}$. A ces deux points correspondent, sur S_1, deux autres points également à distance d'ordre $\frac{1}{2}$ de b. Les tangentes de S_1 en ces deux points rencontrent L en deux points p_1 qui sont à distance infiniment petite du premier ordre de b et de p. Il y a donc deux segments p, p_1 infiniment petits du premier ordre. Donc, en b sont réunies deux coïncidences. Soit m le degré de S. Le nombre total des coïncidences analogues est $2m$.

En second lieu, soit O l'origine d'un système circulaire (S) dont l'ordre de multiplicité n est inférieur à l'ordre de multiplicité ν du correspondant (Σ). Le long de la génératrice G, qui joint les origines de ces deux systèmes circulaires, le plan tangent est constant, comme on l'a vu au n° 4. Donc la tangente de (S_1) rencontre celle de (S). Le point P, où ces deux tangentes se rencontrent, absorbe un certain nombre de coïncidences. Pour pouvoir compter ces coïncidences, il faut connaître l'ordre d'infiniment petit auquel appartient le segment $p\,p_1$ compris entre les points où L est rencontré par les tangentes en deux points correspondants a et a_1, infiniment voisins de O et de O_1. Je ferai usage, à cet effet, de la formule suivante, facile à établir.

Soient : x, y les coordonnées du point a de la courbe S, situé dans le plan $z = 0$;

ξ, η, ζ les coordonnées du point correspondant α, sur Σ ;

x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point correspondant a_1, sur S_1.

Prenant x pour variable indépendante et dénotant les dérivées par des accents, je considère l'expression :

$$Y - y - y'(X - x),$$

qui, égalée à zéro, fournit l'équation de la tangente à S en a. Soit U ce que devient cette expression quand on y met pour X et Y les coordonnées du point p_1, où la tangente de S_1 en a_1 rencontre le plan de S. La formule dont il s'agit est la suivante :

$$(4) \qquad \frac{\zeta^2}{z^2} z'_1 \mathrm{U} = \zeta'[\eta - y - y'(\xi - x)] + \zeta(\xi' y' - \eta').$$

Je suppose que l'origine des coordonnées soit celle du système circulaire (S), et que l'axe des z soit la génératrice G. Je suppose, en outre, $\nu > n$. Alors le second membre de (4) est infiniment petit avec x, et il est aisé de voir que sa partie principale est la même que celle de $-\zeta\eta'$. Comme ζ a une valeur finie, l'ordre du second membre est le même que celui de η', c'est-à-dire $\frac{\nu - n}{n}$, si x est du premier ordre. Je considère maintenant le premier membre de (4) : le premier facteur $\frac{\zeta^2}{z^2}$ a une valeur finie ; il en est de même de z'_1. En effet, z_1 est du même ordre que $O_1 a_1$. Or on a vu, au n° 4, que $O_1 a_1$ est du même ordre que O a, c'est-à-dire du même ordre que x. Donc z_1 est du premier ordre. Donc z'_1 a une limite finie. Donc enfin U est infiniment petit du même ordre que le second membre.

U ne diffère que par un coefficient fini de la distance des points pp_1, où les tangentes de S en a et de S_1 en a_1 rencontrent L ; donc cette distance est aussi infiniment petite d'ordre $\frac{\nu - n}{n}$, quand O a est du premier ordre.

Il est maintenant aisé de compter les coïncidences réunies en P. Prenons un point p à distance infiniment petite du premier ordre de P, et situé sur L. Soit $\frac{q}{n}$ l'ordre du contact de chaque branche de (S) avec sa tangente. Par le point p passent q tangentes à (S), dont les points de contact a sont à des distances de O infiniment petites d'ordre $\frac{n}{q}$ (¹). A chacun de ces points a correspond un point a_1. Si p_1 est le point où la tangente en l'un de ces derniers rencontre L, pp_1 est, d'après le résultat précédent, infiniment petit de l'ordre $\frac{\nu - n}{n}\frac{n}{q}$, puisque

(¹) C'est une conséquence de ce fait que, pour le système circulaire corrélatif de (S), les nombres n et q s'échangent entre eux. *Voyez* mon *Mémoire sur les points singuliers*, qui sera inséré au *Recueil des savants étrangers*.

maintenant O a est de l'ordre $\frac{n}{q}$. Mais il y a q segments pp_1. Donc la somme de leurs ordres est $q\,\frac{\nu - n}{n}\,\frac{n}{q}$ ou $(\nu - n)$. Donc, au point P, sont réunies $(\nu - n)$ coïncidences.

Considérons toutes les couples de systèmes circulaires correspondants (S), (Σ), pour lesquels on a : $\nu > n$. Soient c et c_1 les classes de S et de S_1. Le nombre total des coïncidences relatives aux droites Γ, c'est-à-dire le nombre même des droites Γ est :

$$R = c + c_1 - 2m - \Sigma(\nu - n). \tag{5}$$

Soient maintenant (S′), (Σ′) deux systèmes circulaires correspondants et pour lesquels on ait : $\nu' < n'$. En considérant tous les analogues, répétant le raisonnement ci-desssus pour les courbes Σ et S_1, et désignant par μ et γ le degré et la classe de Σ, on aura de même :

$$R = \gamma + c_1 - 2\mu - \Sigma(n' - \nu'). \tag{6}$$

6. En comparant les relations (5) et (6), j'en conclus :

$$c - 2m + \Sigma(n + n') = \gamma - 2\mu + \Sigma(\nu + \nu'). \tag{7}$$

Soient maintenant (S″), (Σ″) des systèmes circulaires correspondants et ayant le même ordre de multiplicité n''. J'ajoute dans les deux membres de (7) la somme des nombres analogues à n'', et je pose :

$$\Sigma(n + n' + n'') = l, \qquad \Sigma(\nu + \nu' + \nu'') = \lambda.$$

La relation (7) devient :

$$c - 2m + l = \gamma - 2\mu + \lambda. \tag{8}$$

Le nombre l est la somme des ordres de multiplicité de tous les systèmes circulaires *propres* de S (c'est-à-dire dont l'ordre de multiplicité n'est pas l'unité), qui ont pour correspondants, sur Σ, des systèmes circulaires propres, augmentée du nombre des branches simples de S. Retranchons des deux membres de (8) le nombre total k de ces couples de systèmes circulaires, et écrivons :

$$c - 2m + l - k = \gamma - 2\mu + \lambda - k. \tag{9}$$

Chaque branche simple de S, qui intervient au nombre des systèmes circulaires ci-dessus, figure pour une unité dans l et k. Si donc N est la

somme des ordres de multiplicité des systèmes circulaires propres de S, et T leur nombre, $l-k$ est égal à $\mathrm{N}-\mathrm{T}$. Soient de même N et T les nombres analogues pour Σ, on peut écrire, au lieu de (9) :

$$c-2m+\mathrm{N}-\mathrm{T}=\gamma-2\mu+N-T. \tag{10}$$

Dans cette formule, chaque membre ne contient que des éléments entièrement définis au moyen d'une seule des courbes.

Pour la raison qui vient d'être invoquée, on peut, sans changer $(\mathrm{N}-\mathrm{T})$, faire entrer parmi les systèmes circulaires considérés sur S un nombre quelconque de branches simples, et, par conséquent, énoncer ainsi la formule (10) :

Théorème V. — *Soient : m le degré, c la classe d'une courbe algébrique,* N *la somme des ordres de multiplicité de tous ses points singuliers, et* T *le nombre total des systèmes circulaires formés par les branches de la courbe en ces points. L'expression*

$$c-2m+\mathrm{N}-\mathrm{T}$$

reste invariable si l'on substitue à la courbe proposée une autre courbe quelconque lui correspondant point par point.

D'après le n° 4, le nombre R a encore pour expression la somme $c+\gamma$ des classes de S et Σ. En recourant à (5) ou (6), nous en concluons la classe des sections de la surface gauche A, savoir :

$$c_1=\gamma+2m+\Sigma(\nu-n)=c+2\mu+\Sigma(n'-\nu').$$

SUR LES

POINTS D'UNE COURBE OU D'UNE SURFACE,

QUI SATISFONT

A UNE CONDITION EXPRIMÉE PAR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE OU AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 81, 1875, p. 1053.

J'ai l'honneur de communiquer à l'Académie quelques résultats concernant une question dont la Géométrie offre de nombreux exemples. Voici l'énoncé du problème : *Sur une courbe plane ou une surface* U *de degré m, on considère les points qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle ou aux dérivées partielles algébrique. Ces points sont, comme on sait, les intersections de* U *et d'une autre courbe ou surface algébrique* Φ. *On demande le degré de cette dernière.* Ce problème se généralise sous la forme algébrique suivante :

Soit $U(x_1, \ldots, x_k, y) = 0$ *une équation de degré* m, *définissant la fonction* y *des variables indépendantes* $x_1, \ldots, x_k$. *On considère une équation aux dérivées partielles algébrique* $f = 0$. *Les systèmes de valeurs des variables, pour lesquels la fonction* y *satisfait à l'équation* $f = 0$, *sont, comme on sait, définis par l'équation* $U = 0$ *et une seconde équation algébrique* $\Phi(x_1, \ldots, x_k, y) = 0$. *On demande le degré de cette dernière.*

Pour former l'équation $\Phi = 0$, le procédé théorique est fort simple. On tire les dérivées de y de l'équation $U = 0$, et l'on substitue leurs expressions dans $f = 0$. Le résultat de la substitution est l'équation cherchée. Ce calcul, presque impraticable dans la plupart des cas, n'est pa

nécessaire quand on se propose simplement de trouver le degré de Φ. C'est à la détermination directe de ce degré que se rapportent les résultats suivants :

Théorème I. — *Le degré de l'équation* $\Phi = 0$ *est de la forme* $\alpha(m-1)+\beta$, *les coefficients* α *et* β *étant des nombres entiers, le premier positif, le second positif ou négatif, qui ne dépendent que de l'équation aux dérivées partielles.*

On voit que le problème est ramené à la recherche des coefficients α, β. C'est à cette question, où intervient seulement l'équation aux dérivées partielles, que se rapportent les énoncés suivants :

Théorème II. — *Soit* $f = 0$ *une équation aux dérivées partielles algébrique, mise sous forme entière. On prend de nouvelles variables indépendantes* $t_1, \ldots, t_k$, *et l'on remplace* $x_1, \ldots, x_k, y$ *par* $\frac{\xi_1}{\zeta}, \ldots, \frac{\xi_k}{\zeta}, \frac{\eta}{\zeta}$. *Soit* $F = 0$ *l'équation transformée, mise également sous forme entière. On a identiquement*

$$f = \frac{1}{\Delta^\alpha \zeta^\beta} F, \tag{1}$$

relation dans laquelle Δ *est le déterminant* $\sum \pm \zeta \frac{d\xi_1}{dt_1} \frac{d\xi_2}{dt_2}, \ldots, \frac{d\xi_k}{dt_k}$, *et dans laquelle aussi* α *et* β *sont les coefficients qui figurent au théorème I.*

Voici maintenant une autre proposition qui ne s'applique qu'au cas d'une seule variable indépendante, c'est-à-dire aux problèmes de Géométrie plane, ce qui donne lieu à un calcul très rapide.

Théorème III. — *Soit* $f = 0$ *une équation différentielle algébrique entre la variable indépendante* x *et la fonction* y ; *cette équation étant supposée mise sous forme entière :*

1° *Substituez dans* f *à* y *un développement suivant les puissances entières et ascendantes de* $(x-\xi)^{\frac{1}{2}}$, *commençant par une constante, et dans lequel les coefficients et la constante* ξ *soient indéterminés. Ordonnez le résultat de la substitution suivant les mêmes puissances. L'exposant de* $(x-\xi)^{\frac{1}{2}}$, *dans le premier terme, est égal et de signe contraire au coefficient* α ;

2° *Substituez dans f à y un développement suivant les puissances entières et descendantes de x, commençant par un terme du premier degré et à coefficients indéterminés. Ordonnez le résultat suivant les mêmes puissances. L'exposant de x, dans le premier terme, est égal au coefficient β.*

Dans un cas particulièrement remarquable, les coefficients α et β s'obtiennent sans aucun calcul. C'est le cas où l'équation considérée n'est pas altérée par les transformations homographiques.

THÉORÈME IV. — *Soit $f = 0$ une équation algébrique aux dérivées partielles entre la fonction y et les k variables indépendantes $x_1, \ldots, x_k$, qui reste inaltérée par toute transformation homographique :*

1° *Cette équation étant mise sous forme entière, f est un invariant homogène des formes simultanées $V_2 V_3, \ldots$, définies par les relations*

$$1.2\ldots i V_i = \left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \xi_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right)^{(i)} y, \qquad (i = 2, 3, \ldots),$$

où $\xi_1, \ldots, \xi_k$ sont les variables de ces formes ;

2° *Soient p et δ le poids et le degré de cet invariant ; on a*

$$\alpha = p + \delta, \qquad \alpha - \beta = (k+2)p.$$

D'où résulte, pour le degré de Φ,

$$M = (p+\delta)m - (k+2)p.$$

Pour le cas d'une seule variable indépendante, les formes V disparaissent. Le théorème IV subsiste cependant, en ce sens que f est homogène par rapport aux dérivées de y. Le degré de Φ est alors

$$M = (p+\delta)m - 3p.$$

J'ai eu l'occasion d'appliquer les propositions ci-dessus à un grand nombre d'exemples, tant connus que nouveaux. Parmi ces derniers, je citerai une application du théorème III et une application du théorème IV. Par le premier j'ai trouvé que :

Les points d'une courbe plane U, de degré m, en chacun desquels cette courbe a un contact d'ordre n avec une courbe de classe μ qui touche $\frac{\mu(\mu+3)}{2} - n$ droites données, sont les intersec-

tions de U *avec une autre courbe dont le degré est*

$$M = \left[(n+1)\mu + \frac{n(n-5)}{2}\right](m-1) - n(n-2).$$

L'application du théorème IV, que je vais citer, a pour objet la généralisation de certaines propriétés des asymptotes de l'indicatrice des surfaces. On me permettra, pour abréger, d'employer ici le langage géométrique, étendu au cas de plus de trois dimensions. Grâce à cette convention, une *droite* est l'être défini par k équations linéaires, le nombre des dimensions étant $(k+1)$. Il est aisé de voir qu'en un point d'une surface il existe 2, 3, ..., k droites, ayant chacune avec la surface, en ce point, un contact d'ordre k. Je les appelle *droites osculatrices*. Cela étant, j'ai trouvé au moyen du théorème IV, les deux propositions suivantes :

1° *Le lieu des points d'une surface de degré m* [de l'espace à $(k+1)$ dimensions], *en lesquels deux droites osculatrices se confondent, est l'intersection de cette surface avec une autre dont le degré est*

$$(2)\quad M = 2.3\ldots k\left\{\left[k + \frac{(k+1)(k-2)}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k}\right)\right]m - \frac{k(k-1)(k+2)}{2}\right\}.$$

2° *Le lieu des points, en lesquels une droite osculatrice a, avec la surface, un contact d'ordre* $(k+1)$, *est l'intersection de cette surface avec une autre dont le degré est*

$$(3)\qquad M = 2.3\ldots(k+1)\left[\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k+1}\right)m - k - 2\right].$$

SUR LA CONSERVATION

DU

GENRE DES COURBES ALGÉBRIQUES

DANS LES TRANSFORMATIONS UNIFORMES.

Bulletin de la Société mathématique, t. IV, 1875-1876, p. 29.

1. C'est dans le Calcul intégral que la notion du *genre* des courbes algébriques a pris naissance. Par cette voie, il est immédiatement visible que le genre se conserve dans les transformations *uniformes*. Pour introduire dans la Géométrie cette notion nouvelle, il fallait connaître l'expression analytique du genre. Cette question était résolue dans des cas particuliers, notamment dans celui où la courbe considérée ne contient que des singularités *ordinaires*. J'en ai donné la solution générale suivante :

Soient p le genre, m le degré, c la classe d'une courbe algébrique, N *la somme des ordres de multiplicité de tous ses points singuliers, et* T *le nombre total des systèmes circulaires formés par les branches de la courbe en ses points singuliers. Ces éléments satisfont à la relation*

$$2(p-1) = c - 2m + \mathrm{N} - \mathrm{T} \quad (1). \tag{1}$$

Le nombre p, défini par cette relation, se conserve dans les transformations uniformes. C'est ce que nous apprend le Calcul intégral. Il est naturel de désirer une démonstration directe de cette proposi-

---

(1) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXVIII, p. 1833, et t. LXXX, p. 638; *Œuvres d'Halphen*, t. I, p. 312, 358.

tion. On en possède déjà plusieurs pour le cas particulier déjà cité, où la courbe considérée ne contient que des singularités ordinaires [1]. On peut passer de là au cas général, comme je l'ai déjà montré, en employant diverses transformations uniformes particulières, qui changent une courbe quelconque en une autre n'offrant que des singularités ordinaires ; mais ces détours peuvent être évités ; l'objet de ce petit Mémoire est de présenter une démonstration directe de la proposition suivante : *L'expression qui figure au second membre de l'équation* (1) *a la même valeur pour deux courbes quelconques se correspondant* point par point [2].

2. Il est nécessaire de donner quelques explications préliminaires au sujet des *systèmes circulaires*. Soient O l'origine des coordonnées, (x, y) un point singulier d'une courbe plane algébrique S, et k l'ordre de multiplicité de ce point. Pour une valeur infiniment petite de x, k valeurs de y sont infiniment petites. On sait que ces k valeurs se répartissent en *systèmes circulaires* [3], c'est-à-dire en des groupes tels que les n valeurs, comprises dans l'un quelconque d'entre eux, forment une seule et même fonction synectique de $x^{\frac{1}{n}}$. Or, on prouve aisément que cette répartition ne dépend pas des axes de coordonnées, pourvu toutefois que l'axe des y ne soit pas une tangente de S au point O. On a donc ainsi une répartition des branches de S, au point O, en des groupes bien définis, que j'appelle *systèmes circulaires* de branches. Le nombre n est l'*ordre de multiplicité*, le point O est l'*origine* d'un tel système circulaire.

Soit $f(t)$ une fonction synectique pour les petites valeurs de t, et ne s'évanouissant pas avec cette variable ; soient n et r des entiers positifs. Les équations

$$(2) \qquad x = t^n, \qquad y = t^r f(t)$$

définissent, de la manière la plus générale, y comme fonction synectique de $x^{\frac{1}{n}}$, s'évanouissant avec x. Pour chaque valeur de x, cette

(1) Clebsch et Gordan, *Fonct. ab.*; Zeuthen, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*.

(2) Au Congrès de l'Association française, j'ai donné cette année, du même théorème, une autre démonstration, fondée sur des considérations géométriques; *Œuvres d'Halphen*, t. I, p. 363.

(3) Puiseux, *Journal de Mathématiques;* 1850.

fonction a un nombre de valeurs égal à n ou à un diviseur de n. Donc, sous les conditions que y ait précisément n valeurs, et que r ne soit pas inférieur à n (pour que l'axe des y ne soit pas la tangente), les équations (2) définissent, de la manière la plus générale, un système circulaire de branches dont l'ordre de multiplicité est n, et dont l'origine est le point O. Si r est supérieur à n, la tangente est l'axe des x. Pour que les axes soient quelconques, on doit supposer $r = n$. Si la fonction y, définie par (2), a moins de n valeurs, les équations (2) définissent, en supposant toujours $r = n$, un système circulaire dont l'ordre de multiplicité est égal au nombre de ces valeurs.

Au lieu des équations (2), considérons celles-ci :

$$(3) \qquad x = t^n \varphi(t), \qquad y = t^n \psi(t),$$

n étant toujours un entier positif, et φ et ψ des fonctions de même définition que f. On démontre aisément que l'élimination de t entre les équations (3) conduit à

$$y = x\theta\left(x^{\frac{1}{n}}\right),$$

où θ est encore une fonction de même définition que f. C'est précisément la forme du résultat auquel conduit l'élimination de t entre les équations (2), où l'on suppose $r = n$. Ainsi, de même que les équations (2), les équations (3) définissent, sans plus de généralité, un système circulaire de branches dont l'origine est en O, et dont l'ordre de multiplicité est n ou un diviseur de n.

3. Soit S une courbe contenant le système circulaire de branches représenté par les équations (2). Je suppose que l'ordre de multiplicité de ce système circulaire soit effectivement n. Je désigne abréviativement le système circulaire par (S). Soit maintenant Σ une seconde courbe, qui soit une transformée *rationnelle* de S. Si x, y sont les coordonnées d'un point a de S, les coordonnées ξ, η du point correspondant α de Σ sont des fonctions rationnelles de x, y. Si donc a est infiniment voisin de O, et sur une branche de (S), les coordonnées de α sont des fonctions synectiques de t, sauf au cas où elles seraient infinies. J'écarte ce cas en employant, au besoin, une transformation homographique. Les coordonnées de α tendent donc, pour t infiniment petit, vers des limites finies et déterminées d'une seule manière. Donc, en premier lieu, au point O, considéré sur S comme

limite des points du système circulaire (S), correspond un seul point Ω sur Σ. Supposant alors Ω origine des coordonnées ξ, η, j'ai, pour les valeurs des coordonnées de α, des expressions telles que

$$(4) \qquad \xi = t^{\sigma}\Phi(t), \qquad \eta = t^{\sigma}\Psi(t),$$

où Φ et Ψ sont des fonctions de même définition que f, et où σ est un entier positif. Comme on l'a vu au n° 2, les équations (4) définissent un système circulaire de branches (Σ), dont l'ordre de multiplicité est σ ou un diviseur de σ. Si ν est l'ordre de multiplicité de (Σ), σ est ainsi un multiple entier de ν. Donc :

Théorème I. — *Soient* S *et* Σ *deux courbes planes algébriques dont la seconde soit une transformée rationnelle de la première :*

1° *A un système circulaire de branches* (S) *de la première, correspond un seul système circulaire de branches* (Σ) *de la seconde.*

2° *Soient n et ν les ordres respectifs de multiplicité des systèmes circulaires correspondants* (S), (Σ); *à un point placé sur* (S) *à distance infiniment petite d'ordre n de l'origine de* (S) *correspond sur* (Σ) *un point dont l'ordre de la distance à l'origine de* (Σ) *est un multiple entier de ν.*

Il est visible que le nombre entier $\frac{\sigma}{\nu}$ est égal au nombre des points a de (S) qui correspondent à un point α de (Σ). Si donc, on suppose maintenant que la courbe S soit, à son tour, une transformée rationnelle de Σ, c'est-à-dire que les courbes S et Σ se correspondent *point par point*, σ est égal à ν. On a donc cette nouvelle proposition :

Théorème II. — *Soient* S *et* Σ *deux courbes algébriques se correspondant* point par point, *et n et ν les ordres de multiplicité respectifs de deux systèmes circulaires correspondants* (S), (Σ) : *à un point placé sur* (S) *à distance infiniment petite d'ordre n de l'origine de* S, *correspond un point placé sur* (Σ) *à distance infiniment petite d'ordre ν de l'origine de* (Σ).

4. Le théorème II est le point essentiel de cette théorie. Je n'aurai recours dans ce qui va suivre à aucun autre résultat nouveau. Toutefois, avant d'arriver à l'objet même de ce travail, je crois utile de rappeler brièvement un procédé pour déterminer l'ordre de multipli-

cité d'un système de solutions de deux équations à deux inconnues. Ce procédé a pour point de départ la proposition suivante :

Soit $F(x, y) = 0$ *l'équation sous forme entière d'une courbe algébrique plane. Le nombre des intersections de cette courbe et d'une autre courbe* S, *du même plan, confondues en un point* O, *est égal à la somme des ordres des quantités infiniment petites* $F(x, y)$, *quand on suppose le point* (x, y) *placé successivement à distance infiniment petite du premier ordre de* O, *sur les diverses branches de* S.

Je suppose que, au point O, la courbe S comprenne divers systèmes circulaires (S), (S′), ... Soit h la somme des ordres des quantités infiniment petites $F(x, y)$, quand on suppose le point (x, y) placé successivement à distance infiniment petite du premier ordre de O, sur les diverses branches de (S). Soit, de même, h' le nombre analogue pour (S′), ... Le nombre des intersections des deux courbes en O est $h + h' + \dots$.

Soit maintenant n l'ordre de multiplicité de (S), que je suppose défini par les équations (2). Pour calculer l'élément de h, relatif à une quelconque des branches de (S), on substituera dans $F(x, y)$ les valeurs de x et y données par (2), en supposant t infiniment petit de l'ordre $\frac{1}{n}$. Par suite, h se compose de n éléments égaux. Donc h est égal à l'ordre d'infiniment petit auquel appartient $F(x, y)$, quand on suppose t infiniment petit du premier ordre. En d'autres termes, h est égal à l'exposant de t au premier terme de $F(x, y)$, ordonné suivant les puissances ascendantes de t, après substitution à x et y des valeurs (2). C'est ce qu'on peut exprimer brièvement en disant que :

Le nombre des intersections d'un système circulaire (S) *avec une courbe* $F(x, y) = 0$, *qui passe à l'origine* O *de ce système circulaire, est égal à l'ordre d'infiniment petit auquel appartient le polynome entier* $F(x, y)$, *quand on y suppose le point* (x, y) *placé sur une branche de* (S), *à une distance de l'origine de* (S), *dont l'ordre infinitésimal est égal à l'ordre de multiplicité de* (S).

5. J'arrive, ces préliminaires établis, à mon objet principal. J'emploie des coordonnées homogènes. Soit $S(x, y, z) = 0$ l'équation

d'une courbe algébrique. Soient, en outre, u, v, w trois fonctions entières et homogènes de x, y, z. Par les équations

$$\frac{\xi}{u} = \frac{\eta}{v} = \frac{\zeta}{w}, \tag{5}$$

je définis, de la manière la plus générale, une transformée rationnelle Σ de la courbe S. A chaque point $a(x, y, z)$ de S correspond un seul point $\alpha(\xi, \eta, \zeta)$ de Σ. La réciproque, pour des valeurs particulières de u, v, w, peut n'être pas exacte : à chaque point α, il peut se faire qu'il corresponde plusieurs points a. J'en désignerai par k le nombre. Si k est égal à l'unité, les deux courbes S et Σ se correspondent *point par point*, ou la transformation (5) est, pour les deux courbes, une transformation *uniforme*. Sans troubler la généralité, on peut supposer les trois fonctions u, v, w du même degré ; car cette supposition sera toujours réalisée au moyen d'un changement de coordonnées. Je désignerai par q le degré de u, v, w, et par m celui de S.

Je cherche d'abord le degré μ de Σ. Les points a, tels que leurs correspondants α soient une droite arbitrairement donnée, sont les intersections de S avec la courbe

$$F(x, y, z) = au + bv + cw = 0, \tag{6}$$

où a, b, c sont des constantes arbitraires. Le nombre des solutions est mq; mais il faut en défalquer, comme étrangères, celles qui ne dépendent pas des constantes arbitraires ; ces solutions répondent aux points dont les coordonnées font évanouir à la fois u, v, w. Soit O un de ces points ; soit n l'ordre de multiplicité d'un des systèmes circulaires (S) formés par les branches de S en O; plaçons le point a sur une branche de (S) à distance infiniment petite d'ordre n de O. Soit h l'ordre d'infiniment petit, auquel appartient alors $F(x, y, z)$. Soit Σh la somme des nombres analogues, pour tous les systèmes circulaires de branches de S aux divers points, dont les coordonnées font évanouir à la fois u, v, w. D'après le n° 4, le nombre total des intersections des courbes S et F, réunies en ces points, est Σh. Le nombre des solutions non étrangères est donc $mq - \Sigma h$. Mais, à chacun des points α, situés sur la droite considérée, et dont le nombre est μ, correspondent k points a dont les coordonnées font évanouir F ; donc

$$k\mu = mq - \Sigma h. \tag{7}$$

6. Je vais maintenant calculer la classe de la courbe Σ. En employant des majuscules pour les coordonnées courantes, j'ai, pour la tangente de Σ en un point α, l'équation

$$(8)\qquad A = \begin{vmatrix} X & u & du \\ Y & v & dv \\ Z & w & dw \end{vmatrix} = 0.$$

Sous forme entièrement explicite, cette équation se change, par un calcul facile, en la suivante :

$$(9)\qquad B = \begin{vmatrix} X & u_1 & u_2 & u_3 \\ Y & v_1 & v_2 & v_3 \\ Z & w_1 & w_2 & w_3 \\ O & S_1 & S_2 & S_3 \end{vmatrix} = 0,$$

où, suivant l'usage, j'ai posé

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_1, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = u_2, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = u_3,$$

et de même pour les autres fonctions. Si l'on considère X, Y, Z comme données arbitrairement, les intersections de la courbe B et de S sont les points a, tels que les tangentes de Σ aux points correspondants α, passent en un point donné. Le nombre de ces points, défalcation faite des solutions étrangères, c'est-à-dire indépendantes des arbitraires X, Y, Z, est égal à k fois la classe de Σ. Ce sont les solutions étrangères qu'il s'agit actuellement de compter.

Soient s la variable indépendante, que je laisse pour le moment indéterminée, et

$$\mu_1\, dx + \mu_2\, dy + \mu_3\, dz = ds$$

sa différentielle totale. Soit aussi l'équation qui lie les coordonnées homogènes

$$(10)\qquad \lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z = 1,$$

où λ_1, λ_2, λ_3 sont des constantes. Cette dernière a lieu également entre X, Y, Z, et aussi entre ξ, η, ζ. Par suite, les relations (5) se complètent en

$$\frac{\xi}{u} = \frac{\eta}{v} = \frac{\zeta}{w} = \frac{1}{\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w},$$

et il en résulte

$$(11) \qquad A = (\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w)^2 \begin{vmatrix} X & \xi & d\xi \\ Y & \eta & d\eta \\ Z & \zeta & d\zeta \end{vmatrix}.$$

Je pose maintenant

$$(12) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ S_1 & S_2 & S_3 \end{vmatrix}.$$

Cela étant, on vérifiera aisément que, pour les valeurs x, y, z satisfaisant à $S = 0$, on a

$$(13) \qquad B = q\Delta \frac{A}{ds}.$$

Les points dont les coordonnées font évanouir Δ, peuvent être classés en deux groupes : d'abord ceux dont les coordonnées dépendent de μ_1, μ_2, μ_3, c'est-à-dire du choix de la variable indépendante. Il est manifeste que les coordonnées de ces points ne font pas évanouir B, dont l'expression ne dépend pas de ce choix. On voit donc que, pour ces points, ds est nul, et que le second membre de (13) conserve une valeur finie. Le second groupe est composé de points dont les coordonnées font évanouir à la fois S_1, S_2, S_3. Ce sont les points singuliers de S. A ces points correspondent des solutions étrangères, puisque les coordonnées de ces points font évanouir B, quelles que soient les arbitraires X, Y, Z.

En second lieu, les autres solutions étrangères sont fournies, d'après (13), par les points dont les coordonnées font évanouir A, quelles que soient les arbitraires. Ces points sont ceux en lesquels les trois mineurs, tels que $(\xi d\eta - \eta d\xi)$, s'évanouissent, c'est-à-dire les points singuliers de Σ.

Ainsi, en résumé, les solutions étrangères que nous cherchons répondent à des points singuliers, soit de S, soit de Σ, soit des deux courbes à la fois. Soit maintenant O un point répondant à une solution étrangère ; je compterai l'ordre de multiplicité de cette solution, d'après la règle du n° 4. J'ai donc à chercher l'ordre d'infiniment petit, auquel appartient B, quand on y substitue à x, y, z, les coordonnées d'un point a, qui, situé sur une branche d'un système circulaire (S), d'origine O et d'ordre de multiplicité n, est à distance infiniment petite de $n^{\text{ième}}$ ordre de O. D'après l'équation (13), je pourrai, pour

trouver cet ordre, opérer séparément sur Δ et sur $\frac{A}{ds}$, et faire la somme des résultats. Je m'occupe du facteur $\frac{A}{ds}$, en premier lieu.

Les constantes λ_1, λ_2, λ_3 de l'équation (10) peuvent être considérées comme tout à fait arbitraires; car changer ces constantes sans modifier ni les équations ni le triangle de référence, c'est changer la figure en une figure homographique, ce qui est permis dans le problème qui nous occupe. Les constantes λ_1, λ_2, λ_3 étant arbitraires, la quantité $(\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w)$ ne diffère que par la notation de celle que j'ai précédemment (n° 5) appelée $F(x, y, z)$; par suite, au point a, cette quantité est infiniment petite de l'ordre h. Ainsi le premier facteur de A dans la formule (11) est infiniment petit de l'ordre $2h$. Voyons maintenant le second facteur. Soient Ω le point (ξ, η, ζ), origine du système circulaire (Σ) qui correspond à (S), et α le point correspondant à a. Les coordonnées de α sont $\xi + d\xi$, $\eta + d\eta$, $\zeta + d\zeta$. Le second facteur de A ne diffère que par un facteur fini de la distance de α, à la droite menée par Ω et le point dont les coordonnées sont X, Y, Z, c'est-à-dire à une droite arbitraire menée par Ω. L'ordre infinitésimal du second facteur de A est donc le même que celui de la distance $\Omega\alpha$. Je désigne cet ordre par σ. Donc l'ordre infinitésimal de A est $(\sigma + 2h)$. D'ailleurs Oa est, par hypothèse, infiniment petit de l'ordre n. Il en est donc de même de ds. Donc $\frac{A}{ds}$ est de l'ordre $(\sigma - n + 2h)$. En considérant successivement tous les points qui répondent aux solutions étrangères, on aura une somme $\Sigma(\sigma - n + 2h)$ de nombres analogues. Soit maintenant Γ la somme analogue pour la fonction Δ, le nombre des solutions étrangères est $\Gamma + \Sigma(\sigma - n + 2h)$. D'ailleurs, le degré de B est égal à $(2q + m - 3)$; par suite, en désignant par γ la classe de la courbe Σ, j'ai

$$(14) \qquad k\gamma = (2q + m - 3)m - \Sigma(\sigma - n) - 2\Sigma h - \Gamma.$$

Dans cette équation, la somme Σh s'applique en premier lieu à tous les points pour lesquels on a déjà envisagé la même somme au numéro précédent, c'est-à-dire ceux en lesquels u, v, w s'évanouissent à la fois. Elle s'applique, en second lieu, à d'autres points; mais, en ces derniers, h est nul. Donc Σh a ici le même sens que précédemment; par suite, en vertu de (7), l'équation (14) se change

en

$$(15)\qquad k(\gamma - 2\mu) = m(m-3) - \Gamma - \Sigma(\sigma - n).$$

Pour obtenir la signification du nombre Γ, qui ne dépend que de la courbe S, il suffit de prendre un exemple particulier. Je fais

$$u = x,\qquad v = y,\qquad w = z.$$

Alors la courbe Σ se confond avec S. Les nombres $(\sigma - n)$ sont nuls, et k est l'unité. On a alors, d'après (15), en désignant par c la classe de S,

$$c = m(m-1) - \Gamma.$$

L'égalité (15) peut alors s'écrire

$$(16)\qquad k(\gamma - 2\mu) + \Sigma\sigma = c - 2m + \Sigma n.$$

7. Je suppose maintenant que les courbes S et Σ se correspondent point par point. Le nombre k est alors égal à l'unité ; mais, en outre, d'après le théorème II, σ se change en l'ordre de multiplicité ν du système circulaire (Σ) correspondant à (S). J'ai donc, au lieu de (16),

$$(17)\qquad \gamma - 2\mu + \Sigma\nu = c - 2m + \Sigma n.$$

Cette relation est entièrement symétrique, par rapport aux éléments respectifs des deux courbes. Les systèmes circulaires (S) qui figurent dans Σn sont, d'après l'analyse ci-dessus : 1° ceux qui répondent à des points singuliers de S ; soient T leur nombre et N la somme de leurs ordres de multiplicité ; 2° ceux qui répondent à des points singuliers de Σ, dont les correspondants sur S sont des points simples. Leur nombre, que je désigne par N′, est égal à la somme de leurs ordres de multiplicité, puisque tous ces ordres sont égaux à l'unité. Ainsi

$$\Sigma n = \mathrm{N} + \mathrm{N}'.$$

Soient $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$ les nombres analogues pour Σ. On a

$$\Sigma\nu = \mathfrak{N} + \mathfrak{N}'.$$

Le nombre total t des couples de systèmes circulaires envisagés est

$$t = \mathrm{T} + \mathrm{N}' = \mathfrak{T} + \mathfrak{N}'.$$

Par suite de ces trois relations, l'égalité (17) devient

$$(18) \qquad \gamma - 2\mu + \mathfrak{N} - \mathfrak{T} = c - 2m + \mathrm{N} - \mathrm{T},$$

ce qui démontre la proposition annoncée au début de ce travail.

8. Je n'ai pas à montrer ici, par des applications, l'utilité de cette proposition en Géométrie. J'en ai déjà fait usage en diverses occasions. Je me réserve de montrer une autre fois l'utilité du théorème II. Pour le moment, j'appellerai l'attention sur la relation (16), qui suppose simplement que la courbe (Σ) soit une transformée rationnelle de S, sans exiger la propriété réciproque. Je vais en faire une application.

Je suppose que S soit une courbe qui ne contienne que des branches simples et que Σ soit une droite. Alors l'équation (16) se change en

$$(19) \qquad \lambda = c - 2m + 2k,$$

en désignant par λ la quantité $\Sigma(\sigma - n)$. Quelle est la signification de λ ?

D'après l'hypothèse faite sur S, chaque nombre n est égal à l'unité ; par suite, si O est un point de S, a un point de la même courbe, à distance infiniment petite du premier ordre de O ; et si Ω, α sont les points correspondants sur la droite, que je désigne par D, le nombre σ est l'ordre de l'infiniment petit $\Omega\alpha$. Donc λ *est le nombre des points* Ω *qui sont stationnaires*. On peut encore en donner une autre interprétation, qui résulte du théorème I et de la remarque faite à la suite de ce théorème. Soient O un point de S, Ω le correspondant sur D, et α un point de D infiniment voisin de Ω. Le nombre σ *est égal au nombre des points infiniment voisins de* O, *qui sur* S *correspondent à* α.

On peut, d'une infinité de manières, faire correspondre *un* point d'une droite D à un point d'une courbe quelconque S et, par suite, tirer de l'égalité (19) beaucoup de résultats divers. Je vais donner un exemple. Je considère un système de courbes C de degré μ, défini par ces conditions : chaque courbe C passe par $\frac{\mu(\mu+3)}{2} - n$ points donnés, P, P_1, P_2, ..., et, en outre, à un contact d'ordre $(n-1)$ avec S. Soit L le point de contact d'une

courbe C avec S; à ce point répond une seule courbe C du système. Je mène la tangente à C au point P; cette tangente rencontre une droite donnée D au point A. J'ai ainsi, par le couple (L, A), réalisé entre S et D la correspondance demandée. Je vais en tirer des conséquences. Je désigne par $\varphi(n)$ le nombre des courbes de degré μ que l'on peut mener par $\frac{\mu(\mu+3)}{2} - n$ points donnés, de manière que chacune de ces courbes ait, en outre, un contact d'ordre n avec S. Si je prends un point A à volonté, la tangente de C au point P se trouve déterminée. Le nombre des courbes C qui admettent en P cette tangente est précisément égal à $\varphi(n-1)$, si l'on veut toutefois admettre que, au lieu de deux points distincts, on peut donner un point et la tangente en ce point pour déterminer une courbe de degré μ, assujettie aux autres conditions indiquées, sans changer le nombre des solutions. Pour justifier cette supposition, il faudrait entrer dans quelques développements que j'omets ici. Le nombre des points L, qui correspondent à un point A, est égal au nombre des courbes C dont la tangente en P passe en A. Donc le nombre k est égal à $\varphi(n-1)$.

Je cherche maintenant λ. Le point A peut être stationnaire de deux manières différentes : 1° si la courbe C est stationnaire, c'est-à-dire si elle a un contact d'ordre n avec S. Le nombre des courbes C satisfaisant à cette condition est $\varphi(n)$; 2° si la tangente en P est stationnaire, sans que la courbe C le soit elle-même. Alors deux courbes C consécutives sont tangentes en P à la même droite. Une courbe quelconque du faisceau qu'elles déterminent a, au point L correspondant, un contact d'ordre $(n-2)$ avec S. Mais, parmi les courbes de ce faisceau, il en est une qui passe par un point arbitrairement donné. Donc le nombre des points A, qui sont stationnaires de cette seconde manière, est $\varphi(n-2)$. L'égalité (19) donne donc

$$\varphi(n) + \varphi(n-2) = c - 2m + 2\varphi(n-1).$$

On pourra par là calculer $\varphi(n)$ si l'on connaît $\varphi(0)$. Or, par $\frac{\mu(\mu+3)}{2}$ points, passe une courbe de degré μ. Elle coupe S en $m\mu$ points. Donc $\varphi(0) = m\mu$. En partant de cette valeur, on calculera de proche en proche $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, ..., et l'on obtiendra

$$\varphi(n) = \frac{n(n+1)}{2}(c - 2m) + (n+1)m\mu. \tag{20}$$

On remarquera que la démonstration ne s'applique pas au cas où n a sa valeur maxima, qui est $\frac{\mu(\mu+3)}{2}$, cas dans lequel la formule (20) est cependant exacte encore.

La formule (20) donne *le nombre des courbes de degré μ qui passent par $\frac{\mu(\mu+3)}{2} - n$ points donnés et ont avec une courbe* S, *de degré m et de classe c, des contacts d'ordre n, sous la condition que la courbe* S *ne possède que des branches simples*. Dans le cas où S ne contient aucune singularité, la formule (20) a été donnée par M. de Jonquières ([1]). Dans une autre occasion, j'en donnerai une démonstration très différente et beaucoup plus complète. Je signalerai, en même temps, quelques cas où cette formule semble en défaut, et j'expliquerai les causes qui produisent cette circonstance ; mais ici, j'ai voulu simplement, par une application si importante, montrer le parti que l'on peut tirer de la formule (19).

([1]) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 63, 1866, p. 423.

SUR LE

CONTACT DES COURBES PLANES

AVEC LES CONIQUES
ET LES COURBES DU TROISIÈME DEGRÉ.

Bulletin de la Société mathématique, t. IV, 1875-1876, p. 59.

1. Parmi les espèces, en nombre indéfini, de points particuliers dont la théorie du contact nous révèle l'existence sur les courbes planes, je me propose ici d'en considérer spécialement deux. J'envisagerai les points en lesquels une courbe se rapproche plus qu'en tout autre point, en premier lieu d'une conique, en second lieu d'une courbe du troisième degré ou *cubique*. Les premiers ont déjà attiré l'attention de plusieurs géomètres, notamment de MM. Cayley, Zeuthen, Painvin. Ils ont reçu de M. Cayley le nom de *points sextactiques*, généralement adopté. Les seconds ne me paraissent pas avoir été étudiés jusqu'à présent. Le problème que je me propose ici consiste à trouver le nombre de ces points sur une courbe algébrique offrant des singularités quelconques. Pour résoudre ce problème, j'établirai d'abord une proposition générale, propre à fournir la solution de beaucoup de questions analogues. Ce sera l'objet du paragraphe I. Dans les paragraphes II et III, je résoudrai le problème relatif au contact des coniques, puis le problème relatif au contact des ubiques.

I.

2. Soit $U(x, y) = 0$ une équation algébrique. Je suppose que, pour une valeur ξ de la variable x, les racines y se répartissent en divers *systèmes circulaires*. On sait que la propriété caractéristique

de ces systèmes circulaires est la suivante : *Soit n le nombre des racines comprises dans l'un d'eux; ces n racines forment, pour les petites valeurs de $(x-\xi)$, une seule et même fonction synectique de $(x-\xi)^{\frac{1}{n}}$*. Par suite, ces n racines sont représentées à la fois par les équations

$$(1) \qquad x-\xi=t^n, \quad y=F(t),$$

où $F(t)$ est une fonction synectique pour les petites valeurs de t, c'est-à-dire développable en série convergente, suivant les puissances entières et ascendantes de t. Le cas où des racines y seraient infinies ne fait pas exception. La fonction $F(t)$ se compose alors de la somme de quelques termes, dans lesquels les exposants de t sont négatifs, et d'une série convergente.

Soit maintenant $\Phi(x,y)$ une fonction entière. Si l'on prend pour x une valeur quelconque et pour y successivement toutes les racines de $U=0$, on obtient la résultante en x des équations $\Phi=0$, $U=0$, en égalant à zéro le produit de toutes les expressions de $\Phi(x,y)$. Soit $R(x)=0$ cette résultante, sous forme entière ; on a

$$(2) \qquad R(x)=\Pi\,\Phi(x,y).$$

Si, dans cette identité, on fait $x=\xi$, on devra, dans le second membre, mettre successivement pour y tous les développements tels que $F\left[(x-\xi)^{\frac{1}{n}}\right]$. Par suite, si ξ est une racine de $R(x)$, voici comment on pourra évaluer l'ordre de multiplicité de cette racine. Substituons dans $\Phi(x,y)$ à x et y les expressions (1) ; ordonnons le résultat suivant les puissances ascendantes de t. Soit h le degré de t au premier terme. Soient, de même, h', h'', ... les nombres analogues obtenus en considérant les autres systèmes circulaires de racines répondant à la valeur ξ de x. L'ordre de multiplicité de la racine ξ de $R(x)$ est égal à $h+h'+h''+\ldots$.

Pour faciliter le langage, je dirai que le nombre h est *l'ordre de la fonction $\Phi(x,y)$ relativement au système circulaire* (1). On voit que *la somme des ordres de la fonction Φ, relativement à tous les systèmes circulaires de racines y de $U(x,y)=0$, qui répondent à toutes les valeurs finies de x, est égal à la somme des ordres de multiplicité des racines de $R(x,y)$, c'est-à-dire au degré de cette résultante.*

Je vais transformer ce dernier énoncé, en considérant dans l'équation (2) une valeur infiniment grande de x. Pour une telle valeur de x, les racines y se répartisssent en groupes dont le type est contenu dans les équations

$$(3) \qquad x = t^{-n}, \qquad y = \mathrm{F}(t),$$

dans lesquelles n est un entier positif, et F a la même signification que précédemment. Je substitue dans (2) à x et y les expressions (3). Soit $(-k)$ le degré de t au premier terme. Soient $(-k')$, $(-k'')$, ..., les nombres analogues obtenus en opérant de même avec les autres expressions analogues à (3). Le degré de $\mathrm{R}(x)$ est $k + k' + k'' + \ldots$. J'applique ici, comme on le voit, un procédé d'élimination bien connu.

On peut considérer les équations (3) comme cas particulier des équations (1). Il suffit pour cela d'admettre que, dans (1), n est un entier positif ou négatif. Alors le nombre $(-k)$ est, d'après la définition ci-dessus, l'ordre de $\Phi\,(x, y)$ relativement au système circulaire (3). Voici donc l'énoncé que j'obtiens au lieu du précédent :

Théorème I. — *La somme des ordres d'une fonction entière* $\Phi(x, y)$, *relativement à tous les systèmes circulaires de racines* y *d'une équation algébrique* $\mathrm{U}(x, y) = 0$, *correspondant à toutes les valeurs finies ou infinies de* x, *est nulle.*

L'avantage que présente cette forme d'énoncé consiste en ce que la proposition peut de la sorte être étendue à des fonctions plus générales. Soit, par exemple, une fonction rationnelle, quotient de deux fonctions entières, $\psi(x, y)$, $\theta(x, y)$. L'ordre du quotient relativement à un système circulaire est égal à la différence des ordres de ψ et de θ. Par suite :

Théorème II. — *La somme des ordres d'une fonction rationnelle de* x *et* y, *relativement à tous les systèmes circulaires de racines* y *d'une équation* $\mathrm{U}(x, y) = 0$, *correspondant à toutes les valeurs finies ou infinies de* x, *est nulle.*

Sous une forme plus usitée, mais moins appropriée aux applications que j'ai en vue, le théorème II exprime que *le nombre des*

zéros d'une fonction algébrique quelconque d'une variable est égal au nombre de ses infinis. Il importe d'observer que *le théorème II s'applique sans modification à une fonction rationnelle de x, y et des dérivées de y.* Car, en vertu de l'équation $U(x, y) = 0$, ces dérivées s'expriment rationnellement au moyen de x, y. Donc la fonction considérée ne diffère pas au fond d'une fonction rationnelle de x et y seuls.

3. Voici une dernière proposition préparatoire, très simple, et qui vraisemblablement n'est pas nouvelle :

Soit D *un déterminant composé de la ligne*

$$x^{q_0}, \quad x^{q_1}, \quad x^{q_2}, \quad \ldots, \quad x^{q_n}$$

et de n lignes formées avec les dérivées premières, secondes, ..., $n^{\text{ièmes}}$ des termes de la première ligne. On a

$$D = Qx^{\sum q - \frac{n(n+1)}{2}},$$

où l'on a posé

$$Q = (q_n - q_0)(q_{n-1} - q_0)\ldots(q_1 - q_0)(q_n - q_1)\ldots(q_2 - q_1)\ldots(q_n - q_{n-1}).$$

Je laisse au lecteur le soin de démontrer cette proposition, et j'arrive maintenant au premier de nos problèmes : *Trouver le nombre des points sextactiques d'une courbe algébrique donnée.*

II.

4. Soit $U(x, y) = 0$ l'équation de la courbe. Soit

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^5 y}{dx^5}\right) = 0$$

l'équation différentielle des coniques. On a à étudier les points de la courbe U, dont les coordonnées satisfont à cette équation différentielle. Un point sextactique ordinaire sera un point simple, dont les coordonnées annuleront f, et tel que les coordonnées d'un point infiniment voisin, pris sur la courbe à distance infiniment petite du premier ordre, rendent f infiniment petit du premier ordre. Si l'on ajoute, au nombre de ces points, la somme des ordres de f, relative-

ment à tous les systèmes circulaires de racines y, pour lesquels cet ordre n'est pas égal à l'unité, la somme totale est nulle, en vertu du théorème II. On voit donc comment ce théorème conduit à la solution de notre problème.

Je considère d'abord les systèmes circulaires correspondant à une valeur infiniment grande de x. Comme il s'agit de l'étude de points jouissant d'une propriété projective, je puis supposer que la courbe U n'a à l'infini que des points simples ordinaires, qui ne soient pas des points sextactiques. Chacun des systèmes circulaires à considérer se compose d'une seule racine, et les équations (3) se réduisent à

$$(4)\quad x = t^{-1},\qquad y = \mathrm{F}(t) = \mathrm{A}t^{-1} + \mathrm{B} + \mathrm{C}t + \ldots = \mathrm{A}x + \mathrm{B} + \frac{\mathrm{C}}{x} + \ldots.$$

Soit β l'ordre de f relativement à un tel système circulaire. Je calculerai tout à l'heure ce nombre. Soit m le degré de U. Il y a m systèmes circulaires tels que (4). La somme des ordres de f relativement à ces systèmes circulaires est $m\beta$.

Si, en un point de U, la tangente est parallèle à l'axe des y, les dérivées de y sont infinies en ce point. Pour la même raison que tout à l'heure, on peut admettre que tous les points analogues sont des points à distance finie, simples et non sextactiques. Soient ξ, η les coordonnées de l'un d'eux ; les deux racines y, qui coïncident avec η pour $x = \xi$, forment le système circulaire

$$(5)\quad \begin{cases} x - \xi = t^2, \\ y - \eta = \mathrm{F}(t) = \mathrm{A}t + \mathrm{B}t^2 + \mathrm{C}t^3 + \ldots \\ \qquad = \mathrm{A}(x-\xi)^{\frac{1}{2}} + \mathrm{B}(x-\xi) + \mathrm{C}(x-\xi)^{\frac{3}{2}} + \ldots. \end{cases}$$

Soit α l'ordre de f relativement à un tel système circulaire. Je calculerai tout à l'heure ce nombre. Soit c la classe de U. Il y a c systèmes circulaires tels que (5). La somme des ordres de f relativement à ces systèmes est $c\alpha$.

Je vais calculer maintenant β et α. A cet effet, je forme d'abord la quantité f.

5. La fonction f est le déterminant composé : 1° de la ligne

$$(\mathrm{A})\qquad 1,\quad x,\quad x^2,\quad y,\quad xy,\quad y^2;$$

2° des cinq lignes obtenues en prenant successivement les dérivées par rapport à x des termes de (A).

Il ne serait pas nécessaire de développer ce déterminant pour résoudre le problème ; mais il se présente ici une circonstance analytique, qui nous échapperait tout d'abord si nous ne commencions par faire ce calcul. Je vais donc effectuer le développement. Je remarque d'abord que f se réduit évidemment à

$$f = \begin{vmatrix} y''' & (xy)''' & (y^2)''' \\ y^{\text{IV}} & (xy)^{\text{IV}} & (y^2)^{\text{IV}} \\ y^{\text{V}} & (xy)^{\text{V}} & (y^2)^{\text{V}} \end{vmatrix}.$$

On pourrait développer les dérivées et faire ensuite les réductions. Une remarque permet d'éviter ce calcul. Conformément à une observation que j'ai déjà eu l'occasion de faire [1], on sait d'avance que f ne contient ni x, ni y, ni y'. On peut donc supposer que ces trois quantités sont nulles. Posant alors

$$(6) \qquad a_i = \frac{y^{(i)}}{1.2.3\ldots i},$$

j'ai pour y le développement

$$y = a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \ldots,$$

et ensuite

$$xy = a_2x^3 + a_3x^4 + a_4x^5 + \ldots,$$
$$y^2 = a_2^2x^4 + 2a_2a_3x^5 + \ldots;$$

par suite, à un facteur numérique près, f se réduit à

$$(7) \qquad f = \begin{vmatrix} a_3 & a_2 & 0 \\ a_4 & a_3 & a_2^2 \\ a_5 & a_4 & 2a_2a_3 \end{vmatrix} = a_2 \begin{vmatrix} a_3 & a_2 & 0 \\ a_4 & a_3 & a_2 \\ a_5 & a_4 & 2a_3 \end{vmatrix} = a_2\varphi.$$

On voit que f se décompose en deux facteurs, a_2 et φ. D'après (6), a_2 est à un facteur numérique près la dérivée seconde y''. En égalant à zéro ce facteur, on a l'équation caractéristique des points d'inflexion. En égalant à zéro le facteur φ, on a l'équation caractéristique des points sextactiques.

Dans tout ce qui suit, j'opérerai sur f et non sur φ ; par suite, pour

---

(1) *Bulletin de la Société mathématique*, t. III, p. 31. [*Œuvres d'Halphen*, I, p. 321.]

trouver l'ordre de φ relativement à un système circulaire, je chercherai l'ordre de f et celui de a_2, et je retrancherai ce dernier du précédent. La différence sera l'ordre de φ.

6. Je vais calculer β, c'est-à-dire l'ordre de φ relativement au système circulaire (4). On voit donc que β est, au signe près, le degré de la partie principale de φ, où l'on substitue à y le développement

$$y = Ax + B + \frac{C}{x} + \ldots.$$

Pour le facteur a_2 ou y'', la partie principale est $\frac{2C}{x^3}$. Elle est, en x, du degré -3 ; en t, du degré 3. Ainsi l'ordre de a_2, relativement au système circulaire (4), est égal à 3.

Pour calculer l'ordre de f, j'observe que, par des combinaisons linéaires, on amène les divers termes de la ligne (A) (n° 5) à avoir pour parties principales, à des facteurs constants près,

$$1, \quad x, \quad x^2, \quad x^{-1}, \quad x^{-2}, \quad x^{-3}.$$

Par suite, d'après la proposition du n° 3, la partie principale de f est du degré -18 en x, ou du degré 18 en t. Si j'en retranche le nombre 3, ordre de a_2, j'ai, pour l'ordre β de φ, $\beta = 15$.

7. Pour calculer α, je calcule d'abord l'ordre de y'' relativement au système circulaire (5). La partie principale de y'' est du degré $-\frac{3}{2}$ relativement à $(x-\xi)$, ou du degré -3 relativement à t. L'ordre de y'' est ainsi égal à -3.

Pour calculer l'ordre de f, je ramène par des combinaisons linéaires la ligne (A) à se composer de termes dont les parties principales sont, à des facteurs constants près,

$$1, \quad (x-\xi)^{\frac{1}{2}}, \quad (x-\xi), \quad (x-\xi)^{\frac{3}{2}}, \quad (x-\xi)^2, \quad (x-\xi)^{\frac{5}{2}}.$$

D'après le n° 3, le degré de la partie principale de f est, en $(x-\xi)$, égal à $-\frac{15}{2}$. Relativement à t, son degré est donc -15. Par suite, l'ordre de φ est $-15+3$ ou -12. Donc $\alpha = -12$.

Soit S la somme des ordres de φ relativement à tous les systèmes circulaires qu'il nous reste à envisager. Conformément au théo-

rème II, on a

$$\text{(8)}\qquad S - 12c + 15m = 0.$$

8. Soient

$$x - \xi = t^n, \qquad y - \eta = F(t) = A t^{n+r} + B t^{n+r+s} + \ldots$$

les équations d'un système circulaire pris parmi ceux qu'il nous reste à considérer. Pour aucun d'eux, la tangente n'est parallèle à l'axe des y; ils répondent d'ailleurs à des valeurs finies de x et de y. Donc les nombres n, r, s, ..., sont des entiers non négatifs. Je dis qu'on peut supposer que r ne soit pas nul, et aussi que ξ et η soient nuls. Si, en effet, r est nul, changeons x en $(x + \xi)$ et y en $(y + \eta + Ax)$. Cette substitution réalise notre hypothèse; mais la fonction f, ne contenant ni x, ni y, ni la dérivée première y', n'est pas altérée par cette substitution. Donc, pour calculer l'ordre de la fonction f relativement à un quelconque des systèmes circulaires considérés, on peut supposer ce dernier ramené à la forme

$$\text{(9)}\qquad x = t^n, \qquad y = A t^{n+r} + B t^{n+r+s} + \ldots,$$

où r est positif. En d'autres termes, on peut supposer que l'origine des coordonnées et l'axe des x soient l'origine et la tangente du système circulaire.

Cela étant, je commence par m'occuper de l'ordre de y'' relativement au système circulaire (9). Il est clair que la partie principale de y'' est, en x, du degré $\frac{r-n}{n}$; par suite, en t, du degré $(r-n)$. Nous rappelant que, pour la fonction y'', les nombres analogues à β et à α sont 3 et -3, nous obtenons incidemment, d'après le théorème II, la relation

$$\text{(10)}\qquad \Sigma(r-n) - 3c + 3m = 0,$$

où le signe sommatoire s'étend à tous les systèmes circulaires pour lesquels les nombres n et r sont différents. Si l'on remarque que chaque point d'inflexion ordinaire $(n = 1, r = 2)$ figure pour une unité dans cette somme, on voit que cette formule donne le nombre des points d'inflexion d'une courbe algébrique quelconque.

9. Je considère maintenant la quantité f. La première ligne de ce

déterminant est

$$(A) \qquad 1, \quad x, \quad x^2, \quad y, \quad xy, \quad y^2.$$

Je cherche son ordre relativement au système circulaire (9). Je suppose, en premier lieu, que r soit différent de n. Comme r est positif, on voit que les parties principales des divers termes de (A) sont toutes de degrés différents, savoir

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 1+\frac{r}{n}, \quad 2+\frac{r}{n}, \quad 2+\frac{2r}{n}.$$

Par suite, d'après la proposition du n° 3, la partie principale de f est, en x, du degré

$$1+2+1+\frac{r}{n}+2+\frac{r}{n}+2+\frac{2r}{n}-15=\frac{4r-7n}{n}.$$

Le degré en t ou l'ordre de f relativement au système circulaire est donc $(4r-7n)$.

Si l'on n'avait pas effectué le calcul du n° 5, ce résultat eût averti que y'' est en facteur dans f. En effet, si l'on suppose $n=1$, $r=2$, on voit que l'ordre de f est l'unité ; donc f s'évanouit en chaque point d'inflexion.

L'ordre de y'', relativement au système circulaire considéré, étant $(r-n)$, celui de φ est $4r-7n-(r-n)=3r-6n$.

Considérant successivement tous les systèmes circulaires pour lesquels les nombres n et r sont différents, c'est-à-dire toutes les branches de la courbe qui ont avec leurs tangentes des contacts dont l'ordre diffère de l'unité ; je pose

$$(11) \qquad G=\Sigma(3r-6n), \qquad r \gtrless n.$$

Le nombre G est un élément de la somme désignée précédemment par S (n° 7).

10. J'examine maintenant ce qui est relatif à un système circulaire pour lequel les nombres n et r sont égaux, c'est-à-dire défini par

$$(12) \qquad x=t^n, \qquad y=A\,t^{2n}+B\,t^{2n+s}+\ldots.$$

Les branches qui composent ce système circulaire ont, avec leur tangente à l'origine, des contacts du premier ordre. Si le nombre n est l'unité, le système circulaire se réduit à une seule branche.

Je considère encore la ligne (A) du déterminant f (n° 9). Les parties principales des divers termes de cette ligne, sauf le terme y, sont respectivement des degrés 0, 1, 2, 3, 4. Quant au terme y, sa partie principale est du second degré, et disparaît dans le déterminant. Pour la faire disparaître immédiatement, je fais une combinaison linéaire des termes de (A), de telle sorte que la partie principale de cette combinaison soit d'un degré différent des nombres 0, 1, 2, 3, 4. Soient C cette combinaison

$$C = ax^2 + by + cxy + dy^2, \tag{13}$$

et $\frac{\lambda}{n}$ le degré de la partie principale de C. On voit alors (n° 3) que le degré de la partie principale de f est, en x, $\frac{\lambda - 5n}{n}$; par suite, l'ordre de f, relativement au système circulaire (12), est $(\lambda - 5n)$. C'est aussi l'ordre de φ, car celui du facteur y'' est zéro.

Je considère successivement tous les systèmes circulaires pour lesquels le nombre $(\lambda - 5n)$ n'est pas nul, et je pose

$$L = \Sigma(\lambda - 5n). \tag{14}$$

L'équation (8) devient

$$G + L = 12c - 15m. \tag{15}$$

Cette dernière relation contient la solution du problème. Pour s'en convaincre, il suffit d'examiner la signification du nombre $(\lambda - 5n)$, quand on suppose $n = 1$. Dans cette hypothèse, le systéme circulaire (12) se réduit à une branche unique. D'autre part, la quantité C étant infiniment petite de l'ordre λ quand x est infiniment petit du premier ordre, la conique $C = 0$ a, avec la branche de courbe, à l'origine, un contact d'ordre $(\lambda - 1)$.

Il est manifeste qu'en général λ est égal à 5, et le nombre $(\lambda - 5n)$ est alors égal à zéro ; mais, si λ est égal à 6, le nombre $(\lambda - 5n)$ est égal à l'unité. Donc chaque point sextactique figure pour une unité dans L. Si λ est égal à $(5 + h)$ $(h = 1, 2, \ldots)$, c'est qu'alors la courbe a, en un point, avec une conique un contact d'ordre $(4 + h)$. Ce point figure, dans L, pour h unités, et compte pour h points sextactiques. Il suffit donc de calculer directement les éléments $(\lambda - 5n)$ relatifs aux valeurs de n différentes de l'unité, pour conclure de

l'équation (15) le nombre des points sextactiques, les nombres m, c, G étant supposés connus.

Les éléments $(\lambda - 5n)$, qu'on doit calculer directement, sont relatifs uniquement à des points singuliers, et, dans beaucoup de cas, ils sont nuls. Il me reste à dire comment on peut les obtenir. Je suppose qu'on ait reconnu l'existence, sur la courbe considérée, d'un système circulaire de n branches $(n > 1)$, ayant avec la tangente des contacts du premier ordre. Soient alors (12) les équations qui représentent ce système circulaire, ou plutôt soit

$$(16) \qquad y = Ax^2 + Bx^{2+\frac{s}{n}} + \ldots$$

le développement commun qui représente ces n branches. On sait que, dans le développement prolongé suffisamment, on rencontrera nécessairement un exposant fractionnaire. Si le premier exposant fractionnaire est inférieur à 5, il est manifeste que le nombre $\frac{\lambda}{n}$ est égal à cet exposant. Le nombre λ est ainsi trouvé pour ce cas, et l'on voit que $(\lambda - 5n)$ est alors un nombre négatif. Si, au contraire, le premier exposant fractionnaire est supérieur à 5, alors $\frac{\lambda}{n}$ peut être égal ou supérieur à 5 et, en aucun cas, ne peut dépasser cet exposant. Pour reconnaître la valeur de λ, on devra calculer directement les coefficients de C, de manière que les termes du deuxième au quatrième ordre disparaissent. Le nombre $\frac{\lambda}{n}$ est alors égal à l'ordre minimum des termes qui subsistent. On voit que, dans ce cas, le nombre $(\lambda - 5n)$ est nul ou positif.

Les points appelés communément *points de rebroussement de deuxième espèce* nous offrent l'exemple de ces divers cas. On obtient cette singularité en supposant que n soit égal à 2. Soit $\frac{2k+1}{2}$ le premier exposant fractionnaire. Il sera inférieur ou supérieur à 5, suivant que k sera inférieur ou non à 5. Ainsi les rebroussements

$$y = Ax^2 + Bx^{\frac{5}{2}} + \ldots,$$

$$y = Ax^2 + Bx^2 + Cx^{\frac{7}{2}} + \ldots,$$

$$y = Ax^2 + Bx^3 + Cx^4 + Dx^{\frac{9}{2}} + \ldots$$

fournissent au nombre L les éléments -5, -3, -1.

Au contraire, le rebroussement

$$y = Ax^2 + Bx^3 + Cx^4 + Dx^5 + Ex^{\frac{11}{2}} + \ldots$$

donne généralement $\lambda - 5n = 0$. Mais on peut avoir aussi $\frac{\lambda}{n} = \frac{11}{2}$. Si, par exemple, les coefficients B, C, D sont nuls à la fois, chacune des deux branches du rebroussement a un contact d'ordre $\frac{9}{2}$ avec la parabole $y = Ax^2$; et l'on a $\lambda - 5n = 1$.

11. Pour fixer complètement les idées à ce sujet, je considère la courbe représentée par ce dernier développement, ou plutôt la courbe représentée par l'équation en coordonnées triangulaires

$$U = z(yz^4 - Ax^2z^3 - Dx^5)^2 - x^{11} = 0.$$

Cette courbe possède deux points singuliers :

1° Le point Y ($z = 0$, $x = 0$). En ce point, la courbe U se compose d'un système circulaire dont l'ordre de multiplicité est 9. Le développement commun aux neuf branches constituant ce système circulaire est

$$\frac{z}{y} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{11}{9}} + \ldots.$$

La tangente est la droite $z = 0$. D'après des principes connus, l'abaissement que ce point produit dans la classe est égal à 8×11.

2° Le point Z ($x = 0$, $y = 0$). Ce point est un rebroussement :

$$\frac{y}{z} = A\left(\frac{x}{z}\right)^2 + D\left(\frac{x}{z}\right)^5 + \left(\frac{x}{z}\right)^{\frac{11}{2}}.$$

L'abaissement produit dans la classe par ce point est égal à 11; par suite, le degré m étant égal à 11, la classe c est égale à

$$10 \times 11 - 8 \times 11 - 11,$$

c'est-à-dire $c = m = 11$.

De plus, le point Y est l'origine du seul système circulaire pour lequel les nombres r et n soient différents, et l'on a

$$n = 9, \qquad r = 11 - 9 = 2.$$

Donc, en premier lieu, la formule (10) montre que la courbe U possède sept points d'inflexion. Ce résultat est facile à vérifier directement.

Le nombre G est ici égal à -3×16, le nombre $(12c - 15m)$ à -3×11. On a donc, d'après (15),

$$L = 15.$$

Par suite, d'après les remarques du numéro précédent, la courbe U a quinze points sextactiques ; mais, si D est nul, elle n'en a plus que quatorze.

12. Les résultats généraux contenus dans la formule (15) peuvent être énoncés de diverses manières. La forme la plus simple s'obtient comme il suit. Dans (15), je remets pour G son expression, et j'ai

$$L + 3\Sigma(r - 2n) = 12c - 15m.$$

Combinant cette relation avec (10), de manière à éliminer r, et désignant Σn par la lettre N, j'obtiens

$$L = 3(c - 2m + N); \tag{17}$$

d'où l'énoncé suivant :

Théorème III. — *Soient m, c le degré et la classe d'une courbe* U, N *le nombre total des branches de cette courbe ayant avec leurs tangentes des contacts d'ordre différent de l'unité; soit enfin $(4 + l)$ l'ordre du contact d'une branche de* U *avec sa conique osculatrice en un point où cet ordre diffère de* 4, *et où le contact avec la tangente est du premier ordre. On a*

$$\Sigma l = 3(c - 2m + N).$$

13. *Exemples.* — Pour une courbe qui n'a aucune singularité au point de vue des coordonnées ponctuelles, on trouve ainsi $m(12m - 27)$ pour le nombre des points sextactiques. On conclut de là que *les points sextactiques d'une courbe de degré m et de classe c sont sur une courbe de degré $(12m - 27)$, et que les tangentes de la courbe en ces points touchent une courbe de classe* $(12c - 27)$ [1].

[1] *Voir* Cayley, *Philos. Transact.*, t. 155II, 1865, p. 545; Painvin, *C. R. de l'Ac. des Sc.*, t. 78, 1874, p. 437.

Pour une courbe n'ayant que des singularités ordinaires, N est le nombre des points d'inflexion augmenté du double du nombre des points de rebroussement ordinaires. Soit r le nombre de ces derniers, on en conclut pour le nombre des points sextactiques l'expression $12c - 15m + 9r$; ou encore l'expression corrélative $12m - 15c + 9i$, i étant le nombre des inflexions.

En dernier lieu, pour la courbe dont l'équation homogène est

$$x^p y^q = A z^{p+q},$$

p et q étant des entiers positifs premiers entre eux, on a

$$m = c = p + q = N;$$

par suite, le nombre des points sextactiques est zéro, résultat qu'il était aisé de prévoir.

III.

14. En un point quelconque d'une courbe U, on peut généralement mener une cubique ayant, en ce point, avec U, un contact du huitième ordre. *Trouver le nombre des points en lesquels l'ordre le plus élevé possible du contact entre* U *et une cubique surpasse* 8 ; tel est le problème dont je vais maintenant m'occuper.

Je suivrai ici exactement la même marche que pour le problème précédent. L'équation différentielle à considérer $F = 0$ est celle des cubiques dans le plan. Elle est du neuvième ordre. Son premier membre F est un déterminant composé en premier lieu de la ligne (B)

$$\text{(B)} \qquad 1, \quad x, \quad x^2, \quad x^3, \quad y, \quad xy, \quad x^2y, \quad y^2, \quad xy^2, \quad y^3,$$

et, en second lieu, des neuf lignes obtenues en prenant les dérivées successives des termes de (B) jusqu'au neuvième ordre inclusivement.

Je considère, comme aux n°s 4, 5, 6, les systèmes circulaires de branches infinies et de branches dont les tangentes sont parallèles à l'axe des y. Je désigne par S la somme des ordres de F relativement aux autres systèmes circulaires. Par un calcul entièrement analogue à celui des numéros précités, j'obtiens l'équation suivante, analogue

à (8) :

$$(18) \qquad S - 45c + 60m = 0.$$

Je vais maintenant m'occuper de calculer S. A cet effet, je considérerai, pour les mêmes raisons qu'au n° 8, des systèmes circulaires réduits à la forme

$$(19) \qquad x = t^n, \qquad y = At^{n+r} + Bt^{n+r+s} + \ldots,$$

où r, s, ... sont, comme n, des entiers positifs qui ne peuvent être nuls. Le problème actuel étant plus compliqué que le précédent, on ne devra pas s'étonner de voir se multiplier les cas qu'il va être nécessaire de distinguer.

Je suppose d'abord r différent de n, c'est-à-dire le système circulaire (19) composé de branches ayant avec la tangente des contacts d'ordre différent de l'unité. Dans la question précédente, cette supposition donnait lieu à un résultat simple, qui n'exigeait pas la distinction de plusieurs cas. Cette simplicité provient de ce qu'alors les coniques osculatrices se réduisent à la tangente du système circulaire. Dans la question actuelle, les cubiques osculatrices se réduisent aussi à la tangente si l'ordre $\frac{r}{n}$ du contact de chaque branche avec cette tangente ne peut être reproduit par une branche de cubique ; mais, dans le cas contraire, il existe effectivement une ou plusieurs cubiques osculatrices. C'est ce qui a lieu si le contact exceptionnel $\frac{r}{n}$ est d'ordre 2 ou d'ordre $\frac{1}{2}$. On peut ainsi prévoir d'avance la nécessité de distinguer ici trois cas :

1° $\frac{r}{n}$ différent de 1, de 2 et de $\frac{1}{2}$;

2° $\frac{r}{n} = 2$;

3° $\frac{r}{n} = \frac{1}{2}$.

J'aurai ensuite à examiner ce qui est relatif au cas où les nombres r et n sont égaux, cas dans lequel sont comprises les branches simples ordinaires.

15. Les parties principales des termes de la ligne (B), en vertu des

relations (19), sont, par rapport à x, des degrés

$$(\mathrm{B}') \quad 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1+\frac{r}{n},\ 2+\frac{r}{n},\ 3+\frac{r}{n},\ 2+2\frac{r}{n},\ 3+2\frac{r}{n},\ 3+3\frac{r}{n}.$$

On reconnaîtra que tous ces membres sont différents entre eux si $\frac{r}{n}$ est différent des trois nombres 1, 2 et $\frac{1}{2}$. D'après la proposition du nº 3, il en résulte qu'alors le degré en x de la partie principale du déterminant F est égal à $\left(10\frac{r}{n}-25\right)$: par suite, l'ordre de F relativement au système circulaire est égal à $(10r-25n)$. Je pose

$$\mathrm{H}=\Sigma(10r-25n),$$

la sommation s'appliquant à tous les systèmes circulaires pour lesquels $\frac{r}{n}$ diffère des nombres 1, 2, $\frac{1}{2}$. Le nombre H est un premier élément de la somme S.

16. Je suppose maintenant $\frac{r}{n}=2$. Les nombres qui composent la ligne (B′) sont les suivants :

$$(\mathrm{B}'') \qquad 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9.$$

Le nombre 3 est répété deux fois. On doit donc, dans le déterminant F, remplacer le terme correspondant à l'un de ces nombres, le second par exemple, par une combinaison linéaire de ce terme avec les autres, de telle sorte que le degré de la partie principale de cette combinaison soit différent de tous les autres nombres de la ligne (B″). Soit $\frac{\mu}{n}$ ce degré. On trouve alors, pour l'ordre de F relativement au système circulaire, le nombre $(\mu-8n)$. Ce résultat exige quelques observations.

En premier lieu, supposons $n=1$. Le système circulaire envisagé se réduit alors à une branche simple ayant une inflexion simple à l'origine. On trouvera généralement alors pour μ le nombre 8 ; d'où résulte que $(\mu-8n)$ est nul. Ainsi, pour un point d'inflexion, la quantité F ne s'évanouit pas. C'est, on se le rappelle, le contraire qui se produit à l'égard du déterminant f, considéré dans le problème précédent (nº 9). Soit

$$\mathrm{C}=ax^3+by+cxy+dx^2y+ey^2+fxy^2+gy^3$$

la combinaison des termes de la ligne (B) qu'on a dû faire pour obtenir l'ordre 8 à la partie principale. J'observe que le coefficient du dernier terme, g, est entièrement arbitraire, nul si l'on veut, puisque y^3 est du neuvième ordre. On a donc une infinité de cubiques, représentées par l'équation $C = 0$, et formant un faisceau, dont les contacts au point considéré avec la courbe sont du septième ordre; et il est évident qu'il n'existe aucune cubique ayant, en ce point, avec la courbe un contact du huitième ordre.

En déterminant les coefficients $a, b, \ldots, f$ de C, de manière à faire disparaître les termes d'ordre 3, 4, ..., 7, il peut arriver, dans des cas particuliers, que les termes du huitième ordre disparaissent aussi. Alors toutes les cubiques du précédent faisceau ont, avec la courbe, des contacts du huitième ordre; mais on peut déterminer g de manière à faire disparaître aussi les termes du neuvième ordre. Il existe donc une cubique ayant, avec la courbe, un contact d'ordre égal ou supérieur à 9. En outre, la combinaison C, qu'il faut substituer à y dans la ligne (B) répond à cette dernière cubique, sans quoi le nombre 9 serait répété deux fois dans la ligne (B'') transformée; donc, dans ce cas, le nombre $(\mu - 8n)$ est au moins égal à 2. Ainsi :

Théorème IV. — *En un point d'inflexion simple d'une courbe* U *l'ordre le plus élevé du contact qu'on puisse établir entre cette courbe et une cubique est, en général, égal à* 7. *Si cet ordre dépasse le nombre* 7, *il est au moins égal à* 9.

Soit $7 + \omega$ *l'ordre de ce contact* $(n = 1, \mu = 8 + \omega)$, *l'ordre de* F, *relatif à ce point de la courbe* U, *est égal à* ω.

Cette dernière conclusion subsiste dans le cas où n diffère de l'unité, avec cette modification que l'ordre de F relativement au système circulaire est égal à $n\omega$. Quant au nombre ω, il peut être négatif ou positif suivant les cas. Si le premier exposant fractionnaire du développement de y suivant les puissances ascendantes de x est inférieur à 8, soit $\frac{\lambda}{n}$ cet exposant : on a $\omega = \frac{\lambda}{n} - 8$, et ω est négatif. Si le premier exposant fractionnaire est supérieur à 8, ω peut être nul ou positif, mais toujours au plus égal à cet exposant diminué de 8. En résumé, *soit* $(7 + \omega)$ *l'ordre de contact de la cubique osculatrice avec une branche de la courbe* U *en un point où l'ordre du contact*

de cette branche avec sa tangente est égal à 2, *toutes les branches analogues figurent dans* S *par l'élément* $\Sigma\omega$.

17. J'examine maintenant le troisième cas, savoir $\frac{r'}{n} = \frac{1}{2}$. Les nombres qui composent la ligne (B′) sont ici les suivants :

$$(\mathrm{B}''') \qquad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{5}{2}, \quad \frac{7}{2}, \quad 3, \quad 4, \quad \frac{9}{2}.$$

Le nombre 3 se trouve répété deux fois. Il correspond, à la dernière place, au terme y^2 de la ligne (B). On remplacera donc le terme y^2 par une combinaison C′ :

$$C' = ax^3 + bx^2y + cy^2 + dxy^2 + ey^3,$$

dont les coefficients seront choisis de manière que le degré de la partie principale de C′ diffère des nombres 3, $\frac{7}{2}$, 4, $\frac{9}{2}$. Soit $\frac{\nu}{2r'}$ le degré de la partie principale de C′. Alors, d'après la proposition du n° 3, on trouvera aisément que l'ordre de F relativement au système circulaire considéré est $(\nu - 46r')$. Pour calculer le nombre ν, on peut directement former C′ ou bien encore raisonner comme il suit :

L'équation $C' = 0$ est celle d'une cubique ayant un rebroussement au point considéré, et dont les branches ont, en ce point, le contact de l'ordre le plus élevé possible avec les branches du système circulaire envisagé. Les deux branches de C′ sont représentées à la fois par le développement ambigu suivant, qu'on peut déduire de $C' = 0$:

$$(20) \qquad y = \alpha x^{\frac{3}{2}} + \beta x^2 + \gamma x^{\frac{5}{2}} + \delta x^3 + \varepsilon x^{\frac{7}{2}} + \ldots.$$

Les coefficients de ce développement dépendent de quatre arbitraires, à savoir les rapports des coefficients de C′. D'autre part, le développement de y suivant les puissances ascendantes de x, pour la courbe U, commence par un terme d'ordre $\frac{3}{2}$. S'il est de la forme

$$(21) \qquad y = \alpha_1 x^{\frac{3}{2}} + \beta_1 x^2 + \gamma_1 x^{\frac{5}{2}} + \delta_1 x^3 + \varepsilon_1 x^{\frac{7}{2}} + \ldots,$$

on pourra prendre

$$\alpha = \alpha_1, \qquad \beta = \beta_1, \qquad \gamma = \gamma_1, \qquad \delta = \delta_1;$$

alors ε et les coefficients suivants de (20) seront déterminés. D'après des principes connus, si ε diffère de ε_1, on verra aisément que la cubique C' a alors $10r'$ points d'intersection avec U confondus à l'origine. Par suite, le nombre ν est égal à $5r'$. C'est aussi ce qu'on trouverait en considérant directement C'. On voit d'ailleurs que, dans des cas particuliers, le nombre ν peut dépasser 5. Il peut aussi être inférieur à 5. C'est ce qui arrive si, dans le développement (21), il existe un terme dans lequel l'exposant de $x^{\frac{1}{2}}$ soit fractionnaire et inférieur à 7. Alors $\frac{\nu}{2r'}$ est égal au premier de ces exposants fractionnaires.

Considérant tous les systèmes circulaires de branches de la courbe U, ayant de même avec leurs tangentes des contacts d'ordre $\frac{1}{2}$, je pose

$$J = \Sigma(\nu - 46r').$$

Le nombre J est l'élément par lequel l'ensemble de ces systèmes circulaires figure dans la somme S.

18. J'ai maintenant à examiner ce qui est relatif aux systèmes circulaires où les nombres r et n sont égaux, c'est-à-dire à ceux dont les branches ont avec leurs tangentes à l'origine des contacts du premier ordre. On doit s'attendre à trouver ici une complication plus grande que précédemment, puisqu'il s'agit maintenant de branches de courbe dont les singularités portent sur des éléments d'ordre plus élevé.

Dans le cas actuel ($r = n$), les nombres de la ligne (B') sont les suivants :

$$(\mathrm{B^{iv}}) \qquad 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 2,\ 3,\ 4,\ 4,\ 5,\ 6,$$

correspondant à

$$(\mathrm{B}) \qquad 1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ y,\ xy,\ x^2y,\ y^2,\ xy^2,\ y^3.$$

Les nombres 2, 3, 4 sont répétés. Je remplacerai par suite :

1° Le terme x^2y par la combinaison

$$D = ax^2y + by^2 + cxy^2 + dy^3;$$

2° Le terme xy par la combinaison

$$E = a'x^3 + b'xy + c'x^2y + d'y^2 + e'xy^2 + f'y^3; \tag{22}$$

3° Le terme y par la combinaison

$$G = a''x^2 + b''x^3 + c''y + d''xy + e''x^2y + f''y^2 + g''xy^2 + h''y^3. \tag{23}$$

On remarquera que D se décompose en deux facteurs yK, savoir :

$$K = ax^2 + by + cxy + dy^2. \tag{24}$$

L'équation $K = 0$ représente une conique touchant la courbe U à l'origine. L'équation $E = 0$ représente une cubique ayant un point double à l'origine, et dont une des branches touche U en ce point. Enfin l'équation $G = 0$ représente une cubique ordinaire touchant la courbe U au même point.

Les degrés des parties principales des termes de (B), qui restent inaltérés, sont les nombres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Le facteur y de D étant du second ordre, et D devant être d'un ordre différent des nombres 4, 5, 6, il en résulte que l'ordre de K doit différer des nombres 2, 3, 4 ; par suite $K = 0$, ou, abréviativement, K est la conique osculatrice des branches du système circulaire considéré, ou bien l'une quelconque des coniques osculatrices, s'il en existe une infinité. La considération de la conique K permet de classer les résultats cherchés suivant trois cas, savoir :

Premier cas. — L'ordre du contact de chaque branche du système circulaire avec la conique osculatrice est fractionnaire et quelconque, ou bien encore entier et supérieur au nombre 5.

Deuxième cas. — L'ordre de ce même contact est égal à 5.

Troisième cas. — L'ordre de ce même contact est égal à 4.

Tous les cas sont embrassés par là ; car l'ordre de ce contact, s'il est entier, ne peut être inférieur à 4. Je vais examiner successivement ces trois cas.

19. *Premier cas.* — Soit $\left(\frac{\lambda}{n} - 1\right)$ l'ordre du contact de K avec une branche du système circulaire considéré. D'après les hypothèses

qui caractérisent le premier cas, $\frac{\lambda}{n}$ est fractionnaire ; ou, s'il est entier, il est supérieur à 6.

L'ordre de K est $\frac{\lambda}{n}$; celui de D est $2+\frac{\lambda}{n}$.

Prenons pour E la combinaison xK ; son ordre sera $1+\frac{\lambda}{n}$. Prenons enfin pour G la combinaison K elle-même ; son ordre est $\frac{\lambda}{n}$. Les trois nombres $\frac{\lambda}{n}$, $1+\frac{\lambda}{n}$, $2+\frac{\lambda}{n}$ sont différents entre eux et différents des autres nombres de la ligne (B^{iv}). En effet, ils sont fractionnaires, ou, s'ils sont entiers, le plus petit d'entre eux est supérieur à 6; donc dans le cas actuel, les parties principales des termes de la ligne (B) ont les degrés suivants, après les combinaisons :

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\quad 6,\quad \frac{\lambda}{n},\quad 1+\frac{\lambda}{n},\quad 2+\frac{\lambda}{n}.$$

Il en résulte que l'ordre de F relativement au système circulaire considéré est égal à $(3\lambda - 21n)$. Pour avoir une expression plus simple, je désigne par $(6+a)$ l'ordre du contact d'une quelconque des branches du système circulaire avec K. Alors $(3\lambda - 21n)$ est égal à $3na$; et l'on peut dire simplement que l'élément du nombre S, relatif à toutes les branches analogues, est $3\Sigma a$.

20. *Deuxième cas.* — L'ordre du contact de K avec chaque branche du système circulaire étant égal à 5, la partie principale de K est du degré 6 en x ; donc celle de D est du degré 8. En prenant pour E la combinaison xK, on aura, à la partie principale, le degré 7. Il reste à examiner le degré de la partie principale de G, pour qui l'on ne peut prendre la combinaison K. Si, dans le développement de y suivant les puissances ascendantes de x, il existe des exposants fractionnaires, c'est-à-dire si n n'est pas égal à l'unité, le premier exposant fractionnaire est supérieur à 6, sans quoi K ne pourrait être de l'ordre 6. Si ce premier exposant fractionnaire est inférieur à 9, il est manifeste que le degré de la partie principale de G lui sera égal. Soit alors $\frac{\mu}{n}$ ce degré ; on trouve pour l'ordre de F, relativement à ce système circulaire, le nombre $(\mu - 9n)$.

Si le premier exposant fractionnaire est supérieur à 9, l'ordre $\frac{\mu}{n}$

de G peut être égal à 9 ou surpasser ce nombre, sans pouvoir surpasser le premier exposant fractionnaire. Dans ce cas, comme aussi dans celui où n est égal à l'unité, l'expression $(\mu - 9n)$ fournit l'ordre de F. Je simplifie cette expression en désignant par $(8 + b)$ l'ordre du contact de chaque branche avec la cubique osculatrice. Il en résulte que l'ensemble de toutes les branches analogues fournit au nombre S l'élément Σb. Il ne faut pas perdre de vue que b, s'il est fractionnaire, peut être négatif, mais non inférieur à -1 ; il est nul ou positif s'il est entier, comme on le voit d'après les conditions imposées à $\frac{\mu}{n}$.

Par exemple, pour un point sextactique ordinaire, le nombre b est généralement égal à zéro ; mais il peut arriver qu'en un point sextactique le contact d'une courbe avec une cubique puisse s'élever au-dessus du huitième ordre. Alors le nombre b est l'excès de l'ordre de ce contact sur le nombre 8.

21. *Troisième cas.* — L'ordre du contact de K avec chaque branche du système circulaire étant égal à 4, la partie principale de K est, en x, du degré 5, et celle de D du degré 7. On ne peut plus prendre pour E la combinaison xK, dont l'ordre serait égal à 6. Je considère donc la combinaison E en elle-même. On peut manifestement y faire disparaître les termes de degrés entiers jusqu'au septième degré inclusivement; donc le degré de la partie principale de E est au moins égal à 8, s'il est entier. S'il est fractionnaire, il est égal à l'unité augmentée du premier exposant fractionnaire figurant dans le développement de y. Comme la partie principale de K est du cinquième degré, ce premier exposant fractionnaire surpasse nécessairement le nombre 5. L'équation $E = 0$ représente, ainsi que je l'ai déjà observé, une cubique ayant à l'origine un point double, et une branche tangente à la courbe U. L'ordre du contact de la branche de cubique avec la branche de courbe U est inférieur de deux unités au degré en x de la partie principale de la quantité E. Il sera nécessaire de subdiviser le cas actuel en plusieurs autres, suivant l'ordre du contact de la branche de courbe avec la cubique E, osculatrice au point considéré. Désignons par i l'ordre de ce contact.

1° *i fractionnaire et inférieur à 7.* — Dans le développement de y suivant les puissances ascendantes de x, le premier exposant frac-

tionnaire est alors $(i+1)$. Le terme affecté de cet exposant ne peut disparaître dans G, et, comme $(i+1)$ est inférieur à 8, ce nombre est précisément le degré en x de la partie principale de G. Il en résulte pour l'ordre de F la valeur $2n(i-7)$, qui est négative. Je pose, pour ce cas, $i=7-g$. L'ensemble des systèmes circulaires analogues figure donc dans la somme S par l'élément $-2\Sigma g$.

2° *i entier et inférieur à 7.* — J'ai fait observer que l'ordre de E, s'il est entier, est au moins égal à 8. D'ailleurs, cet ordre est $(i+2)$; donc, si i est entier et inférieur à 7, il ne peut être que 6. Dans le développement de y suivant les puissances ascendantes de x, le premier exposant fractionnaire est nécessairement supérieur à 7. S'il est en même temps inférieur à 9, l'ordre de G lui est nécessairement égal. Dans le cas opposé, l'ordre de G est égal ou supérieur au nombre 9. On en tire aisément la conclusion suivante : je désigne par $(8+d)$ l'ordre du contact de la branche de courbe considérée avec sa cubique osculatrice G. L'ensemble des branches analogues fournit au nombre S l'élément Σd. On ne doit pas perdre de vue que d peut être négatif; il est alors fractionnaire et supérieur à -2.

3° *i égal à 7.* — Dans ce cas, l'ordre de E est égal à 9. Par suite, le premier exposant fractionnaire, dans le développement de y, est supérieur à 8. Il en résulte, pour G, l'ordre 8, en général ; de plus, il est impossible que, dans G, le terme du huitième ordre disparaisse de lui-même ; car alors les deux cubiques E, G auraient plus de neuf points d'intersection réunis à l'origine, ce qui ne se peut. Donc, dans ce cas, les degrés des parties principales de K, E, G sont 7, 9, 8. Il en résulte pour F l'ordre zéro; donc les branches considérées n'interviennent pas dans la somme S.

4° *i supérieur à 7.* — Pour la même raison, l'ordre de la partie principale de G est égal à 8. Si je pose $i=7+e$, j'ai, pour l'élément fourni à la somme S par les branches analogues, l'élément Σe. On voit que le cas précédent est compris dans ce dernier, où l'on doit faire alors $e=0$.

22. Les résultats des numéros précédents, depuis le n° 15, donnent en résumé la formule

$$H+J+\Sigma\omega+3\Sigma a+\Sigma b+\Sigma d+\Sigma e-2\Sigma g=45c-60m. \tag{25}$$

Dans cette formule, chaque point simple en lequel l'ordre du contact de la courbe U avec la cubique osculatrice est égal à 9, figure pour une unité dans Σd. Dans le cas exceptionnel où ce point est en même temps sextactique, il ne figure pas dans Σd, mais, pour une unité également, dans Σb.

Je modifierai quelque peu la formule (25) comme il suit. Désignant provisoirement par T la somme

$$\mathrm{T} = \Sigma\omega + 3\Sigma a + \Sigma b + \Sigma d + \Sigma e - 2\Sigma g,$$

je l'écris

$$(26) \qquad \mathrm{H} + \mathrm{J} + \mathrm{T} = 45c - 60m.$$

On a (nos 15 et 17)

$$(27) \qquad \begin{cases} \mathrm{H} = \Sigma(10r - 25n), \\ \mathrm{J} \;= \Sigma(\nu - 46r'). \end{cases}$$

Je reprends la formule (10). Dans $\Sigma(r-n)$, je dois mettre à part ce qui est relatif aux systèmes circulaires qui figurent dans J, et aussi ce qui est relatif à ceux qui figurent dans $\Sigma\omega$.

Pour ceux qui figurent dans J, on a (n° 17) $n' = 2r'$; donc la partie correspondante dans $\Sigma(r-n)$ est $-\Sigma r'$.

Pour ceux qui figurent dans $\Sigma\omega$, on a (n° 15) $r'' = 2n''$. La partie correspondante dans $\Sigma(r-n)$ est donc $\Sigma n''$. La formule (10) s'écrira donc

$$\Sigma(r-n) - \Sigma r' + \Sigma n'' = 3c - 3m.$$

Multipliant les deux membres de cette dernière par (10) et retranchant de (26), j'obtiens, en vertu de (27),

$$\mathrm{T} - 15\Sigma n + \Sigma(\nu - 36r') = 15(c - 2m) + 10\Sigma n''$$

ou

$$\mathrm{T} + \Sigma(\nu - 36r') = 15(c - 2m + \Sigma n + \Sigma n'') - 5\Sigma n''.$$

La somme $\Sigma n + \Sigma n'' + 2\Sigma r'$ est ce que j'ai appelé plus haut (n° 12) le nombre N. C'est le nombre total des branches de la courbe qui ont avec leurs tangentes des contacts dont les ordres diffèrent de l'unité. J'écris donc la dernière formule comme il suit, en introduisant le nombre N,

$$\mathrm{T} + \Sigma(\nu - 6r') = 15(c - 2m + \mathrm{N}) - 5\Sigma n''.$$

Enfin, pour dernière transformation, je vais introduire, au lieu du nombre ν, les ordres des contacts des branches correspondantes avec

les cubiques osculatrices, douées, dans ce cas, d'un rebroussement. Dans le cas d'un rebroussement ordinaire, l'ordre de ce contact est, en général, $\frac{5}{2}$, comme on l'a vu (n° 17). Je le désigne d'une manière générale par $\frac{5}{2}+\theta$. On a alors

$$\frac{\nu}{r'} = 10 + 2\theta;$$

et l'expression $\Sigma(\nu - 6r')$ devient $\Sigma 2r'\theta + \Sigma 4r'$. J'écris le même nombre plus simplement $\Sigma\theta + 2\Sigma n'$. Posant enfin

$$\Sigma n' = \mathrm{N}', \qquad \Sigma n'' = \mathrm{N}'',$$

j'ai la formule suivante

$$\mathrm{T} + \Sigma\theta = 15(c - 2m + \mathrm{N}) - 2\mathrm{N}' - 5\mathrm{N}'',$$

que j'énonce comme il suit :

Théorème V. — *Soient m, c le degré et la classe d'une courbe* U, *et* N *le nombre total des branches de cette courbe ayant avec leurs tangentes des contacts d'ordre différent de l'unité ; distinguons, en outre, sur la courbe* U, *les particularités suivantes, savoir :*

1° *Les branches ayant avec leurs tangentes des contacts d'ordre $\frac{1}{2}$ (elles figurent déjà dans* N). *Soit* N′ *leur nombre ; soit aussi, pour l'une d'elles, $\left(\frac{5}{2}+\theta\right)$ l'ordre le plus élevé du contact qu'on puisse établir entre cette branche et une branche de cubique* (à rebroussement).

2° *Les branches ayant avec leurs tangentes des contacts d'ordre* 2 (*elles figurent également dans* N). *Soit* N″ *leur nombre ; soit aussi, pour l'une d'elles, $(7+\omega)$ l'ordre le plus élevé du contact qu'on puisse établir entre cette branche et une cubique* (à inflexion).

3° *Les branches ayant avec leurs tangentes des contacts du premier ordre, et avec leurs coniques osculatrices des contacts dont les ordres soient ou fractionnaires et d'ailleurs quelconques, ou entiers et supérieurs à* 5. *Soit, pour l'une d'elles, $(6+a)$ l'ordre de ce contact.*

4° *Les branches ayant avec leurs coniques osculatrices des con-*

tacts du cinquième ordre. Soit, pour l'une d'elles, $(8+b)$ *l'ordre de son contact avec la cubique osculatrice.*

5° *Les branches ayant avec leurs coniques osculatrices des contacts du quatrième ordre, une quelconque d'entre elles ayant, en outre, au même point, un contact du sixième ordre avec une branche d'une cubique dont ce point est un point double. Soit, pour l'une d'elles,* $(8+d)$ *l'ordre de son contact avec la cubique osculatrice.*

6° *Les branches ayant avec leurs coniques osculatrices des contacts du quatrième ordre, une quelconque d'entre elles ayant, en outre, au même point, un contact d'ordre fractionnaire et inférieur à 7 avec une branche d'une cubique dont ce point est un point double. Soit* $(7-g)$ *l'ordre de ce contact.*

7° *Les branches ayant avec leurs coniques osculatrices des contacts du quatrième ordre, une quelconque d'entre elles ayant, en outre, au même point, un contact d'ordre égal ou supérieur à 7 avec une branche d'une cubique dont ce point est un point double. Soit* $(7+e)$ *l'ordre de ce contact.*

On a, entre tous ces nombres, la relation

$$(28)\qquad \begin{cases} \Sigma\theta+\Sigma\omega+3\Sigma a+\Sigma b+\Sigma d+\Sigma e-2\Sigma g \\ \quad =15(c-2m+\mathrm{N})-2\mathrm{N}'-5\mathrm{N}''. \end{cases}$$

23. La relation (28) et le théorème V sont assurément bien compliqués; mais ils ne me semblent guère susceptibles d'être simplifiés sans restreindre la généralité. On remarquera que c'est uniquement parmi les particularités 4° et 5° que se trouvent les points en lesquels le contact entre la courbe et une cubique ordinaire s'élève au-dessus du huitième ordre. L'existence de la particularité 4° exige une condition, tandis qu'au contraire la particularité 5° existe, en général, sur toute courbe donnée.

Je me contenterai d'appliquer la formule (28) aux exemples du n° 13. Pour une courbe qui n'a aucune singularité au point de vue des coordonnées ponctuelles, tous les termes du premier membre de (28) sont nuls, sauf le terme Σd, qui est le nombre des points en lesquels le contact de la courbe avec une cubique est du neuvième ordre. Dans le second membre, N′ est nul. Les nombres N et N″

coïncident. C'est le nombre des points d'inflexion. On a ainsi :

$$\Sigma d = 15m(3m - 7).$$

Pour une courbe qui n'a que des singularités ordinaires, et qui, en outre, en ses points d'inflexion et de rebroussement, n'a pas de contact exceptionnel avec une cubique, on a

$$\Sigma d = 15(c - 2m + i + 2r) - 4r - 5i,$$

i étant le nombre des inflexions et r celui des rebroussements. Ces deux nombres sont liés d'ailleurs par la relation

$$i - r = 3(c - m).$$

En dernier lieu, soit la courbe dont l'équation homogène est

$$x^p y^q = \Lambda z^{p+q},$$

p et q étant des entiers positifs, premiers entre eux. On doit ici supposer, en outre, $p + q$ différent de 3. Les nombres N′ et N″ sont nuls. Le second membre et, par suite, Σd se réduisent à zéro.

THÉORÈME CONCERNANT LES SURFACES

DONT LES

RAYONS DE COURBURE PRINCIPAUX SONT LIÉS PAR UNE RELATION.

Bulletin de la Société mathématique, t. IV, 1875-1876, p. 94.

Les surfaces dont les rayons de courbure principaux, en chaque point, sont liés par une relation, satisfont à une équation aux dérivées partielles du troisième ordre, indépendante de cette relation. Le théorème que je désire démontrer ici consiste en une interprétation géométrique très simple de cette équation. On obtient ce théorème en substituant aux éléments du troisième ordre de la surface considérée leurs expressions en fonction des éléments du second ordre de la surface lieu des centres de courbure principaux de la première. Pour faire cette substitution, je me servirai de divers résultats que j'ai obtenus dans une Note *Sur un point de la théorie des surfaces* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 25 janvier 1875) [1].

Soit (M) une surface. Je considère un point M de cette surface et les deux rayons de courbure principaux A, L en ce point. Soient

$$d\left(\frac{1}{A}\right) = A\,dx + B\,dy, \qquad d\left(\frac{1}{L}\right) = C\,dx + D\,dy$$

les différentielles totales des inverses de ces rayons de courbure. L'équation aux dérivées partielles, qui exprime que A et L sont liées par une relation, peut s'écrire

$$\text{(1)} \qquad AD - BC = 0.$$

[1] [*Œuvres d'Halphen*, t. I, p. 333.]

Pour employer les mêmes notations que dans ma Note précitée, je désigne par μ et m les deux centres de courbure principaux de (M) au point M. La surface des centres de courbure principaux étant appelée abréviativement la *développée*, μ et m sont les points *associés* de cette développée qui correspondent à M. Je désigne par ρ_1, ρ_2 et par r_1, r_2 les rayons de courbure principaux de la développée en μ et m, et enfin par τ et t les courbures des sections normales faites dans la développée en μ et en m par les plans des sections principales de (M) dont les rayons de courbure sont respectivement Λ et L. Avec ces notations, et en prenant pour axes la normale et les tangentes principales de (M) en M, j'ai, suivant la Note précitée, les formules suivantes :

$$(2) \qquad A = \frac{1}{t\Lambda^3}, \qquad B = -\frac{(L-\Lambda)^2}{tr_1r_2\Lambda^2 L}, \qquad C = -\frac{(\Lambda - L)^2}{\tau\rho_1\rho_2 L^2\Lambda}, \qquad D = \frac{1}{\tau L^3}.$$

Ces expressions portées dans (1) donnent

$$(3) \qquad r_1 r_2 \rho_1 \rho_2 = (L-\Lambda)^4.$$

Ainsi :

Théorème. — *Soit* (M) *une surface dont les rayons de courbure principaux en chaque point sont liés par une relation ; soient* m, μ *les centres de courbure principaux relatifs à un même point de* (M). *Le produit des quatre rayons de courbure principaux de la surface lieu des points* m, μ *en deux points associés est constamment égal à la quatrième puissance de la distance de ces points.*

Telle est la proposition que j'avais en vue d'établir. Elle devient illusoire pour deux cas particuliers : les cas où (M) est une surface de révolution ou une surface développable. Voici maintenant une remarque. Dans la Note déjà citée, j'ai indiqué, pour une surface du second degré, les relations

$$\rho_1\rho_2 = -3(L-\Lambda)^2\frac{\Lambda}{L}, \qquad r_1 r_2 = -3(\Lambda - L)^2\frac{L}{\Lambda}.$$

On en conclut

$$(4) \qquad r_1 r_2 \rho_1 \rho_2 = 9(L-\Lambda)^4.$$

Les équations (3) et (4) sont incompatibles. On en conclut que, parmi les surfaces du second degré, les cylindres, les cônes et les

surfaces de révolution sont les seules dont les rayons de courbure principaux en chaque point soient liés par une relation. On sait aussi qu'il existe, en général, sur une surface quelconque, des points en lesquels cette surface a un contact du troisième ordre avec chaque surface du second degré d'un certain faisceau. Par suite, si les rayons de courbure principaux en chaque point de la surface considérée sont liés par une relation, ce faisceau se compose de cylindres, de cônes ou de surfaces de révolution.

Toute équation aux dérivées partielles peut être considérée à deux points de vue : comme définissant une famille de surfaces ou comme définissant un lieu de points sur une surface. A ce second point de vue, l'équation (1) définit, sur une surface quelconque, un lieu de points dont on peut demander la propriété géométrique commune. Je vais l'indiquer succinctement,

En chaque point d'une surface, il existe une direction dans laquelle une des courbures principales est stationnaire, et une seconde direction dans laquelle l'autre courbure principale est également stationnaire. En tout point pour lequel la relation (1) est satisfaite, ces deux directions coïncident. J'ajoute qu'aux points correspondants sur la développée, la relation (3) a également lieu, et enfin que ce lieu de points n'existe pas sur les surfaces du second degré.

SUR UNE SÉRIE

DE

COURBES ANALOGUES AUX DÉVELOPPÉES.

Journal de Mathématiques, t. II, 1876, p. 87.

L'étude des fonctions abéliennes et des théories géométriques qui s'y rattachent a fait accorder une attention particulière aux transformations *uniformes*. On entend par là les transformations qui changent une courbe algébrique en une autre lui correspondant *point par point*. Il en est qui jouissent d'une propriété spéciale et importante : elles conduisent d'une courbe ayant des singularités quelconques à une transformée qui ne possède que des singularités ordinaires ([1]). L'objet de ce Mémoire est l'étude d'une transformation uniforme particulière, de définition géométrique, jouissant de cette propriété.

Soit S une courbe plane et algébrique qu'il s'agit de transformer. Je prends une conique arbitraire, dans le même plan. Je considère un point de S, la tangente en ce point, et enfin la polaire du même point relativement à la conique. L'intersection de cette tangente et de cette polaire engendre une courbe S^1, qui est une transformée de S et lui correspond point par point. Par la même construction, on déduit de S^1 une nouvelle transformée S^2, et ainsi de suite. Une courbe quelconque S^i de cette série correspond point par point à la courbe initiale S. Je prouverai dans ce Mémoire que, quelle que soit la courbe S, il existe toujours un nombre fini et déterminé, tel que toutes les trans-

([1]) *Voir*, à ce sujet, deux Notes, l'une de M. Nöther (*Gœtt. Nachr.*, 1871), l'autre de l'auteur du présent Mémoire (*C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. 80, 1875, p. 638). [*Œuvres d'Halphen*, t. I, p. 358.]

formées S^i, de rang supérieur à ce nombre, ne possèdent que des singularités ordinaires. Ainsi la transformation géométrique très simple, par laquelle on passe de S à S^1, répétée un nombre fini de fois, constitue une transformation uniforme jouissant de la propriété demandée.

La courbe S^1 a déjà été considérée à d'autres points de vue, notamment par M. Laguerre. Au lieu de la figure formée par S et S^1, qu'on envisage une figure corrélative Σ, Σ^1. La courbe Σ^1 comprend, comme cas particulier, la développée de Σ. Par là, l'étude des courbes S^i se rattache à celle des développées successives d'une même courbe. J'ai eu déjà, dans un *Mémoire sur les points singuliers* ([1]), l'occasion de m'occuper de ces développées, et j'ai obtenu le théorème suivant : *A partir d'un certain rang, les degrés et les classes des développées successives d'une courbe algébrique quelconque forment deux progressions arithmétiques de même raison.* On verra, dans le Mémoire actuel, que les courbes S^i jouissent de propriétés analogues.

Ce travail se rattache encore au Mémoire précité, en ce que je m'y appuie sur plusieurs propriétés des points singuliers. Dans le paragraphe I, je rappelle ces propriétés, et je donne quelques formules nécessaires pour la suite. Ces formules sont utiles dans un grand nombre de questions analogues.

Dans le paragraphe II, j'étudie les points singuliers des courbes S^i, et je parviens au théorème principal, consistant en ce que ces courbes n'ont que des singularités ordinaires, pourvu que leur indice soit supérieur à une certaine limite.

Dans le paragraphe III, je détermine les degrés et les classes des courbes S^i : j'obtiens incidemment plusieurs résultats déjà connus, entre autres la formule qui donne explicitement le *genre* d'une courbe quelconque ([2]). Je trouve enfin une loi uniforme à laquelle les degrés et les classes des courbes S^i obéissent toujours, quelle que soit la courbe initiale, pourvu que l'indice i soit supérieur à la limite ci-dessus.

Enfin, dans le paragraphe IV, j'étudie les modifications que

([1]) Ce Mémoire sera inséré au *Recueil des savants étrangers* (Voir *Comptes rendus*, t. 80, 1875, p. 97). [*Œuvres d'Halphen*, t. I, p. 298.]

([2]) Voir *C. R. de l'Acad. des Sc.*, t. 78, 1874, p. 1833. [*Œuvres d'Halphen*, t. I, p. 312.]

subissent les résultats précédents dans un cas particulier. J'en déduis, en le précisant et le complétant, le théorème rappelé plus haut, et qui concerne les développées.

I.

1. Les considérations qui vont suivre ont pour point de départ une proposition relative aux fonctions algébriques, qu'on peut énoncer ainsi :

Soit y une fonction algébrique de x, et dont n valeurs s'évanouissent avec x : 1° pour une valeur infiniment petite de x, n valeurs de y sont infiniment petites; 2° ces n valeurs de y se répartissent en groupes tels que, si Q est le nombre de ces valeurs contenues dans un quelconque de ces groupes, ces Q valeurs de y forment une seule et même fonction uniforme de $x^{\frac{1}{Q}}$ [1].

Ainsi s'introduit au sujet, soit des valeurs critiques des fonctions, soit des points singuliers des courbes algébriques, la considération de fonctions uniformes d'une puissance fractionnaire de la variable. C'est sur de telles fonctions que j'ai à donner ici quelques détails, en admettant comme connue la proposition ci-dessus.

Soit donc y une fonction uniforme de $x^{\frac{1}{Q}}$, s'évanouissant avec x. Pour de petites valeurs de x, y est développable en série suivant les puissances entières et positives de $x^{\frac{1}{Q}}$, c'est-à-dire suivant des puissances ascendantes et fractionnaires de x. Soit $\frac{p}{q}$ l'exposant de x dans le premier terme de la série, cet exposant étant réduit à sa plus simple expression : p et q sont deux entiers positifs, premiers entre eux, et qui peuvent être égaux à l'unité. En outre, q est un diviseur de Q. Je considère maintenant parmi les exposants suivants le premier de ceux qui, réduits à leur plus simple expression, n'aient pas pour dénominateurs q ou des diviseurs de q. Soit m_1 cet exposant; je le mets sous la forme

$$m_1 = \frac{p}{q} + \frac{p_1}{qq_1},$$

[1] Puiseux, *Mémoire sur les fonctions algébriques* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1re série, t. XV, 1850, p. 365).

où p_1 et q_1 sont des entiers positifs, premiers entre eux, et dont le second ne peut être l'unité. En outre qq_1 est un diviseur de Q, car qq_1 est le plus petit dénominateur commun à $\frac{p}{q}$ et m_1. Je considère ensuite, parmi les exposants suivants, le premier de ceux qui, réduits à leur plus simple expression, n'aient pas pour dénominateurs qq_1 ou des diviseurs de qq_1. Soit m_2 cet exposant ; je le mets sous la forme

$$m_2 = \frac{p}{q} + \frac{p_1}{qq_1} + \frac{p_2}{qq_1q_2},$$

où p_2 et q_2 sont des entiers positifs, premiers entre eux, et dont le second ne peut être l'unité. En outre, qq_1q_2 est un diviseur de Q. En poursuivant de la sorte, je distingue une suite d'exposants de la forme

$$m_k = \frac{p}{q} + \frac{p_1}{qq_1} + \frac{p_2}{qq_1q_2} + \ldots + \frac{p_k}{qq_1q_2\ldots q_k},$$

où p_k et q_k sont deux entiers positifs, premiers entre eux, le second ne pouvant être l'unité ; et, en outre, $qq_1q_2\ldots q_k$ est toujours un diviseur de Q. Pour cette raison, le nombre de ces exposants est limité. Soit m_s le dernier d'entre eux. Les exposants de tous les termes suivants ont pour dénominateurs des diviseurs de $qq_1q_2\ldots q_s = \mathrm{Q}'$. Ainsi la série considérée est une fonction uniforme de $x^{\frac{1}{\mathrm{Q}'}}$. On peut donc supposer $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}'$. Les exposants $m_1, m_2, \ldots, m_s$ jouent, dans beaucoup de questions, un rôle prépondérant. Souvent même ce sont les seuls éléments qu'on ait besoin de connaître relativement à la fonction y. Pour cette raison, j'emploie la notation suivante, qui m'a paru d'un usage commode. Par la relation

$$(1) \qquad y = \left[\frac{p}{q}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots, \frac{p_s}{q_s}\right](x),$$

j'indique que les exposants *caractéristiques* $m_1, m_2, \ldots, m_s$, du développement de y suivant les puissances croissantes de x, sont formés au moyen des deux séries de nombres $p, p_1, \ldots,$ et $q, q_1, \ldots,$ d'après la règle

$$m_k = \frac{p}{q} + \frac{p_1}{qq_1} + \frac{p_2}{qq_1q_2} + \ldots + \frac{p_k}{qq_1q_2\ldots q_k}.$$

Outre les exposants caractéristiques, on a parfois besoin de consi-

dérer aussi les coefficients correspondants. J'indique alors ces coefficients *caractéristiques* en écrivant

$$y = \left[(a)\frac{p}{q},\ (a_1)\frac{p_1}{q_1},\ (a_2)\frac{p_2}{q_2},\ \ldots,\ (a_s)\frac{p_s}{q_s}\right](x); \tag{2}$$

cette notation signifie que le terme d'exposant m_k est $a_k\, x^{m_k}$.

Si deux fonctions y et z de la variable x sont représentées par deux développements dont les exposants caractéristiques soient respectivement les mêmes, ainsi que les coefficients correspondants, je l'exprime abréviativement en écrivant $y \equiv z$.

2. Voici quelques formules relatives au calcul de l'algorithme (2), et dont il sera fait usage dans le cours de ce Mémoire. Je les donne sans démonstration ; le lecteur y suppléera sans difficulté. Ces formules sont relatives, les unes à une seule fonction, les autres à deux fonctions d'une même variable. Plusieurs d'entre elles sont susceptibles de généralisation ; il est entendu que je ne les donne ici que pour les cas dont j'ai besoin actuellement.

Soit y, représenté par la formule (2) ; on en déduit

$$x\frac{dy}{dx} = \left[\left(\frac{p}{q}a\right)\frac{p}{q},\ (m_1 a_1)\frac{p_1}{q_1},\ (m_2 a_2)\frac{p_2}{q_2},\ \ldots,\ (m_s a_s)\frac{p_s}{q_s}\right](x), \tag{3}$$

$$y^m = x^{(m-1)\frac{p}{q}}\left[(a^m)\frac{p}{q},\ (ma^{m-1}a_1)\frac{p_1}{q_1},\ (ma^{m-1}a_2)\frac{p_2}{q_2},\ \ldots,\ (ma^{m-1}a_s)\frac{p_s}{q_s}\right](x), \tag{4}$$

$$\frac{1}{1-y} \equiv 1 + y, \tag{5}$$

$$x = \left[(b)\frac{q}{p},\ (b_1)\frac{p_1}{q_1},\ (b_2)\frac{p_2}{q_2},\ \ldots,\ (b_s)\frac{p_s}{q_s}\right](y), \tag{6}$$

avec les relations suivantes entre les coefficients $a, \ldots$ et $b, \ldots$:

$$a^q b^p = 1, \qquad \frac{pab_k}{qba_k} = -a^{\frac{R_k}{p}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, s), \tag{7}$$

formule où l'on a posé

$$R_k = \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_1 q_2} + \ldots + \frac{p_k}{q_1 q_2 \ldots q_k}. \tag{8}$$

Les formules suivantes sont relatives à deux fonctions, y et z. La fonction y est toujours représentée par la formule (2) ; la fonction z

est représentée par

$$(9)\qquad z=\left[(\alpha)\frac{\pi}{q},\ (\alpha_1)\frac{\pi_1}{q_1},\ (\alpha_2)\frac{\pi_2}{q_2},\ \ldots,\ (\alpha_s)\frac{\pi_s}{q_s}\right](x).$$

Il s'agit de mettre sous une forme analogue la somme, le produit et le quotient des deux fonctions ; je ne considère ici que des cas particuliers :

1° Si l'on a

$$\pi>p,\qquad \pi_1\geqq p_1,\qquad \pi_2\geqq p_2,\qquad \ldots,\qquad \pi_s\geqq p_s,$$

il en résulte

$$(10)\qquad y+z\equiv y.$$

2° Si l'on a

$$\pi=p,\qquad \pi_1=p_1,\qquad \pi_2=p_2,\qquad \ldots,\qquad \pi_s=p_s,$$

il en résulte

$$(11)\quad y+z=\left[(a+\alpha)\frac{p}{q},\ (a_1+\alpha_1)\frac{p_1}{q_1},\ (a_2+\alpha_2)\frac{p_2}{q_2},\ \ldots,\ (a_s+\alpha_s)\frac{p_s}{q_s}\right](x),$$

sous la condition

$$\alpha_k+a_k\gtrless 0\qquad (k=0,1,2,\ldots,s).$$

3° Si l'on a

$$\pi_1>p_1,\qquad \pi_2\geqq p_2,\qquad \pi_3\geqq p_3,\qquad \ldots,\qquad \pi_s\geqq p_s,$$

il en résulte

$$(12)\qquad x^{-\frac{\pi}{q}}yz\equiv\alpha y,$$

$$(13)\qquad \alpha x^{\frac{\pi}{q}}\cdot\frac{y}{z}\equiv y.$$

4° Si l'on a

$$\pi_1=p_1,\qquad \pi_2=p_2,\qquad \pi_3=p_3,\qquad \ldots,\qquad \pi_s=p_s,$$

il en résulte

$$(14)\quad x^{-\frac{\pi}{q}}yz=\left[(a\alpha)\frac{p}{q},(a_1\alpha+a\alpha_1)\frac{p_1}{q_1},\ (a_2\alpha+a\alpha_2)\frac{p_2}{q_2},\ \ldots,\ (a_s\alpha+a\alpha_s)\frac{p_s}{q_s}\right](x),$$

sous la condition

$$a_k\alpha+a\alpha_k\gtrless 0\qquad (k=1,2,\ldots,s).$$

On a, en outre, pour le quotient des deux fonctions,

$$(15)\quad \alpha^2 x^{\frac{\pi}{q}} \frac{y}{z} = \left[(a\alpha)\frac{p}{q}, (a_1\alpha - a\alpha_1)\frac{p_1}{q_1}, (a_2\alpha - a\alpha_2)\frac{p_2}{q_2}, \ldots, (a_s\alpha - a\alpha_s)\frac{p_s}{q_s} \right](x),$$

sous la condition

$$a_k\alpha - a\alpha_k \lesseqgtr 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, s).$$

Les formules suivantes se rapportent au problème de l'élimination de x entre les équations (2) et (9), de manière à obtenir une relation entre y et z. Je ne considère que des cas particuliers.

1° Si l'on a

$$\pi_1 < p_1, \qquad \pi_2 \leqq p_2, \qquad \ldots, \qquad \pi_s \leqq p,$$

il en résulte

$$(16)\quad z = \left[\left(\alpha a^{-\frac{\pi}{p}}\right)\frac{\pi}{p}, \; (\alpha_1 a^{-t_1})\frac{\pi_1}{q_1}, \; (\alpha_2 a^{-t_2})\frac{\pi_2}{q_2}, \; \ldots, \; (\alpha_s a^{-t_s})\frac{\pi_s}{q_s} \right](y)$$

avec

$$t_k = \frac{\pi}{p} + \frac{\pi_1}{pq_1} + \frac{\pi_2}{pq_1q_2} + \ldots + \frac{\pi_k}{pq_1q_2\ldots q_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, s).$$

2° Le cas où l'on a

$$\pi_1 > p_1, \qquad \pi_2 \geqq p_2, \qquad \ldots, \qquad \pi_s \geqq p_s$$

se traitera aisément par l'emploi de la formule (16), en intervertissant les deux variables y et z.

3° Si l'on a

$$\pi_1 = p_1, \qquad \pi_2 = p_2, \qquad \ldots, \qquad \pi_s = p_s,$$

il en résulte

$$(17)\qquad z = \left[\left(\alpha a^{-\frac{\pi}{p}}\right)\frac{\pi}{p}, \; (A_1)\frac{p_1}{q_1}, \; (A_2)\frac{p_2}{q_2}, \; \ldots, \; (A_s)\frac{p_s}{q_s} \right](y),$$

formule dans laquelle on a posé

$$(18)\qquad A_k = \frac{a^{-t_k}}{pa}(pa\alpha_k - \pi\alpha a_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots, s).$$

L'exactitude de la formule (17) est d'ailleurs subordonnée à la condition

$$pa\alpha_k - \pi\alpha a_k \gtrless 0.$$

Enfin, si l'on considère une autre fonction u, qui ne diffère de y

que par une fonction uniforme de x, commençant par un terme du premier degré

$$u = y - cx + \ldots,$$

et qu'on ait

$$\pi_1 \leqq p_1, \qquad \pi_2 \leqq p_2, \qquad \ldots, \qquad \pi_s \leqq p_s,$$

il en résulte

$$(19) \quad z = \left[\left(\alpha c^{-\frac{\pi}{q}} \right) \frac{\pi}{q}, \; (\alpha_1 c^{-t_1}) \frac{\pi_1}{q_1}, \; (\alpha_2 c^{-t_2}) \frac{\pi_2}{q_2}, \; \ldots, \; (\alpha_s c^{-t_s}) \frac{\pi_s}{q_s} \right] (u).$$

3. Au point de vue algébrique, quand on considère la fonction y de la variable x comme une racine d'une équation algébrique dont les coefficients sont rationnels en x, un développement, tel que celui qui est représenté par la relation (2), s'applique à un groupe de racines. Un tel groupe est désigné habituellement sous le nom de *système circulaire*.

Au point de vue géométrique, quand on considère x et y comme les coordonnées rectilignes d'un point d'une courbe, un développement, tel que celui qu'on vient d'envisager, s'applique à un groupe de branches de la courbe. Si le premier exposant $\frac{p}{q}$ est supérieur à l'unité ces branches ont pour tangente commune, à l'origine, la droite $y = 0$, et ont toutes avec cette droite des contacts d'ordre $\frac{p-q}{q}$. Le nombre de ces branches est $qq_1 q_2 \ldots q_s = \mathrm{Q}$. Ce groupe de branches peut être appelé, comme je l'ai déjà fait en d'autres occasions, *système circulaire de branches*. Le nombre Q est l'*ordre de multiplicité* de ce système circulaire. On peut aussi, comme le fait M. Cayley, employer le nom de *branche superlinéaire*, en remplaçant cette désignation par celle de *branche linéaire* pour le cas où Q est l'unité. Le point aux environs duquel le développement (2) est applicable, et qui est ici l'origine des coordonnées, sera dit l'*origine* du système circulaire. On démontre aisément que les nombres caractéristiques de (2) restent les mêmes si l'on change l'axe des y. Ils seront dits les *nombres caractéristiques* du système circulaire de branches.

Si le premier exposant $\frac{p}{q}$ est inférieur à l'unité, l'équation

$$(20) \qquad y = \left[\frac{p}{q}, \frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_s}{q_s} \right] (x)$$

représente des branches dont la tangente est l'axe des y. J'applique la formule (6), et j'ai

$$(21) \qquad x = \left[\frac{q}{p}, \frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_s}{q_s}\right](y).$$

L'équation (20), donnant lieu à (21), où $\frac{q}{p}$ est supérieur à l'unité, représente elle-même un système circulaire de $pq_1 q_2 \dots q_s$ branches, dont les nombres caractéristiques sont $\frac{q}{p}, \frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_s}{q_s}$.

Enfin il reste à examiner le cas où $\frac{p}{q}$ est égal à l'unité, c'est-à-dire $p = q = 1$. Soit a le coefficient du premier terme du développement (20), et changeons de variable en posant

$$y - ax = y'.$$

Le développement de y' suivant les puissances ascendantes de x commence par un terme de degré supérieur à l'unité. Pour connaître ce terme, il faudrait connaître dans (20) le second terme effectif.

D'une manière générale, on voit qu'il peut se présenter deux cas :

1° Au second terme du développement (20) l'exposant de x est entier. Soit $n+1$ cet entier ; on aura alors, pour le développement de y', la forme

$$(22) \qquad y' = \left[\frac{n+1}{1}, \frac{p_1 - nq_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots, \frac{p_s}{q_s}\right](x).$$

Il est clair d'ailleurs que l'entier n est nécessairement inférieur à $\frac{p_1}{q_1}$; par suite, ce cas ne peut se présenter si $\frac{p_1}{q_1}$ est inférieur à l'unité.

2° Au second terme du développement (20), l'exposant de x est fractionnaire. Cet exposant est alors $1 + \frac{p_1}{q_1}$, et l'on a

$$(23) \qquad y' = \left[\frac{p_1 + q_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots, \frac{p_s}{q_s}\right](x).$$

Les équations (22) et (23) représentent toutes deux des systèmes circulaires de branches, dont l'ordre de multiplicité est le même, à savoir $Q = q_1 q_2 \dots q_s$.

II.

4. Soient $S=0$ et $C=0$ les équations d'une courbe S et d'une conique C. Soit m un point de S. On considère la polaire de m relativement à C, et l'intersection m_1 de cette polaire et de la tangente à S en m. Le point m_1 engendre une transformée $S^{(1)}$ de S, dont l'étude fait l'objet de ce Mémoire.

Je cherche les expressions des coordonnées du point m_1. J'emploie des coordonnées homogènes x, y, z, les minuscules désignant les coordonnées de m, et les majuscules, les coordonnées courantes. En figurant les dérivées partielles par des indices, suivant l'usage, j'ai, pour les équations de la polaire de m et de la tangente en m à S,

$$XC_1 + YC_2 + ZC_3 = 0,$$
$$XS_1 + YS_2 + ZS_3 = 0,$$

en sorte que les coordonnées de m_1, intersection de ces deux droites, sont proportionnelles aux déterminants du tableau

$$(1)\qquad \begin{Vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ S_1 & S_2 & S_3 \end{Vmatrix}.$$

A cause de

$$S_1 x \;\;+ S_2 y \;\;+ S_2 z \;\;= 0,$$
$$S_1\, dx + S_2\, dy + S_3\, dz = 0,$$

S_1, S_2, S_3 sont proportionnels aux déterminants du tableau

$$(2)\qquad \begin{Vmatrix} x & y & z \\ dx & dy & dz \end{Vmatrix}.$$

En observant, en outre, qu'on a

$$C_1 x \;\;+ C_2 y \;\;+ C_3 z \;\;= 2C,$$
$$C_1\, dx + C_2\, dy + C_3\, dz = dC,$$

on peut transformer les déterminants (1) comme il suit. On a

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} C_1 & C_2 \\ S_1 & S_2 \end{vmatrix} = \frac{\lambda}{S_3} \begin{vmatrix} x & y \\ dx & dy \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C_1 & C_2 \\ S_1 & S_2 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} dC & 2C \\ dz & z \end{vmatrix},$$

où λ désigne le rapport commun de S_1, S_2, S_3 aux déterminants (2).

Je dis qu'il résulte de là, pour les coordonnées de m_1,

$$(4)\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{x\,dC - 2C\,dx}{dC}, \\ y_1 = \dfrac{y\,dC - 2C\,dy}{dC}, \\ z_1 = \dfrac{z\,dC - 2C\,dz}{dC}. \end{cases}$$

En effet, d'après (3), ces coordonnées sont proportionnelles aux seconds membres de (3). Pour qu'elles leur soient égales, il suffit donc que ces seconds membres satisfassent à la relation linéaire qui lie les coordonnées homogènes x, y, z : c'est ce qu'il est très aisé de vérifier.

Je transforme les numérateurs des seconds membres (4) en prenant pour variable indépendante $\frac{x}{z}$, que je désigne par ξ, et en remplaçant, en même temps, $\frac{y}{z}$ par η. Posant

$$(5)\quad \frac{x_1\,dC}{z^3\,d\xi} = \alpha, \qquad \frac{y_1\,dC}{z^3\,d\xi} = \beta, \qquad \frac{z_1\,dC}{z^3\,d\xi} = \gamma,$$

$$(6)\quad 2C = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy,$$

on obtient aisément, en dénotant les dérivées par des accents,

$$(7)\quad \begin{cases} \alpha = -(a'' + b'\xi + b\eta) \quad + \xi^2(b + b''\xi + a'\eta)\left(\dfrac{\eta}{\xi}\right)', \\ \beta = -(a'' + b'\xi + b\eta)\eta' - \xi^2(b' + a\xi + b''\eta)\left(\dfrac{\eta}{\xi}\right)', \\ \gamma = \quad b' + a\xi + b''\eta \quad + \quad (b + b''\xi + a'\eta)\eta'. \end{cases}$$

Je vais faire usage des équations (7) de la manière suivante :

Je considérerai un système circulaire (S) de branches de la courbe S et j'étudierai le système circulaire (S^1), qui lui correspond sur la transformée S^1. A cet effet, je prendrai pour côté $y=0$ et pour sommet $y=0$, $x=0$ du triangle de référence, la tangente et l'origine de (S). Le système circulaire (S) sera alors représenté par un développement tel que celui qui a été considéré plus haut (§ I, n° 1); ce développement sera celui de η suivant les puissances de ξ. Je disposerai des autres indéterminées du triangle de référence de manière à simplifier les calculs. Pour cette raison, si la droite $y=0$ n'est pas

tangente à la conique de transformation C, et si, en outre, le point $y=0$, $x=0$ n'est pas sur cette conique, je prendrai pour triangle de référence le triangle conjugué relativement à C, qui est déterminé par les données précédentes. De cette façon l'origine du système circulaire (S^1) est au sommet $y=0$, $z=0$. Pour étudier ce système circulaire, on aura donc à considérer le développement d'un des rapports $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\gamma}{\alpha}$, suivant les puissances ascendantes de l'autre. A cet effet, au moyen des formules (7), on calculera, suivant les formules données plus haut (§ I, n° 2), et au moyen du développement de η, les termes caractéristiques des développements de $\frac{\beta}{\alpha}$ et $\frac{\gamma}{\alpha}$, suivant les puissances de ξ; puis, au moyen de l'une de ces formules, on en déduira les termes caractéristiques du développement cherché.

Dans les cas où le triangle de référence, assujetti aux premières conditions, ne peut être conjugué relativement à C, je le déterminerai de telle sorte que les calculs soient analogues. Je vais d'abord traiter le cas précédent.

5. Le triangle de référence étant conjugué relativement à la conique C, les coefficients b, b', b'' sont nuls. Les formules (7) se réduisent à

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} \alpha &= -\ a'' + a'\xi^2\eta\left(\frac{\eta}{\xi}\right)', \\ \beta &= -a''\eta' - a\xi^3\left(\frac{\eta}{\xi}\right)', \\ \gamma &= \quad a\xi + a'\eta\eta'. \end{aligned}\right.$$

Soit maintenant l'équation du système circulaire considéré

$$(9)\qquad \eta = \left(\frac{p}{q}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots, \frac{p_s}{q_s}\right)(\xi), \qquad \frac{p}{q} > 1.$$

Pour calculer les termes caractéristiques des développements de α, β, γ, suivant les puissances ascendantes de ξ, on aura à appliquer quelques-unes des formules du n° 2. On en déduira les développements des rapports β et γ à α, et l'on obtiendra les résultats suivants :

$$(10)\qquad \frac{\beta}{\alpha} = \eta' = \left(\frac{p-q}{q}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots, \frac{p_s}{q_s}\right)(\xi),$$

$$(11)\qquad \frac{\gamma}{\alpha} = -\frac{a}{a''}\xi + \xi^{\frac{p}{q}}\left(\frac{p-q}{q}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots, \frac{p_s}{q_s}\right)(\xi).$$

Dans les formules (9), (10) et (11) je n'ai fait figurer que les nombres caractéristiques, en omettant les coefficients. On remarquera en effet, en effectuant les calculs, que, dans le cas actuel, il est inutile de considérer ces coefficients. La même circonstance a lieu dans l'opération qui reste à faire. On a, en dernier lieu, à déduire de (10) et (11) le développement de $\frac{\beta}{\alpha}$ suivant les puissances ascendantes de $\frac{\gamma}{\alpha}$, ou, du moins, les nombres caractéristiques de ce développement. Pour le faire, on n'a qu'à appliquer la formule (19) du n° 2, et l'on obtient

$$(12)\qquad \frac{\beta}{\alpha}=\left(\frac{p-q}{q},\frac{p_1}{q_1},\frac{p_2}{q_2},\ldots,\frac{p_s}{q_s}\right)\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right).$$

Cette dernière formule permet d'étudier le système circulaire de branches (S^1) correspondant au système circulaire (S), représenté par la formule (9). Je veux, de cette formule, tirer des conséquences non seulement pour la courbe S^1, mais encore pour les transformées successives S^2, S^3, ..., qu'on obtient en appliquant successivement la même transformation à S^2, S^3, ... Je désignerai par (S^2) (S^3), ... les systèmes circulaires qui correspondent à (S), et qui sont sur ces courbes.

On passe de la formule (9) à la formule (12) en supposant que (S) n'a ni son origine ni sa tangente en commun avec la conique C de transformation. Je supposerai que la même condition soit remplie constamment pour (S^1), (S^2), ..., me réservant d'examiner plus loin le cas opposé. J'ai donc à appliquer plusieurs fois de suite le résultat contenu dans la formule (12).

Conformément aux résultats du n° 3 (§ I), les nombres caractéristiques du système circulaire (S^1), représenté par (12), sont :

1° Si $\frac{p-q}{q}>1$ ou $p>2q$,

$$\frac{p-q}{q},\quad \frac{p_1}{q_1},\quad \frac{p_2}{q_2},\quad \ldots,\quad \frac{p_s}{q_s};$$

2° Si $\frac{p-q}{q}<1$ ou $p<2q$,

$$\frac{q}{p-q},\quad \frac{p_1}{q_1},\quad \frac{p_2}{q_2},\quad \ldots,\quad \frac{p_s}{q_s};$$

3° Si $\frac{p-q}{q} = 1$ ou $p=2$, $q=1$,

$$\frac{n+1}{1}, \quad \frac{p_1 - nq_1}{q_1}, \quad \frac{p_2}{q_2}, \quad \ldots, \quad \frac{p_s}{q_s} \quad \text{ou} \quad \frac{p_1+q_1}{q_1}, \quad \frac{p_2}{q_2}, \quad \ldots, \quad \frac{p_s}{q_s};$$

dans le troisième cas, n est un entier inférieur à $\frac{p_1}{q_1}$.

Je suppose, en premier lieu, $q=1$ et $p>2$. Alors le tableau des nombres caractéristiques de (S^1) ne diffère de celui de (S) qu'en ce que le premier de ces nombres est $(p-1)$ au lieu de p. En poursuivant, on parvient, pour $(S^{(p-2)})$, au tableau

$$\frac{2}{1}, \quad \frac{p_1}{q_1}, \quad \frac{p_2}{q_2}, \quad \ldots, \quad \frac{p_s}{q_s}.$$

Je vais montrer qu'on obtient un résultat analogue, si q diffère de l'unité. Pour fixer les idées, je suppose $p>2q$. Le tableau des nombres caractéristiques de (S^1) ne diffère de celui de (S) que par le premier nombre qui, de $\frac{p}{q}$, devient $\frac{p-q}{q}$. Soit t l'entier contenu dans $\frac{p}{q}$; en poursuivant, on parvient, pour $(S^{(t-1)})$, au tableau

$$\frac{p-(t-1)q}{q}, \quad \frac{p_1}{q_1}, \quad \frac{p_2}{q_2}, \quad \ldots, \quad \frac{p_s}{q_s}.$$

Le premier nombre caractéristique est ici inférieur à 2; donc, comme on l'a vu plus haut, le tableau des nombres caractéristiques de (S^t) est

$$\frac{q}{p-tq}, \quad \frac{p_1}{q_2}, \quad \frac{p_2}{q_3}, \quad \ldots, \quad \frac{p_s}{q_s}.$$

En répétant le même raisonnement, je forme une nouvelle suite analogue. J'observe maintenant qu'on a

$$\frac{p}{q} = t + \cfrac{1}{\cfrac{q}{p-tq}}.$$

Soit donc

$$\frac{p}{q} = t + \cfrac{1}{t' + \cdots + \cfrac{1}{t^{(r)} + \cfrac{\alpha}{\beta}}},$$

$t, t', \ldots, t^{(r)}$ étant des entiers positifs et $\frac{\alpha}{\beta}$ une fraction plus petite que

l'unité. Il est clair qu'on trouve, pour le système circulaire correspondant à (S) et appartenant à la transformée de rang $(t+t'+\ldots+t^{(r)})$, le tableau des nombres caractéristiques suivants :

$$\frac{\beta}{\alpha}, \quad \frac{p_1}{q_1}, \quad \frac{p_2}{q_2}, \quad \ldots, \quad \frac{p_s}{q_s}.$$

Enfin, soit le développement de $\frac{p}{q}$ en fraction continue ordinaire

$$\frac{p}{q} = t + \cfrac{1}{t' + \cfrac{1}{t'' + \ldots + \cfrac{1}{t^{(k-1)} + \cfrac{1}{t^{(k)}}}}};$$

$$t + t' + t'' + \ldots + t^{(k-1)} = \tau.$$

On a, pour (S^τ), le tableau

(13) $$\frac{t^{(k)}}{1}, \quad \frac{p_1}{q_1}, \quad \frac{p_2}{q_2}, \quad \ldots, \quad \frac{p_s}{q_s};$$

d'où je conclus, conformément à ce qui a été dit pour le cas où q est l'unité, que le tableau des nombres caractéristiques de $(S^{\tau+t^k-2})$ est

(14) $$\frac{2}{1}, \quad \frac{p_1}{q_1}, \quad \frac{p_2}{q_2}, \quad \ldots, \quad \frac{p_s}{q_s}.$$

Je pose $\tau + t^k = T$, et j'ai cette conclusion : *Si le premier nombre caractéristique* $\frac{p}{q}$ *de* (S) *est différent de* 2, *et que* T *soit la somme des quotients incomplets de la fraction continue ordinaire égale à* $\frac{p}{q}$, *le système circulaire correspondant à* (S) *dans la transformée de rang* $(T-2)$ *a les mêmes nombres caractéristiques que* (S), *sauf que* $\frac{p}{q}$ *est remplacé par le nombre* 2. Je n'ai pas fait figurer, dans cet énoncé, la supposition $q>1$, attendu que cet énoncé comprend le résultat acquis plus haut pour le cas où $q=1$. Il comprend évidemment aussi le cas où $\frac{p}{q}$ est inférieur à 2, bien qu'on ait supposé d'abord $\frac{p}{q}>2$.

Pour être à même de poursuivre cette étude, il faut maintenant s'occuper du cas où le premier nombre caractéristique est égal à 2 ; ce cas

se présente pour (S^{T-2}), quand $\frac{p}{q}$ est différent de 2. Quand $\frac{p}{q}$ est égal à 2, il se présente pour (S); mais je puis encore employer la notation (S^{T-2}), puisque alors T est égal à 2, et que, par suite, l'indice $(T-2)$ est égal à zéro.

Soit donc (13) le tableau des nombres caractéristiques de (S^{T-2}). Comme on l'a vu, celui de (S^{T-1}) sera de l'une des formes

$$\frac{p_1+q_1}{q_1},\quad \frac{p_2}{q_2},\quad \ldots,\quad \frac{p_s}{q_s},$$

$$(15)\qquad \frac{n+1}{1},\quad \frac{p_1-nq_1}{q_1},\quad \frac{p_2}{q_2},\quad \ldots,\quad \frac{p_s}{q_s},$$

n étant un entier inférieur à $\frac{p_1}{q_1}$. Je suppose qu'il soit de la forme (15). Alors on parvient, avec le rang $(T-1)+(n+1)-2=T+n-2$, au tableau

$$(16)\qquad \frac{2}{1},\quad \frac{p_1-nq_1}{q_1},\quad \ldots,\quad \frac{p_s}{q_s}.$$

Je suppose encore que, au rang suivant, on obtienne un tableau analogue à (15), savoir :

$$\frac{n'+1}{1},\quad \frac{p_1-nq_1-n'q_1}{q_1},\quad \frac{p_2}{q_2},\quad \ldots,\quad \frac{p_s}{q_s},$$

où n' est un entier inférieur à $\frac{p_1}{q_1}-n$. On trouvera, au rang

$$(T+n+n'-2),$$

le tableau

$$(17)\qquad \frac{2}{1},\quad \frac{p_1-(n+n')q_1}{q_1},\quad \frac{p_2}{q_2},\quad \ldots,\quad \frac{p_s}{q_s}.$$

Les mêmes choses se reproduiront de la sorte tant qu'une fraction de dénominateur égal à q_1 ne passera pas au premier rang du tableau; mais ce fait se produira forcément. Le type des tableaux (16) et (17) est, en effet,

$$(18)\qquad \frac{2}{1},\quad \frac{p_1-\nu q_1}{q},\quad \frac{p_2}{q_2},\quad \ldots,\quad \frac{p_s}{q_s},$$

où ν est un entier inférieur à $\frac{p_1}{q_1}$ et qui croît constamment. Soit donc t_1 l'entier contenu dans $\frac{p_1}{q_1}$. Le nombre ν ne peut dépasser t_1. S'il l'at-

teint, on a, au rang $(T + t_1 - 2)$, le tableau

$$\frac{2}{1},\quad \frac{p_1 - t_1 q_1}{q_1},\quad \frac{p_2}{q_2},\quad \ldots,\quad \frac{p_s}{q_s},$$

et, comme $\frac{p_1 - (t_1 - 1) q_1}{q_1}$ est inférieur à l'unité, il en résulte, pour (S^{T+t_1-1}), le tableau

$$(19)\qquad \frac{p_1 - (t_1 - 1) q_1}{q_1},\quad \frac{p_2}{q_2},\quad \ldots,\quad \frac{p_s}{q_s}.$$

Si, au contraire, ν n'atteint pas la valeur t_1, il arrive que, d'un tableau tel que (18), relatif à $(S^{T+\nu-2})$, on déduit, pour $(S^{T+\nu-1})$, le tableau

$$\frac{p_1 - (\nu - 1) q_1}{q_1},\quad \frac{p_2}{q_2},\quad \ldots,\quad \frac{p_s}{q_s};$$

mais, de ce dernier, on déduira, en suivant une des règles ci-dessus, le tableau (19) pour le rang $T + \nu - 1 + (t_1 - \nu) = T + t_1 - 1$, c'est-à-dire pour le même rang que précédemment. Par conséquent, *dans tous les cas*, du tableau (14), relatif à (S^{T-2}), on est conduit au tableau (19) relatif à (S^{T+t_1-1}).

Mais maintenant le premier nombre caractéristique est différent de 2, puisque son dénominateur est différent de l'unité. On peut donc appliquer la proposition énoncée plus haut. Soit

$$\frac{p_1}{q_1} = t_1 + \cfrac{1}{t'_1 + \ldots + \cfrac{1}{t_1^{(k_1)}}},\qquad t_1 + t'_1 + \ldots + t_1^{(k_1)} = T_1;$$

il en résulte

$$\frac{p_1 - (t_1 - 1) q_1}{q_1} = 1 + \cfrac{1}{t'_1 + \ldots + \cfrac{1}{t_1^{(k_1)}}},\qquad 1 + t'_1 + \ldots + t_1^{(k_1)} = T_1 + 1 - t_1.$$

Par suite, au rang

$$(T + t_1 - 1) + (T_1 + 1 - t_1) - 2 = T + T_1 - 2,$$

on parviendra au tableau

$$\frac{2}{1},\quad \frac{p_2}{q_2},\quad \ldots,\quad \frac{p_s}{q_s}.$$

Il n'y a plus qu'à répéter les mêmes raisonnements pour parvenir à la conclusion suivante :

Si $T, T_1, T_2, \ldots, T_s$ sont les sommes des quotients incomplets des fractions continues ordinaires égales à $\frac{p}{q}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots, \frac{p_s}{q_s}$, le tableau des nombres caractéristiques relatifs à la transformée de rang

$$(T + T_1 + T_2 + \ldots + T_s - 2)$$

se réduit à $\frac{2}{1}$, c'est-à-dire que, sur cette transformée, au système circulaire considéré correspond une branche simple, ayant avec sa tangente un contact du premier ordre.

Mais il n'est pas nécessaire d'aller jusqu'à ce rang pour obtenir une branche simple. Soit, en effet, b le dernier quotient incomplet de $\frac{p_s}{q_s}$; on voit aisément qu'au système circulaire de rang $(T+T_1+\ldots+T_s-b)$ correspond un tableau réduit au seul nombre b. Ce système circulaire se réduit donc à une branche simple qui toutefois a, avec sa tangente, un contact d'ordre $(b-1)$, c'est-à-dire supérieur à l'unité si b est supérieur à 2.

En résumé, j'ai les théorèmes suivants :

Théorème I. — *Le nombre nécessaire et suffisant des transformations successives qui changent un système circulaire de branches en une branche simple est égal à la somme des quotients incomplets des fractions continues égales respectivement aux différents nombres caractéristiques de ce système circulaire, sauf toutefois le dernier quotient incomplet de la fraction continue égale au dernier nombre caractéristique.*

Théorème II. — *Le nombre nécessaire et suffisant des transformations successives qui changent un système circulaire de branches en une branche simple ayant avec sa tangente un contact du premier ordre est égal à la somme de tous les quotients incomplets des fractions continues précédentes, diminuée de deux unités.*

6. Ainsi que je l'ai fait observer au commencement du numéro précédent, l'exactitude des deux derniers théorèmes est soumise à une restriction. Les raisonnements qui y ont conduit et les théorèmes eux-mêmes cessent d'être exacts si, sur une des transformées considérées, le système circulaire correspondant à (S) a, soit son origine, soit sa

tangente en commun avec la conique de transformation. On peut envisager la formation de ces courbes successives à deux points de vue différents : on peut employer, pour chaque nouvelle opération, une conique nouvelle, ou bien employer toujours la même. Dans le premier cas, on doit simplement compléter les théorèmes ci-dessus par cette restriction, que chaque conique doit être prise de manière à n'avoir en commun avec le système circulaire à transformer ni l'origine, ni la tangente. Dans le second cas, il faut examiner ce qui a lieu.

La condition restrictive étant supposée remplie pour (S), on a pris plus haut, pour triangle de référence, le triangle conjugué par rapport à C, dont le sommet $y=0$, $x=0$, et le côté $y=0$ sont l'origine et la tangente de (S). Cela étant, on a trouvé pour (S^1) l'équation (12). D'après cette équation, l'origine de S^1 est, dans tous les cas, le point $y=0$, $z=0$, qui n'est pas situé sur C. Donc, en premier lieu, l'origine de (S^1) n'est pas sur C. En outre, toujours d'après (12), si $\frac{p}{q}$ est différent de 2, la tangente de (S^1) est l'une des droites $y=0$ ou $z=0$, qui ne sont tangentes à C. Mais, si $\frac{p}{q}$ est égal à 2, la tangente de (S^1) peut être une droite quelconque passant en $y=0$, $z=0$, et cette droite peut être tangente à C. Ainsi la condition restrictive peut n'être pas satisfaite pour une transformée, si, dans la précédente, le système circulaire considéré a pour premier nombre caractéristique le nombre 2. Si cette circonstance se présente, on ne peut plus appliquer aux transformées suivantes les raisonnements du numéro précédent. Ces transformées obéissent alors à une loi qu'on trouvera dans la suite; mais il importe d'observer que, si l'on se propose d'obtenir, au moyen de la transformation dont nous nous occupons, et avec l'emploi d'une seule conique, la réduction d'un système circulaire à une branche simple, on peut toujours y parvenir. Il suffit, en effet, de choisir la conique de manière qu'elle ne remplisse pas certaines conditions bien déterminées, et dont le nombre est limité.

Outre les résultats acquis au sujet des systèmes circulaires, et renfermés dans les théorèmes I et II, il est encore une conséquence simple, mais importante à tirer de l'équation (12), savoir :

Théorème III. — *A toute branche simple dont ni l'origine ni la tangente n'appartient à la conique de transformation correspond, dans la transformée, une branche simple.*

Par suite des théorèmes I et III, on voit que, dans les transformées de rang supérieur à une certaine limite, il ne peut exister de branches superlinéaires que celles dont les correspondantes, dans quelques-unes des transformées précédentes, ont soit l'origine, soit la tangente en commun avec la conique de transformation. Je vais étudier maintenant ce qui est relatif à de telles branches.

Je prends toujours, pour le sommet $y=0$, $x=0$ et pour la droite $y=0$, l'origine et la tangente du système circulaire (S), dont je veux étudier les transformées. Comme, par hypothèse, cette origine ou cette tangente appartient à la conique C, le triangle de référence ne peut être conjugué relativement à C. Je distingue trois cas :

Premier cas : *L'origine est sur la conique, et la tangente ne touche pas cette conique.* — Je complète le triangle de référence par les tangentes à C aux extrémités de la corde $y=0$. J'ai alors

$$2C = a'y^2 + 2b'zx.$$

Deuxième cas : *L'origine n'est pas sur la conique, et la tangente touche la conique.* — Je complète le triangle de référence par la seconde tangente à C, issue de l'origine, et la polaire de ce point. J'ai alors

$$2C = a''z^2 + 2c''xy.$$

Troisième cas : *L'origine et la tangente appartiennent à la conique.* — Je peux, d'une infinité de manières, mettre C sous la forme

$$2C = ax^2 + 2byz.$$

7. J'étudie successivement ces trois cas.

PREMIER CAS : $2C = a'y^2 + 2b'zx$.

Soit

$$(20)\qquad \eta = \left[(A)\frac{p}{q},\ (A_1)\frac{p_1}{q_1},\ (A_2)\frac{p_2}{q_2},\ \ldots,\ (A_s)\frac{p_s}{q_s}\right](\xi),\qquad \frac{p}{q} > ,$$

le système circulaire considéré sur la courbe S. Un calcul facile permettra de déduire des formules (7), et au moyen des formules du

n° 2 (§ I), les résultats suivants :

$$(21)\quad \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\gamma} = -\xi + \dfrac{a'}{b'}\xi\left[\left(\dfrac{2p-q}{q}\mathrm{A}^2\right)\dfrac{p}{q},\ \left(2\dfrac{2p-q+\mathrm{R}_1}{q}\mathrm{AA}_1\right)\dfrac{p_1}{q_1},\ \ldots,\ \left(2\dfrac{2p-q+\mathrm{R}_s}{q}\mathrm{AA}_s\right)\dfrac{p_s}{q_s}\right](\\ \dfrac{\beta}{\gamma} = - \qquad \left[\left(\dfrac{2p-q}{q}\mathrm{A}\right)\dfrac{p}{q},\ \left(\dfrac{2p-q+\mathrm{R}_1}{q}\mathrm{A}_1\right)\dfrac{p_1}{q_1},\ \ldots,\ \left(\dfrac{2p-q+\mathrm{R}_s}{q}\mathrm{A}_s\right)\dfrac{p_s}{q_s}\right](\end{cases}$$

formules où l'on a posé, comme au n° 2 [formule (8)],

$$\mathrm{R}_k = \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_1 q_2} + \ldots + \frac{p_k}{q_1 q_2 \ldots q_k}.$$

De (21) je déduis, d'après la formule (19) du n° 2 (§ I),

$$\frac{\beta}{\gamma} = \left[\frac{p}{q}, \frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_s}{q_s}\right]\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right).$$

Cette dernière formule se traduit par le théorème suivant :

Théorème IV. — *A un système circulaire de branches de la courbe initiale, ayant pour origine un point de la conique de transformation et pour tangente une droite non tangente à cette conique, correspond, dans la transformée, un système circulaire, de même origine, de même tangente, et dont les nombres caractéristiques sont les mêmes.*

Corollaire. — *Il en sera de même pour toutes les transformées successives obtenues avec la même conique.*

DEUXIÈME CAS : $2\mathrm{C} = a'' z^2 + 2 b'' xy$.

Supposant η donné par la formule (20), on trouve

$$\frac{\alpha}{\beta} = \qquad \left[\left(\frac{p}{2}\mathrm{A}\right)\frac{p-q}{q},\quad \left(\frac{p+\mathrm{R}_1}{q}\mathrm{A}_1\right)\frac{p_1}{q_1},\ \ldots,\quad \left(\frac{p+\mathrm{R}_s}{q}\mathrm{A}_s\right)\frac{p_s}{q_s}\right](\xi),$$

$$\frac{\gamma}{\alpha} = -\frac{b''}{a''}\left[\left(\frac{p+q}{q}\mathrm{A}\right)\frac{p}{q},\ \left(\frac{p+q+\mathrm{R}_1}{q}\mathrm{A}_1\right)\frac{p_1}{q_1},\ \ldots,\ \left(\frac{p+q+\mathrm{R}_s}{q}\mathrm{A}_s\right)\frac{p_s}{q_s}\right](\xi),$$

d'où l'on déduit, conformément à la formule (17) du n° 2 (§ I),

$$(22)\qquad \frac{\gamma}{\alpha} = \left[\frac{p}{p-q}, \frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_s}{q_s}\right]\left(\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

On voit que l'origine du système circulaire (S^1) est le point $z = 0$,

$y=0$, lequel est sur C, et que sa tangente est la droite $z=0$, polaire de l'origine du système circulaire primitif. Donc, sur les transformées qui suivent, les systèmes circulaires correspondants obéissent à la loi indiquée au théorème IV.

Il est utile de remarquer que ce deuxième cas rentre dans le précédent. La construction de la transformée S^1 est, en effet, symétrique par rapport à la courbe S et à sa polaire réciproque Σ relativement à C. Or à un système circulaire de S, placé dans le deuxième cas, correspond sur Σ un système circulaire, placé dans le premier cas. Donc, d'après le théorème IV, le système circulaire correspondant, sur S^1, a l'origine, la tangente et les nombres caractéristiques de celui de Σ.

Ayant fait ici la recherche directe des nombres caractéristiques de (S^1), je puis en conclure que ces nombres, donnés par (22), sont ceux qui conviennent au système circulaire (Σ), ainsi qu'on peut s'en assurer aussi par un calcul direct.

TROISIÈME CAS : $2C = ax^2 + 2byz$.

8. En partant toujours de la formule (20), on trouve

$$(23)\quad\left\{\begin{aligned}
\alpha &= b\left[\left(\frac{p-2q}{q}\mathrm{A}\right)\frac{p}{q},\quad \left(\frac{p-2q+\mathrm{R}_1}{q}\mathrm{A}_1\right)\frac{p_1}{q_1},\quad\ldots,\quad\left(\frac{p-2q+\mathrm{R}_s}{q}\mathrm{A}_s\right)\frac{p_s}{q_s}\right](\xi),\\
\gamma &= a\xi + b\left[\left(\frac{p}{q}\mathrm{A}\right)\frac{p-q}{q},\quad \left(\frac{p+\mathrm{R}_1}{q}\mathrm{A}_1\right)\frac{p_1}{q_1},\quad\ldots,\quad\left(\frac{p+\mathrm{R}_s}{q}\mathrm{A}_s\right)\frac{p_s}{q_s}\right](\xi),\\
\beta &= -b\xi^{\frac{p}{q}}\left[\left(\frac{p}{q}\mathrm{A}^2\right)\frac{p-q}{q},\quad \left(\frac{2p+\mathrm{R}_1}{q}\mathrm{A}\mathrm{A}_1\right)\frac{p_1}{q_1},\quad\ldots,\quad\left(\frac{2p+\mathrm{R}_s}{q}\mathrm{A}\mathrm{A}_s\right)\frac{p_s}{q_s}\right](\xi)\\
&\quad - a\left[\left(\frac{p-q}{q}\mathrm{A}\right)\frac{p+q}{q},\quad \left(\frac{p-q+\mathrm{R}_1}{q}\mathrm{A}_1\right)\frac{p_1}{q_1},\quad\ldots,\quad\left(\frac{p-q+\mathrm{R}_s}{q}\mathrm{A}_s\right)\frac{p_s}{q_s}\right](\xi).
\end{aligned}\right.$$

Il suffit de jeter un coup d'œil sur ces formules pour apercevoir la nécessité de distinguer plusieurs cas. En effet, l'expression de β se compose de la somme de deux séries, et les termes caractéristiques de cette somme sont ceux de la première ou de la seconde de ces séries, suivant que p est inférieur ou supérieur à $2q$. J'ai donc à distinguer les cas suivants :

$$\frac{p}{q} < 2, \qquad \frac{p}{q} > 2, \qquad \frac{p}{q} = 2.$$

Soit d'abord $\frac{p}{q} < 2$; on trouve sans peine

$$\frac{\beta}{\gamma} = \left[\frac{p}{q}, \frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_s}{q_s}\right]\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right).$$

Cette formule contient le théorème suivant :

Théorème V. — *A un système circulaire de la courbe initiale, ayant pour origine et pour tangente un point et une tangente de la conique de transformation, et composé de branches ayant avec la tangente des contacts d'ordre inférieur à l'unité, correspond, dans la transformée, un système circulaire de même origine, de même tangente, et dont les nombres caractéristiques sont les mêmes.*

En second lieu, soit $\frac{p}{q} > 2$. Ce cas peut être immédiatement ramené au précédent. En effet, la polaire réciproque de S a pour système circulaire correspondant à (S) un système (Σ), dont l'origine et la tangente sont les mêmes que pour (S) et dont le tableau des nombres caractéristiques est

$$\frac{p}{p-q}, \quad \frac{p_1}{q_1}, \quad \ldots, \quad \frac{p_s}{q_s}.$$

Comme $\frac{p}{p-q}$ est inférieur à 2, on en conclura, d'après le théorème, que ce tableau est aussi celui des nombres caractéristiques de (S'). C'est aussi ce qu'on trouvera aisément par un calcul direct.

En troisième lieu, j'ai à considérer le cas où l'on a $p = 2$, $q = 1$. Ici se présentent les circonstances suivantes, dans les formules (23) :

Le premier terme de l'expression de α disparaît : la série qui figure au second membre de l'expression de γ commence par un terme du premier degré, qui vient se réunir au terme $a\xi$; enfin les deux séries dant la somme compose β ont les mêmes nombres caractéristiques ; par suite, dans la somme, des termes caractéristiques peuvent se détruire. Pour ces raisons, on ne peut, dans le cas actuel, obtenir des conclusions complètes aussi aisément que dans les autres cas. Il me suffira, pour mon objet, de trouver le premier terme caractéristique du système circulaire (S').

Le premier terme de η (20) est $A\xi^2$; son second terme caractéris-

tique est $A_1\,\xi^{2+\frac{p_1}{q_1}}$. Je supposerai, pour faire encore usage des formules (23), que ce soit, non plus le second terme caractéristique, mais le second terme absolu du développement de η. D'après cette convention, q_1 peut être égal à l'unité. Le premier terme de α est alors

$$\alpha = R_1 A_1 \xi^{2+\frac{p_1}{q_1}} + \ldots.$$

Ceux de β et γ sont respectivement

$$(24)\quad \begin{cases} \beta = -A(2Ab+a)\xi^3 - A_1[(4+R_1)Ab+(1+R_1)a]\xi^{3+\frac{p_1}{q_1}} + \ldots, \\ \gamma = (2Ab+a)\xi + (2+R_1)A_1\xi^{1+\frac{p_1}{q_1}} + \ldots. \end{cases}$$

A cause de ces dernières relations, on aperçoit que les résultats sont différents suivant qu'on a

$$(25)\qquad 2Ab + a \gtrless 0,$$

ou que cette quantité est nulle. Il est aisé de voir que le sens de cette condition est le suivant : si l'inégalité (25) a lieu, c'est que chaque branche du système circulaire (S) a, avec C, un contact du premier ordre. Dans le cas opposé, l'ordre du contact s'élève.

Je suppose d'abord que l'inégalité (25) ait lieu. Alors le développement de $\frac{\alpha}{\gamma}$ suivant les puissances ascendantes de $\frac{\beta}{\gamma}$ commence par un terme de degré $\frac{p_1+q_1}{2q_1}$. Par suite, en premier lieu, si p_1 est égal ou supérieur à q_1, l'origine de (S') est le point $y=0$, $x=0$, mais la tangente diffère de $y=0$. Donc les transformées suivantes, en ce qui concerne les systèmes circulaires correspondants, sont régies par le théorème IV.

En second lieu, si p_1 est inférieur à q_1, l'origine et la tangente de (S') sont les mêmes que pour (S) ; mais le premier nombre caractéristique $\frac{2q_1}{p_1+q_1}$ est inférieur à 2. Donc les systèmes circulaires correspondants, dans les transformées suivantes, sont régis par le théorème V.

Soit maintenant le cas où l'inégalité (25) n'a pas lieu, c'est-à-dire supposons

$$(26)\qquad 2Ab + a = 0.$$

Les premiers termes de β et γ sont alors, en vertu de (24) et de (26),

$$\beta = A_1 A b(R_1 - 2)\xi^{3+\frac{p_1}{q_1}} + \ldots,$$
$$\gamma = A_1(R_1 + 2)\xi^{1+\frac{p_1}{q_1}} + \ldots.$$

Il faut observer que R_1 n'est autre chose que $\frac{p_1}{q_1}$, c'est-à-dire un nombre positif. Le premier terme de β peut ainsi être nul, mais non celui de γ. Je suppose d'abord $R_1 \lessgtr 2$. On a alors, pour le premier terme du développement de $\frac{\beta}{\gamma}$ suivant les puissances ascendantes de $\frac{\alpha}{\gamma}$,

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{A(R_1^2 - 4)}{R_1^2}\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^2 + \ldots.$$

Ainsi, pour (S^1), l'origine et la tangente restent les mêmes que pour (S), et de plus on se trouve dans le cas où le premier nombre caractéristique est égal à 2. Soit maintenant

$$A' = \frac{A(R_1^2 - 4)}{R_1^2};$$

on a, en vertu de (26),

$$2A'b + a = -\frac{8Ab}{R_1^2}.$$

Cette quantité n'est donc pas nulle. Donc (S^1) se trouve dans le cas où l'inégalité (24) a lieu, et l'on peut par là connaître la loi des transformations suivantes.

Je suppose enfin $R_1 = 2$. Alors $\frac{\beta}{\gamma}$, développé suivant les puissances croissantes de $\frac{\alpha}{\gamma}$, commence par un terme de degré supérieur à 2 ; par conséquent, (S^1) se trouve dans le cas où le premier nombre caractéristique est supérieur à 2.

Tous les résultats précédents, relatifs à un système circulaire de branches tangentes à la conique de transformation, peuvent se résumer comme il suit :

Théorème VI. — *A un système circulaire tangent à la conique de transformation correspond, dans la suite des transformées successives, construites au moyen de la même conique, une suite de systèmes circulaires ayant tous même origine, même tangente et*

mêmes nombres caractéristiques ; et cela à partir de la courbe initiale elle-même, de la première ou de la seconde transformée, suivant que l'ordre de contact des branches du système initial avec la conique est inférieur, égal ou supérieur à l'unité.

Dans cette suite de systèmes circulaires, l'origine commune est sur la conique, et, suivant le cas, la tangente commune est aussi tangente à la conique, ou ne l'est pas. Si elle lui est tangente, le premier nombre caractéristique commun est inférieur à 2.

9. Je vais maintenant, de l'ensemble des résultats précédents, tirer des conséquences, en envisageant d'abord les transformées qu'on obtient par l'emploi d'une seule conique.

D'après les numéros 5 et 6, un système circulaire (S) donne lieu à une branche simple, dans la transformée dont le rang est donné par le théorème I, à moins que, dans une des précédentes, le système circulaire correspondant n'ait pour tangente une tangente de la conique de transformation. Si ce cas se produit, le système circulaire suivant a son origine sur cette conique (n° 7), et il en est de même de tous ceux qui lui correspondent sur toutes les transformées suivantes (théorème IV). Rapprochant ce résultat des théorèmes III, IV et VI, j'en conclus :

Théorème VII. — *A partir d'un certain rang, les transformées successives d'une courbe algébrique quelconque, obtenues au moyen d'une seule conique, ne contiennent aucune branche superlinéaire dont l'origine ne soit sur la conique de transformation.*

D'après le n° 7, si la courbe de S ne rencontre la conique C qu'en des points simples, sans avoir avec C aucun contact si, de plus, toutes les tangentes communes à S et à C sont des tangentes simples de S, toutes les branches de S^1 dont l'origine est sur C sont des branches simples. Il est aisé, d'après cette observation, de tirer la conclusion suivante :

Théorème VIII. — *Étant donnée une courbe* S, *il est toujours possible de choisir une conique de transformation, de telle sorte que la transformée de* S, *obtenue à un rang donné par l'emploi continu de cette conique, ne contienne aucune branche super-*

linéaire, sous la condition que le rang donné soit supérieur à une limite déterminée qui dépend de S.

Remarque. — *Cette limite n'est autre chose que le plus grand des nombres qu'on obtient en appliquant le théorème I à toutes les branches superlinéaires de* S.

J'envisage, en second lieu, les transformées qu'on obtient au moyen de diverses coniques. Si l'on a soin de prendre ces coniques de telle manière que chacune d'elles ne rencontre la courbe à transformer qu'en des points simples, sans la toucher, et que les tangentes communes soient des tangentes simples de cette courbe, on a, *sous cette réserve*, la proposition suivante :

Théorème IX. — *A partir d'un certain rang, toutes les transformées successives d'une courbe algébrique quelconque, obtenues avec diverses coniques, ne contiennent aucune branche superlinéaire. Ce rang se détermine conformément à la remarque ci-dessus.*

III.

10. Je m'occupe maintenant de déterminer le degré et la classe de la transformée S^1 d'une courbe S. A cet effet, je vais établir quelques formules, qui feront l'objet de ce numéro et du suivant. La construction de la transformée, telle qu'elle est indiquée au n° 4 (§ II), est susceptible d'être généralisée, par la substitution d'une courbe quelconque à la conique C. Je ferai, pour les calculs actuels, cette généralisation, qui n'y apporte, pour ainsi dire, aucun changement ; mais je n'appliquerai ensuite ces calculs qu'au cas simple considéré précédemment.

Soient $S = 0$, $C = 0$ les équations de deux courbes, de degrés m, n, la seconde étant la courbe de transformation. Soit (x, y, z) un point de S ; on prend la droite polaire de ce point relativement à C ; l'intersection de cette droite et de la tangente à S, en (x, y, z), engendre la transformée S^1.

Les droites ont pour équations

$$XC_1 + YC_2 + ZC_3 = 0,$$
$$XS_1 + YS_2 + ZS_3 = 0.$$

Pour que le point (X, Y, Z) où elles se rencontrent soit sur une droite D

$$D = MX + NY + PZ = 0,$$

on a la condition

$$(1) \qquad A = \begin{vmatrix} M & N & P \\ C_1 & C_2 & C_3 \\ S_1 & S_2 & S_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Les intersections de la courbe A et de S sont les points de cette dernière auxquels correspondent des points de la transformée situés sur la droite D. Le nombre de ces intersections donnera ainsi le degré de cette transformée et fera l'objet d'une étude ultérieure. J'aurai aussi recours à une autre forme de A, que j'obtiens comme il suit : j'ai identiquement

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} x & y & z \\ dx & dy & dz \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} A = \begin{vmatrix} D & dD \\ nC & dC \end{vmatrix} S_2,$$

en posant

$$D = M\,x + N\,y + P\,z,$$
$$dD = M\,dx + N\,dy + P\,dz.$$

De la relation (2) je conclus

$$A = S_2 \frac{nC\,dD - D\,dC}{z^2 d\left(\frac{x}{z}\right)}$$

ou, en posant $\frac{x}{z} = \xi$, et $C^{\frac{1}{n}} = U$,

$$(3) \qquad A = \frac{nC^{\frac{n+1}{n}} S_2}{z^2} \frac{d}{d\xi}\left(\frac{D}{U}\right).$$

Dans cette dernière formule, il faut entendre que la dérivée qui figure au second nombre n'est pas une dérivée partielle. Au contraire, $\frac{D}{U}$ étant une fonction homogène et de degré zéro des variables x, y, z est simplement une fonction de deux variables ξ et $\eta = \frac{y}{z}$. Ces deux variables sont liées par l'équation $S = 0$. En prenant la dérivée indiquée dans l'équation (3), il faut considérer η comme fonction de ξ.

L'équation (1) est susceptible d'une interprétation géométrique

simple. Je considère la courbe K

$$K = D^n - \lambda C = 0, \tag{4}$$

λ étant une constante, déterminée de manière que l'équation (4) soit vérifiée par les coordonnées du point (x, y, z) de S, c'est-à-dire que la courbe K passe en ce point, lequel est d'ailleurs censé vérifier l'équation (1). Mais, d'après l'équation (3), l'équation (1) peut s'écrire $d\left(\frac{D}{U}\right) = 0$; ce qu'on transforme aisément en $dK = 0$. Donc la courbe K est tangente à S. Ainsi :

Soit D *une droite passant à l'intersection* m_1 *d'une tangente à une courbe* S *et de la droite polaire du point de contact* m, *relativement à une courbe* C, *de degré* n : *les courbes* K *qui ont avec* C *des contacts d'ordre* $n-1$ *aux* n *points d'intersection de* D *et de* C, *et qui passent au point* m, *y sont tangentes à* S.

L'équation $d\left(\frac{D}{U}\right) = 0$ exprimant que D contient un point m_1 de la transformée, on exprimera que D est tangente à cette transformée en m_1, en joignant l'équation $d^2\left(\frac{D}{U}\right) = 0$. Cette dernière équation étant supposée satisfaite, on en déduira $d^2K = 0$. Donc :

Celle des courbes K *de l'énoncé précédent qu'on obtient en prenant, pour la droite* D, *la tangente au lieu du point* m_1, *a avec* S *un contact du second ordre.*

Je n'indique cette propriété qu'en passant; on pourra reconnaître que c'est une extension d'une propriété connue du cercle osculateur.

11. Les calculs du numéro précédent sont relatifs à la détermination du degré de la transformée S' d'une courbe S. Ceux qui suivent ont trait à la détermination de la classe de cette transformée. La question est d'obtenir l'équation de la tangente à cette transformée sous une forme appropriée au problème dont il s'agit.

Comme on vient de le voir, les équations qui expriment que la droite D est une tangente de la transformée sont les suivantes :

$$d\left(\frac{D}{U}\right) = 0, \qquad d^2\left(\frac{D}{U}\right) = 0.$$

On déduit aisément de là, pour l'équation d'une tangente, la forme suivante, où les majuscules désignent les coordonnées courantes :

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} X & Y & Z & 0 \\ x & y & z & U \\ dx & dy & dz & dU \\ d^2x & d^2y & d^2z & d^2U \end{vmatrix} = 0.$$

Les différentielles sont prises le long de la courbe S. On fera disparaître ces différentielles par des transformations dont je me contente de donner ici le résultat. Je pose

$$V = C_{11}(S_{23}^2 - S_{22}S_{33}) + \ldots + 2C_{12}\ (S_{12}S_{33} - S_{13}S_{23}) + \ldots,$$
$$W = C_1^2\ (S_{23}^2 - S_{22}S_{33}) + \ldots + 2C_1C_2(S_{12}S_{33} - S_{13}S_{23}) + \ldots.$$

Dans ces expressions, les termes non écrits, et suppléés par des points, sont ceux qu'on déduit des termes écrits par la permutation des indices. Soit, en outre,

$$H = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{vmatrix}.$$

L'équation (5) se met sous la forme

$$(6)\qquad G = [nCV - (n-1)W]\sum S_1X + nCH\sum C_1X = 0.$$

Cette dernière équation, si l'on considère X, Y, Z comme données et x, y, z comme des coordonnées courantes, est celle d'une courbe G, dont les intersections avec S sont les points tels que les tangentes à la transformée S', aux points correspondants, passent par le point X, Y, Z.

Je ferai, en outre, usage d'une autre forme de la même équation. Je pose

$$x = z\xi,\qquad y = z\eta,\qquad U = zu.$$

Comme U est une fonction homogène et du premier degré de x, y, z, la fonction u ne dépend que de ξ et de η. Je désigne les dérivées, prises par rapport à ξ le long de la courbe S, par des accents. En partant de l'équation (6), on parvient aisément à la mettre sous la nouvelle forme

$$(7)\qquad E = \eta''(Zu + Xu' - Z\xi u') + u''(Y - X\eta' + Z\xi\eta' - Z\eta) = 0.$$

Cette nouvelle forme est d'ailleurs reliée à (6) par la relation

$$G = \frac{(m-1)^2}{n^2 z^3} C^{\frac{2n-1}{n}} S_{\frac{3}{2}}^{3} E. \tag{8}$$

Telles sont les formules dont je ferai usage.

12. Avant d'appliquer les formules ci-dessus, il convient de rappeler quelques propositions de la théorie des points singuliers. Voici la première :

Étant données deux courbes, le nombre de leurs intersections qui sont confondues en un point est égal au produit des ordres de multiplicité de ce point sur chacune des deux courbes, augmenté de la somme des ordres des contacts des branches de l'une des courbes avec les branches de l'autre, en ce même point.

Étant donnés une courbe et un système circulaire ayant son origine en un point de cette courbe, j'appelle, par définition, *nombre des intersections de la courbe et du système circulaire* le produit des ordres de multiplicité du système circulaire et du point considéré sur la courbe, augmenté de la somme des ordres des contacts des branches du système circulaire avec les branches de la courbe. Grâce à cette définition, la proposition précédente s'énonce ainsi :

Théorème X. — *Étant données deux courbes, le nombre de leurs intersections qui sont confondues en un point est égal à la somme des nombres des intersections de l'une des courbes avec les systèmes circulaires de l'autre, qui ont leurs origines en ce point.*

La proposition suivante donne le moyen de calculer directement le nombre des intersections d'une courbe et d'un système circulaire.

Théorème XI. — *Soit $f(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe sous forme entière. Supposez que x et y soient les coordonnées d'un point d'un système circulaire, et à distance infiniment petite du premier ordre de l'origine de ce système. L'ordre de l'infiniment petit $f(x, y)$, multiplié par l'ordre de multiplicité du système circulaire, est égal au nombre des intersections de la courbe et de ce système circulaire.*

Il est clair que cette proposition n'est pas troublée par l'emploi de coordonnées homogènes. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de déterminer le nombre des intersections d'une courbe $f(x, y, z) = 0$, passant au point $x = 0$, $y = 0$, avec un système circulaire dont l'origine soit en ce point.

Je désigne, comme précédemment, par ξ et η le rapport $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$. Le système circulaire est défini par le développement d'une de ces variables, soit η, suivant les puissances ascendantes et fractionnaires de l'autre, ξ. Si la tangente de ce système circulaire n'est pas la droite $x = 0$, on aura un point à distance infiniment petite du premier ordre de l'origine, et appartenant au système circulaire, en donnant à ξ une valeur infiniment petite du premier ordre, et à η une des valeurs correspondantes. Soit m le degré de $f(x, y, z)$. On a

$$f(x, y, z) = z^m f(\xi, \eta, 1).$$

Par suite, pour le point considéré, comme z a une valeur finie, l'ordre de l'infiniment petit $f(x, y, z)$ est le même que celui de $f(\xi, \eta, 1)$. Soient ω l'ordre de cette quantité et μ l'ordre de multiplicité du système circulaire. D'après le théorème XI, le produit $\mu\omega$ est le nombre des intersections de la courbe et du système circulaire.

Si la tangente du système circulaire est $x = 0$, on peut intervertir, dans le calcul que je viens d'indiquer, le rôle des variables $\xi\eta$. On peut aussi s'en dispenser, par une très petite modification du résultat, sur laquelle je n'insiste pas, n'en devant pas faire usage ici.

13. Il me reste à expliquer maintenant, en peu de mots, l'usage qu'on peut faire de ces résultats dans un grand nombre de questions et, en particulier, dans la question qui fait l'objet de ce Mémoire.

Étant donnée une courbe $S = 0$, je suppose qu'on cherche le nombre de ses points satisfaisant à une condition donnée. J'admets que cette condition puisse être exprimée par une équation entière $f(x, y, z) = 0$. Les points cherchés sont alors les intersections des courbes S et f. Le produit des degrés de ces courbes est donc le nombre cherché ; mais ce n'est là le plus souvent qu'une limite supérieure, et, pour obtenir le nombre précis, il faut tenir compte des solutions étrangères ou multiples. C'est alors qu'on est conduit à examiner l'ordre de multiplicité de chaque solution. A cet effet, on fait usage des

théorèmes X et XI, en considérant successivement chaque système circulaire de la courbe S, à l'origine duquel passe la courbe f. On est donc conduit ainsi à calculer des nombres ω, comme je l'ai expliqué à la fin du numéro précédent.

Si $f(x, y, z)$ est un covariant, circonstance qui se présente chaque fois que la condition donnée est indépendante du triangle de référence, on pourra supposer, sans modifier $f(x, y, z)$, que l'origine et la tangente du système circulaire que l'on considère soient le point $x = 0$, $y = 0$ et la droite $y = 0$. Cette supposition facilite souvent le calcul. En voici un exemple simple, et dont le résultat sera utile pour la suite.

Soit à trouver la classe d'une courbe $S = 0$, c'est-à-dire le nombre des tangentes qu'on peut lui mener d'un point arbitraire X, Y, Z. L'équation de condition est

$$f(x, y, z) = XS_1 + YS_2 + ZS_3 = 0.$$

Soit m le degré de S ; celui de f est $m - 1$. La limite supérieure de la classe est donc $m(m-1)$. Les solutions étrangères sont fournies par les points dont les coordonnées annulent à la fois les dérivées partielles de S, c'est-à-dire par les points multiples. Il s'agit de trouver l'ordre de multiplicité d'une telle solution. Comme $f(x, y, z)$ est un covariant, je puis faire la supposition ci-dessus, pour calculer le nombre des intersections de f avec un système circulaire de la courbe S. Des relations

$$\frac{S_1}{y\,dz - z\,dy} = \frac{S_2}{z\,dx - x\,dz} = \frac{S_3}{x\,dy - y\,dx}$$

je tire, en posant

$$\frac{x}{z} = \xi, \qquad \frac{y}{z} = \eta,$$

prenant ξ pour variable indépendante et dénotant les dérivées par des accents,

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} S_1 &= -S_2\eta', \\ S_3 &= S_2\xi^2\left(\frac{\eta}{\xi}\right)'. \end{aligned} \right.$$

D'après la supposition que l'origine et la tangente du système circulaire sont le point $x = 0$, $y = 0$, et la droite $y = 0$, je dois supposer ξ infiniment petit du premier ordre, et alors η est infiniment

petit d'ordre supérieur. Les équations (9) prouvent alors que S_1 et S_3 sont infiniment plus petits que S_2. L'ordre de l'infiniment petit $f(x, y, z)$ est donc le même que celui de l'infiniment petit S_2. Ainsi :

Théorème XII. — *Soit* O *un point multiple d'une courbe algébrique* $S=0$, *comprenant en* O *plusieurs systèmes circulaires de branches. Considérez l'un de ces systèmes, placez le sommet* $x=0$, $y=0$ *du triangle de référence en* O, *et faites coïncider la droite* $y=0$ *avec la tangente de ce système circulaire. Soit* ω *l'ordre de la quantité infiniment petite* S_2 *quand on met, pour les coordonnées, celles d'un point du système circulaire considéré, à distance infiniment petite du premier ordre de* O. *Soit, en outre,* μ *l'ordre de multiplicité de ce système circulaire. Répétez la même opération pour chacun des systèmes circulaires de la courbe* S, *ayant leur origine en* O. *La somme des nombres analogues à* $\mu\omega$ *est l'abaissement que le point singulier* O *produit dans la classe de la courbe* S.

Par suite, si A est la somme des nombres ainsi calculés pour tous les points multiples de S, la classe c est

$$c = m(m-1) - A. \tag{10}$$

14. J'applique actuellement les principes précédents à la détermination du degré de la transformée S^1 d'une courbe S. L'équation de condition est (n° 10)

$$A = \begin{vmatrix} M & N & P \\ C_1 & C_2 & C_3 \\ S_1 & S_2 & S_3 \end{vmatrix} = 0.$$

A cause de la simplicité du résultat, je fais encore ce calcul pour le cas général où C est une courbe de degré n.

Le degré de S étant m, celui de A est $(m+n-2)$. Le degré de S^1 a donc pour limite supérieure $m(m+n-2)$. J'étudie maintenant l'ordre de multiplicité de chaque solution.

Comme A est un covariant, je puis faire la supposition indiquée plus haut (n° 13). Alors, comme on vient de le voir, S_1 et S_3 sont infiniment plus petits que S_2 ; donc, si C_1 et C_3 ne sont pas infiniment petits tous deux, A est infiniment petit du même ordre que S_2. Il

n'en est plus de même si C_1 et C_3 sont infiniment petits tous deux. Pour ce dernier cas, employons la seconde forme de A [nº 10, formule (3)]

$$(11) \qquad A = \frac{n C^{\frac{n+1}{n}}}{z^2} S_2\left(\frac{D}{C^{\frac{1}{n}}}\right)'.$$

A cause de

$$n C = C_1 x + C_2 y + C_3 z = z(C_1 \xi + C_2 \eta + C_3),$$

on voit que, si C_3 est infiniment petit, il en est de même de C. Comme C est entier et que η est infiniment petit par rapport à ξ, supposé du premier ordre, C est au moins du premier ordre. Soit i cet ordre égal ou supérieur à l'unité. Il résulte de l'équation (11) que l'ordre de A surpasse celui de S_2 précisément de $(i-1)$. Ainsi, pour $i=1$, le résultat est le même que précédemment. Le résultat diffère dans le cas opposé. Le cas où $i=1$ est celui où, au point considéré, passe une seule branche de la courbe C, ayant une tangente différente de $y=0$. Alors C_3 est nul, mais C_1 ne l'est pas, pour $x=0$, $y=0$. On voit donc que ce cas rentre dans le précédent. Si, au contraire, i est supérieur à l'unité, c'est que la courbe C se compose, en ce point, de plusieurs branches ou est tangente à $y=0$; ces deux circonstances peuvent d'ailleurs se réunir. Soit r la multiplicité du système circulaire considéré sur S, ri est (théorème XI) le nombre des intersections de C et de ce système circulaire. Soit enfin R la multiplicité totale du point $x=0$, $y=0$ sur S, et I le nombre total des intersections de C et de S, réunies en ce point. L'abaissement que ce point produit dans le degré de S^1 surpasse l'abaissement qu'il produit dans la classe de $(I-R)$ (théorème XII).

Soient maintenant A l'abaissement total produit dans la classe de S par tous ses points multiples, le degré de S^1 est

$$(12) \qquad m_1 = m(m+n-2) - A - \sum (I-R).$$

Soit maintenant c la classe de S; on déduit de (12), en vertu de (10),

$$(13) \qquad m_1 = (n-1)m + c - \sum (I-R).$$

On peut encore mettre cette relation sous la forme

$$(14) \qquad m_1 = c - m + \sum \mathrm{R},$$

car

$$\sum \mathrm{I} = nm.$$

La forme (14) du résultat donne lieu à cet énoncé remarquable en ce sens que le degré de la courbe de transformation n'y apparaît pas explicitement.

Théorème XIII. — *Le degré de la transformée d'une courbe* S, *obtenue au moyen d'une courbe quelconque, est égal à la classe de* S, *diminuée de son degré, et augmentée de la somme des ordres de multiplicité, sur la courbe* S, *des points où cette courbe rencontre la courbe de transformation.*

Il ne faut pas perdre de vue que cet énoncé s'applique, quelle que soit la nature des points d'intersection des deux courbes, sur la courbe de transformation. Quant à la forme (13) du même résultat, on peut remarquer que $\Sigma(\mathrm{I}-\mathrm{R})$ est la somme des ordres des contacts des diverses branches des deux courbes S et C; on a, par suite, le théorème suivant, que je borne au cas où C est une conique ($n=2$).

Théorème XIV. — *Le degré de la transformée d'une courbe* S, *obtenue au moyen d'une conique, est égal à la somme du degré et de la classe de* S, *diminuée de la somme totale des ordres des contacts de cette courbe et de la conique.*

On a déjà fait la remarque que la transformée de S, au moyen d'une conique, est la même que la transformée, au moyen de la même conique, de la courbe Σ, polaire réciproque de S par rapport à cette conique. Comme le degré et la classe de S sont la classe et le degré de Σ, il en résulte que les sommes totales des ordres des contacts des courbes S et Σ avec la conique doivent être les mêmes. C'est, en effet, un cas particulier de cette proposition, que j'ai donnée dans mon *Mémoire sur les points singuliers*.

La somme des ordres des contacts des branches de deux courbes en un point est égale à la même somme, relativement à deux courbes corrélatives des premières, aux points correspondants.

15. Je m'occupe maintenant de la détermination de la classe de la courbe transformée S^1. Je me borne ici au cas où $n=2$, c'est-à-dire où la courbe de transformation est une conique. L'équation de condition est l'équation (6) du n° 11, $G=0$. Pour $n=2$, le degré de G est $3(m-1)$, en sorte que la limite supérieure de la classe de S^1 est $3m(m-1)$. J'étudie maintenant l'ordre de multiplicité de chaque solution. Comme G est un covariant, je puis encore faire la supposition indiquée plus haut. Je ferai usage de la formule (8) du n° 11, qui, pour $n=2$, devient

$$G = \frac{(m-1)^2}{4z^3} C^{\frac{3}{2}} S_{\frac{3}{2}}^{3} E, \tag{15}$$

E étant toujours [n° 11, formule (7)]

$$E = \eta''(Zu + Xu' - Z\xi u') + u''(Y - X\eta' + Z\xi\eta' - Z\eta).$$

Pour cette étude, comme pour celle qui a fait l'objet du paragraphe II, je distinguerai quatre cas, répondant à quatre formes de l'équation de la conique de transformation

PREMIER CAS : $2C = ax^2 + a'y^2 + a''z^2$.

Je forme u et les premiers termes de son développement suivant les puissances ascendantes de ξ :

$$u = \frac{1}{z} C^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a\xi^2 + a'\eta^2 + a'')^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{a''}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{a}{a''}\xi^2 + \ldots\right).$$

J'en déduis, pour $\xi=0$,

$$u = \left(\frac{a''}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad u' = 0, \qquad u'' = \frac{a}{\sqrt{2a''}}.$$

Il résulte de là que, pour ξ infiniment petit, la partie principale de E est celle de l'un ou l'autre des deux termes $Zu\eta''$ ou Yu'', dont le second est fini.

Soient r l'ordre de multiplicité du système circulaire considéré, et $\frac{\rho}{r}$ l'ordre du contact de la tangente $y=0$ avec chaque branche de ce

système. On voit aisément que η_1'' est d'ordre $\left(\frac{\rho}{r}-1\right)$. Par suite, si $\frac{\rho}{r}\geq 1$, E est fini ; si $\frac{\rho}{r}<1$, E est infini et d'ordre $\frac{\rho}{r}-1$.

Par suite, l'ordre de G est le triple de celui de S_2 si $\frac{\rho}{r}\geq 1$, ou lui est inférieur de $\left(\frac{r-\rho}{r}\right)$ si $\rho<r$.

D'une manière générale, soit λ le produit, par la multiplicité r, de l'ordre infinitésimal de S_2 pour un système circulaire de la courbe S. Nous avons, pour l'abaissement produit, dans la classe de S^1, par un système circulaire, le plus petit des deux nombres

$$3\lambda \quad \text{ou} \quad 3\lambda+\rho-r,$$

dans le cas considéré.

DEUXIÈME CAS : $2C = a'y^2+2b'zx$.

$$u=\frac{1}{\sqrt{2}}(2b'\xi+a'\eta^2)^{\frac{1}{2}}=b'^{\frac{1}{2}}\xi^{\frac{1}{2}}+\ldots,$$

$$u'=\quad\frac{1}{2}b'^{\frac{1}{2}}\xi^{-\frac{1}{2}}+\ldots,$$

$$u''=-\frac{1}{4}b'^{\frac{1}{2}}\xi^{-\frac{3}{2}}+\ldots.$$

La partie principale de E est celle de u''. Donc E est d'ordre $-\frac{3}{2}$. Mais $C^{\frac{3}{2}}$ est de l'ordre $\frac{3}{2}$. Donc G est de l'ordre de $S_{\frac{3}{2}}$. Donc, dans le deuxième cas, l'abaissement de la classe de S^1 est 3λ.

TROISIÈME CAS : $2C = a''z^2+2b''xy$.

$$u=\frac{1}{\sqrt{2}}(a''+2b''\xi\eta)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{a''}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{b''}{a''}\xi\eta+\ldots\right),$$

$$u'=\left(\frac{a''}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(\xi\eta)'+\ldots,$$

$$u''=\left(\frac{a''}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(\xi\eta)''+\ldots.$$

La partie principale de E est celle de $Zu\eta_1''$, d'ordre $\frac{\rho}{r}-1$; par suite, l'abaissement est, dans ce cas, $3\lambda+\rho-r$.

QUATRIÈME CAS : $2C = ax^2 + 2byz$.

Ce cas est celui du contact de C et du système circulaire considéré. Soit h l'ordre du contact de C avec chaque branche. L'ordre de u est $\frac{1+h}{2}$, celui de u' est $\frac{h-1}{2}$.

Si $h \gtrless 1$, l'ordre de u'' est alors $\frac{h-3}{2}$. D'autre part, l'ordre de $Xu'\eta''$ est $\frac{\rho}{r} - 1 + \frac{h-1}{2}$, nombre supérieur au précédent. Donc l'ordre de E est $\frac{h-3}{2}$. Si l'on ajoute l'ordre $\frac{3}{2}(1+h)$ de $C^{\frac{3}{2}}$, on a, pour l'ordre de G, le triple de celui de S_2, augmenté de $2h$.

L'abaissement est donc $3\lambda + 2rh$.

Si $h = 1$, ce raisonnement ne s'applique pas. Ce cas peut se présenter de deux manières : 1° si $\frac{\rho}{r} > 1$; 2° si $\frac{\rho}{r} = 1$.

1° $\frac{\rho}{r} > 1$. Comme $\frac{\eta}{\xi^2}$ commence par un terme de degré positif en ξ, on peut écrire

$$u = \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \xi \left(1 + \frac{2b}{a}\frac{\eta}{\xi^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\xi + \frac{b}{a}\frac{\eta}{\xi} + \ldots\right),$$

$$u' = \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{b}{a}\left(\frac{\eta}{\xi}\right)' + \ldots\right],$$

$$u'' = \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{b}{a}\left(\frac{\eta}{\xi}\right)'' + \ldots.$$

On voit aisément, d'après ces résultats, que la partie principale de E est, comme celle de u'', d'ordre $\frac{\rho}{r} - 2$. D'ailleurs l'ordre de $C^{\frac{3}{2}}$ est 3 ; donc on a pour résultat

$$3\lambda + \rho + r.$$

2° $\frac{\rho}{r} = 1$. Ici $\frac{\eta}{\xi^2}$ se réduit à une constante pour $\xi = 0$; mais, l'ordre du contact de la conique avec la branche, dont les coordonnées sont η et ξ, étant par hypothèse égal à l'unité, il en résulte aisément que $a + 2b\frac{\eta}{\xi^2}$ ne s'évanouit pas pour $\xi = 0$. Soit $\frac{s}{r}$ le degré du second terme du développement de $\frac{\eta}{\xi^2}$ suivant les puissances croissantes de ξ,

on a, pour u, un développement tel que

$$u = A\xi + B\xi^{1+\frac{s}{r}} + \ldots;$$

d'où

$$u' = A + \left(1 + \frac{s}{r}\right) B\xi^{\frac{s}{r}} + \ldots,$$

$$u'' = \frac{s}{r}\left(1 + \frac{s}{r}\right) B\xi^{\frac{s}{r}-1} + \ldots.$$

Il en résulte que $\eta'' u'$ est d'ordre zéro, tandis que u'' est d'ordre $\left(\frac{s}{r} - 1\right)$. D'ailleurs, l'ordre de $C^{\frac{3}{2}}$ est égal à 3 ; donc l'abaissement est ici le plus petit des deux nombres $3\lambda + 3r$ ou $3\lambda + 2r + s$. Je dirai que cet abaissement est $3\lambda + 2r + \sigma$, σ étant le plus petit des deux nombres r ou s.

16. Je résume maintenant les résultats du numéro précédent comme il suit :

Théorème XV. — *Sur la courbe initiale, distinguez cinq catégories de systèmes circulaires, savoir :*

1° *Ceux dont ni l'origine ni la tangente n'appartiennent à la conique de transformation, et qui, en outre, sont composés de branches ayant avec leurs tangentes des contacts d'ordre inférieur à l'unité ;*

2° *Ceux dont les tangentes touchent la conique et dont les origines ne sont pas sur cette conique ;*

3° *Ceux qui touchent la conique et qui sont, en outre, composés de branches ayant avec leurs tangentes des contacts d'ordre supérieur à l'unité ;*

4° *Ceux qui touchent la conique et qui sont, en outre, composés de branches ayant avec leurs tangentes des contacts d'ordre inférieur à l'unité ;*

5° *Ceux qui touchent la conique et qui sont composés de branches ayant avec leur tangente et avec la conique des contacts d'ordre égal à l'unité.*

Soient maintenant R *la somme des ordres de multiplicité des systèmes circulaires d'une même catégorie, et* $\mathcal{R}$ *la somme des*

ordres des contacts des branches de ces systèmes avec leurs tangentes (ces lettres étant affectées d'indices correspondants à chaque catégorie); Σ *la somme des nombres analogues à* σ (n° 15, 4e cas) *pour la cinquième catégorie; et enfin, pour les branches de la courbe initiale qui ont avec la conique des contacts d'ordre supérieur à l'unité,* J *la somme des ordres de ces contacts.*

On a, en désignant par c la classe de la courbe initiale, et par c_1 *celle de la transformée,*

$$(16) \quad c_1 = 3c + R_1 + R_2 - R_3 - 2R_5 - \Sigma - 2J - (\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 + 2\mathcal{R}_4).$$

Ce résultat se simplifie beaucoup dans le cas particulier où la conique de transformation ne rencontre la courbe qu'en des points simples, sans avoir avec elle aucun contact, et n'a en commun avec la même courbe que des tangentes simples de cette dernière. Il n'y a plus alors à distinguer que la première catégorie de systèmes circulaires de l'énoncé précédent, et la formule (16) se réduit à

$$(17) \qquad c_1 = 3c + R_1 - \mathcal{R}_1.$$

Soient r la multiplicité d'un des systèmes circulaires de la première catégorie et $\frac{\rho}{r}$ l'ordre des contacts de ses branches avec la tangente; on a

$$\rho < r, \qquad R_1 = \Sigma r, \qquad \mathcal{R}_1 = \Sigma \rho.$$

Soient maintenant r' et ρ' les nombres analogues pour un autre système circulaire, mais dans lequel on a $\rho' > r'$, et posons

$$R'_1 = \Sigma r', \qquad \mathcal{R}'_1 = \Sigma \rho'.$$

On sait que, si l'on passe d'une courbe à une corrélative, les nombres r et ρ s'échangent entre eux. Donc, pour une courbe corrélative de S, les nombres analogues à R_1 et $\mathcal{R}_1$ sont $\mathcal{R}'_1$, et R'_1. D'ailleurs, comme on l'a déjà observé, la transformée S^1 est la même, si on la construit au moyen de la courbe Σ, polaire réciproque de S, relativement à la conique de transformation. On a donc aussi

$$(18) \qquad c_1 = 3m + \mathcal{R}'_1 - R'_1.$$

De (17) et (18) on conclut

$$(19) \qquad 3(c - m) = \mathcal{R} - R,$$

les lettres R et $\mathfrak{R}$ s'appliquant maintenant à tous les systèmes circulaires. La relation (19), qu'on rencontre ici d'une manière incidente, a été démontrée directement, de deux manières différentes, dans mon *Mémoire sur les points singuliers*. Elle donne notamment le nombre des points d'inflexion d'une courbe dont on connaît les singularités, le degré et la classe. En effet, dans le second membre, chacun des points d'inflexion figure pour une unité. Si donc on les met à part, on trouve pour leur nombre N

$$N = 3(c - m) + R - \mathfrak{R},$$

le nombre R et $\mathfrak{R}$ ne s'appliquant plus qu'aux points multiples.

Pour faire cette dernière vérification, j'ai supposé le cas simple où la formule (16) se réduit à (17). Il n'y aurait point de difficulté à la répéter pour le cas général, mais je crois inutile de le faire.

Je vais encore tirer de la formule (17) une autre conséquence, relative au *genre*. Eu égard à la supposition faite pour cette formule, on a, pour le degré de la transformée S^1 (théorème XIV),

$$m_1 = m + c.$$

De cette dernière formule et de (17) je conclus

$$(20) \qquad c_1 - 2m_1 = c - 2m + R_1 - \mathfrak{R}_1.$$

Je conserve à R'_1, le même sens que précédemment, et je désigne, en outre, par R'' la somme des ordres de multiplicité des systèmes circulaires de S, dont les branches ont avec leurs tangentes des contacts du premier ordre, et j'écris, au lieu de (20),

$$(21) \qquad c_1 - 2m_1 + \mathfrak{R}_1 + R'_1 + R'' = c - 2m + R_1 + R'_1 + R''.$$

Dans le second membre, la somme des trois derniers termes désigne la somme des multiplicités de tous les systèmes circulaires de la courbe S. Soit M cette somme. Dans le premier membre, la somme des trois derniers termes désigne la somme des multiplicités des systèmes circulaires correspondants sur S^1 (n° 5, § II). Or S^1 ne possède, en dehors de ces derniers, aucun système circulaire propre (de multiplicité supérieure à l'unité); mais, parmi ces derniers, il peut s'en trouver dont la multiplicité soit l'unité. Pour les faire disparaître, retranchons dans les deux membres le nombre T de tous les systèmes circulaires considérés sur S. Alors, si M_1 est la somme de tous les sys-

tèmes circulaires propres sur S^1, et T_1 leur nombre, on a

$$\mathfrak{R}_1 + R'_1 + R'' - T = M_1 - T_1;$$

donc, de (21), je déduis

$$c_1 - 2m_1 + M_1 - T_1 = c - 2m + M - T,$$

c'est-à-dire que l'expression qui figure au second membre de cette dernière formule se conserve dans la transformation considérée.

D'après le théorème IX, en répétant la même transformation un nombre fini de fois, on parvient à une courbe n'ayant aucun système circulaire propre. Soient γ et μ la classe et le degré de cette courbe. On aura

$$c - 2m + M - T = \gamma - 2\mu.$$

Mais, pour une pareille courbe, ne contenant aucune branche superlinéaire, on sait que $(\gamma - 2\mu)$ est égal à $2(p-1)$, p étant le *genre* de cette courbe. D'ailleurs cette courbe et la courbe initiale se correspondent *point par point;* donc leur genre est le même ; donc p est le genre de la courbe initiale, et l'on obtient la formule

$$c - 2m + M - T = 2(p-1),$$

qui donne explicitement le genre d'une courbe quelconque, et que j'ai déjà démontrée de deux manières différentes en d'autres occasions.

17. Si l'on considère la suite des transformées $S^1, S^2, \ldots$ d'une courbe quelconque S, obtenues au moyen de coniques choisies chaque fois de manière à se trouver dans le cas simple considéré déjà, on parvient toujours, d'après le théorème IX, à une transformée de rang fini k, telle que cette courbe et toutes les suivantes ne possèdent plus aucun système circulaire propre. Soient c_k et m_k la classe et le degré de cette courbe S^k. On aura, pour les suivantes,

$$\begin{array}{ll} m_{k+1} = m_k + c_k, & c_{k+1} = 3c_k, \\ m_{k+2} = m_{k+1} + c_{k+1}, & c_{k+2} = 3c_{k+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots; \end{array}$$

d'où

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_{k+i} = 3^i c_k, \\ m_{k+i} = m_k + c_k(1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{i-1}) = m_k + \dfrac{3^i - 1}{2} c_k. \end{array} \right.$$

Théorème XVI. — *Quelle que soit la courbe initiale, les degrés et les classes des transformées successives suivent, à partir d'un certain rang, la loi marquée par les équations* (22).

Il n'en est pas de même si l'on conserve toujours la même conique de transformation. A partir d'un certain rang, les catégories 1°, 3°, 5° de l'énoncé XV disparaissent, il est vrai, et les formules se réduisent à

$$m_1 = m + c - \mathfrak{R}_4,$$
$$c_1 = 3c + R_2 - \mathfrak{R}_2 - 2\mathfrak{R}_4;$$

et, si l'on observe qu'on a

$$\mathfrak{R}_2 + 2\mathfrak{R}_4 = 2c,$$

on peut réduire ces formules à

$$m_1 = m + \frac{1}{2}\mathfrak{R}_2,$$
$$c_1 = c + R_2.$$

D'ailleurs, à partir du rang considéré, les courbes n'ont aucun système circulaire propre dont l'origine ne soit sur la conique de transformation (théorème VII, § II). Par suite, R_2 marque simplement le nombre des points en lesquels la tangente de la courbe est aussi tangente à la conique, tandis que $\mathfrak{R}_2$ marque le nombre des tangentes communes pour lesquelles ces tangentes doivent être comptées. Par conséquent, si une de ces tangentes est, pour la courbe, une tangente d'inflexion, elle figure pour deux unités dans $\mathfrak{R}_2$ et pour une seule dans R_2. Pour cette raison, il ne paraît pas possible de trouver, dans le cas actuel, une proposition analogue au théorème XVI.

IV.

18. J'ai, dans ce qui précède, étudié les courbes qu'on obtient en transformant une courbe au moyen d'une conique. Si cette conique dégénère en deux droites, les résultats subissent d'assez notables modifications. C'est ce cas particulier qui va faire l'objet de la dernière partie de ce travail.

Aux transformées particulières qu'on obtient ainsi je donne le nom d'*adjointes*. Voici donc la construction de l'adjointe d'une

courbe S. On donne deux droites P, Q, dans le plan S. Soient m un point de S et T la tangente en ce point. L'intersection de T et de la polaire de m, relativement aux droites P, Q, engendre l'*adjointe* de S. Soit S^1 cette adjointe. Si l'on répète la même construction en conservant les mêmes droites P, Q, et substituant à S l'adjointe S^1, on engendre l'adjointe S^2 de S^1, ou *deuxième adjointe* de S, et ainsi de suite. Ce qui donne un intérêt particulier à la considération de ces courbes, c'est que, si l'on prend, d'une manière convenable, une figure corrélative, l'ensemble de S et de ses adjointes successives se change en l'ensemble d'une courbe Σ et de ses développées successives. Pour cette raison, les résultats qu'on obtiendra ici fourniront des démonstrations nouvelles des propriétés des développées successives, que j'ai déjà données dans mon *Mémoire sur les points singuliers*.

Pour l'objet actuel, on n'a pas à faire de nouveaux calculs, mais seulement à reprendre ceux qui précèdent, en examinant les modifications qu'ils subissent. J'examine d'abord les calculs du paragraphe II : leur objet était l'étude du système circulaire qui, sur une transformée, correspond à un système circulaire donné de la courbe initiale.

Le côté $y=0$ et le sommet $y=0$, $x=0$ du triangle de référence sont toujours la tangente et l'origine du système circulaire initial considéré. Cette condition remplie, on a considéré, pour le cas d'une conique de transformation, quatre formes distinctes de l'équation $C=0$ de cette conique, savoir :

$$2C = a\,x^2 + a'y^2 + a''z^2,$$
$$2C = a'y^2 + 2b'zx,$$
$$2C = a''z^2 + 2b''xy,$$
$$2C = a\,x^2 + 2b\,yz.$$

La première de ces formes, dans le cas où C se réduit à deux droites, P, Q, donne lieu à trois formes distinctes

$$2C = ax^2 + a''z^2, \qquad 2C = a'y^2 + a''z^2, \qquad 2C = ax^2 + a'y^2;$$

les trois autres donnent lieu à

$$2C = 2b'zx, \qquad 2C = 2b''xy, \qquad 2C = 2byz.$$

J'ai donc en tout six formes distinctes. Elles répondent à six cas distincts, savoir :

Pour la première forme, l'origine et la tangente du système circulaire sont placées d'une manière entièrement quelconque par rapport aux droites P, Q.

Pour les deux suivantes, il existe une particularité relativement à l'intersection Ω des droites P, Q : dans l'une, Ω est sur la droite $y=0$; dans l'autre, Ω est au point $y=0$, $x=0$.

Pour les trois dernières, il existe une particularité relativement à une des droites P, Q, par exemple P. Dans l'une, P passe au point $y=0$, $x=0$; dans l'autre, P est la droite $y=0$ elle-même, et, en outre, le point Ω coïncide avec $y=0$, $x=0$; dans le dernier enfin, P est la droite $y=0$, sans que Ω coïncide avec l'origine du système circulaire.

On voit que toutes les positions particulières sont comprises dans ces six cas.

PREMIÈRE FORME : $2C = ax^2 + a''z^2$.

19. Le calcul du n° 5 (§ II) devient ici plus simple ; mais le résultat est le même. Soit donné le système circulaire

$$(1) \qquad \eta = \left[\frac{p}{q}, \frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_s}{q_s}\right](\xi), \qquad \frac{p}{q} > 1,$$

on trouve

$$(2) \qquad \frac{\beta}{\alpha} = \left[\frac{p-q}{q}, \frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_s}{q_s}\right]\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right).$$

C'est l'équation (12) du n° 5 ; mais, dans le cas actuel, les conséquences à tirer de (2) diffèrent de celles qu'on a obtenues au n° 5. En effet, si p est inférieur à $2q$, la tangente du système circulaire (2) est la droite $z=0$; elle passe donc en Ω. Donc la première adjointe n'est pas, comme la courbe initiale, dans le cas auquel se rapporte la première forme, mais dans celui qui correspond à la seconde forme de C. En nous occupant de cette seconde forme, nous verrons tout à l'heure que, dans le cas correspondant, les adjointes successives obéissent à une loi simple. Ce que je vais prouver actuellement, c'est que, si p n'est pas inférieur à $2q$, la même circonstance se présente non plus pour la première adjointe, mais pour une autre des suivantes.

Je suppose d'abord q différent de l'unité, et p supérieur à $2q$; car p, étant premier à q, ne peut être égal à $2q$. La tangente de (2) est

alors $y=0$. On peut appliquer à l'adjointe S^1 le même calcul ; par suite, si t est l'entier contenu dans $\frac{p}{q}$, on pourra poursuivre ainsi jusqu'à l'adjointe de rang $(t-1)$, pour laquelle le tableau des nombres caractéristiques ne différera de (1) que par le premier de ces nombres. Ce premier nombre sera manifestement $\frac{p-(t-1)q}{q}$. Ce nombre étant inférieur à 2, on voit que, pour l'adjointe de rang t, la tangente est la droite $z=0$, ce qui est conforme à la proposition annoncée.

Je suppose, en second lieu, $q=1$ et $p \geqq 2$. Il est clair qu'en appliquant successivement la formule (2), on trouvera, pour l'adjointe de rang $(p-2)$, le tableau suivant des nombres caractéristiques :

$$\frac{2}{1}, \quad \frac{p_1}{q_1}, \quad \ldots, \quad \frac{p_s}{q_s}.$$

En répétant ensuite un raisonnement du n° 5, et désignant par t_1 l'entier contenu dans $\frac{p_1}{q_1}$, on trouvera, pour l'adjointe de rang $(p+t_1-1)$, le tableau

$$\frac{p_1-(t_1-1)q_1}{q_1}, \quad \frac{p_2}{q_2}, \quad \ldots, \quad \frac{p_s}{q_s},$$

où la première fraction est inférieure à 2. Donc, pour l'adjointe suivante, la tangente passe au point Ω.

Dans le cas actuel $(q=1)$, le premier exposant fractionnaire du développement (1) est $p+\frac{p_1}{q_1}$, et le rang de l'adjointe considérée est $(p+t_1)$. Dans les cas précédents $(q>1)$, le premier exposant fractionnaire était $\frac{p}{q}$, et le rang de l'adjointe, dont la tangente passe en Ω, était le nombre t. D'après cette remarque, on peut réunir les résultats précédents dans l'énoncé suivant :

Théorème XVII. — *A un système circulaire de la courbe initiale* S, *n'ayant pas pour origine un point des droites* P, Q, *et n'ayant pas pour tangente une droite passant à l'intersection* Ω *de* P *et* Q, *correspond, sur une des adjointes successives, un système circulaire dont la tangente passe en* Ω. *Le rang de la première adjointe qui jouisse de cette propriété est égal à l'entier contenu dans le premier exposant fractionnaire du développement relatif au système circulaire considéré sur* S.

Comme on le voit, cette proposition ne s'applique qu'à un système circulaire propre, c'est-à-dire tel que, dans le développement qui lui est relatif, il y ait effectivement des exposants fractionnaires.

DEUXIÈME FORME : $2C = a'y^2 + a''z^2$.

20. Le calcul n'offrant aucune particularité, je me borne à en écrire le résultat. De

$$(3)\qquad \eta = \left[\frac{p}{q}, \frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_s}{q_s}\right](\xi), \qquad \frac{p}{q} > 1,$$

on déduit

$$(4)\qquad \frac{\gamma}{\alpha} = \left[\frac{2q-p}{p-q}, \frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_s}{q_s}\right]\left(\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

La tangente de (4) étant $z = 0$, on a la proposition suivante :

THÉORÈME XVIII. — *Si un système circulaire de la courbe initiale* S *a pour tangente une droite passant en* Ω, *le système circulaire correspondant sur l'adjointe a pour origine* Ω, *et pour tangente la conjuguée harmonique de celle de* S, *relativement aux droites* P, Q.

Quant au tableau des nombres caractéristiques, pour S^1, il est donné par (4).

Le théorème XVIII montre que, si la courbe initiale est dans le cas auquel est appropriée la deuxième forme, l'adjointe est dans le cas correspondant à la troisième forme.

TROISIÈME FORME : $2C = ax^2 + a'y^2$.

En supposant toujours l'équation (3) pour le système circulaire considéré, je trouve

$$(5)\qquad \frac{\alpha}{\gamma} = \left[\frac{2p-q}{p}, \frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_s}{q_s}\right]\left(\frac{\beta}{\gamma}\right).$$

La tangente de (5) est la droite $x = 0$, conjuguée harmonique de $y = 0$ relativement aux droites P, Q. Par suite, l'adjointe S^1 est dans le même cas que la courbe initiale S. En appliquant successivement ce résultat, on voit que la droite $x = 0$ est la tangente de toutes les

adjointes de rang impair, et $y=0$ la tangente de toutes les adjointes de rang pair. En outre le tableau des nombres caractéristiques reste constamment le même, sauf en ce qui concerne le premier de ces nombres. Ce dernier est successivement, pour la courbe initiale et les adjointes de rang $1, 2, \ldots, i, \ldots,$

$$\frac{p}{q}, \quad \frac{2p-q}{p}, \quad \frac{3p-2q}{2p-q}, \quad \ldots, \quad \frac{p+i(p-q)}{q+i(p-q)}.$$

Ainsi :

Théorème XIX. — *Si un système circulaire de la courbe initiale* S *a pour origine le point* Ω *et une tangente différente de* P *et* Q, *il en est de même des systèmes circulaires correspondants, sur toutes les adjointes successives. Pour ces systèmes, les deux termes de la première fraction caractéristique croissent en progression arithmétique de même raison ; les autres fractions caractéristiques restent toujours les mêmes.*

Sous une autre forme, on peut dire que *les ordres de multiplicité de ces systèmes circulaires forment une progression arithmétique, et que la somme des ordres des contacts de leurs branches avec leurs tangentes reste constante.*

En effet, la somme des ordres de ces contacts est toujours

$$(p-q)q_1q_2\ldots q_s,$$

et l'ordre de multiplicité du système circulaire de l'adjointe de rang i est

$$qq_1q_2\ldots q_s+i(p-q)q_1q_2\ldots q_s.$$

Les théorèmes XVII, XVIII et XIX font connaître, pour une adjointe de rang quelconque, le système circulaire qui correspond à un système circulaire de la courbe initiale, s'il est dans un des cas qui correspondent aux formes 1, 2, 3. En effet, le théorème XIX fournit la solution de cette question pour le cas de la troisième forme ; et les théorèmes XVII et XVIII prouvent que, si, pour le système circulaire initial, on se trouve placé dans le cas de la première ou de la deuxième forme, on est ramené au cas de la troisième forme pour le système circulaire correspondant sur une des adjointes suivantes.

QUATRIÈME ET CINQUIÈME FORME.

21. On trouve aisément les résultats compris dans les théorèmes ci-après :

Théorème XX. — *Si la courbe initiale comprend un système circulaire dont l'origine soit sur une des droites* P, Q, *le système circulaire correspondant sur l'adjointe a même origine, même tangente et mêmes nombres caractéristiques.*

Théorème XXI. — *Si la courbe initiale comprend un système circulaire dont l'origine soit le point* Ω *et la tangente une des droites* P, Q, *le système circulaire correspondant sur l'adjointe a même origine, même tangente et mêmes nombres caractéristiques.*

SIXIÈME FORME : $2C = 2byz$.

Ici, comme au n° 8 (§ II), on doit distinguer plusieurs cas, et l'on est conduit, en conservant les notations du n° 8, aux résultats suivants :

1° Si $\frac{p}{q} \lesseqgtr 2$, le système circulaire se reproduit tel quel dans l'adjointe.

2° Si $q = 1$, $p = 2$ et $p_1 \geqq q_1$, on a pour l'adjointe un système circulaire dont l'origine est la même et dont la tangente est différente. Ce système circulaire est donc dans le cas auquel est relative la quatrième forme.

3° Si $q = 1$, $p = 2$ et $p_1 < q_1$, on a pour l'adjointe un système circulaire, qui est dans le premier des cas relatifs à la sixième forme.

On a donc l'énoncé suivant :

Théorème XXII. — *Si la courbe initiale comprend un système circulaire dont la tangente soit la droite* P *et dont l'origine ne soit pas en* Ω, *il y correspond, sur les adjointes successives, une suite de systèmes circulaires ayant même origine, même tangente et mêmes nombres caractéristiques ; et cela à partir de la courbe initiale ou de la première adjointe, suivant que l'ordre des contacts*

des branches du système initial avec P *est différent de l'unité ou égal à l'unité.*

22. Des divers théorèmes précédents résulte la conclusion suivante :

Théorème XXIII. — *A partir d'un certain rang, tout système circulaire propre d'une adjointe d'une courbe quelconque est dans un des cas suivants :*

1° *Son origine est en* Ω *et sa tangente différente de* P *et* Q.

2° *Son origine est sur une des droites* P, Q, *et sa tangente diffère de cette droite.*

3° *Son origine est en* Ω, *et sa tangente est une des droites* P, Q.

4° *Sa tangente est une des droites* P, Q, *sans que son origine soit en* Ω ; *de plus, l'ordre du contact de chacune de ses branches avec la tangente est différent de l'unité.*

A partir du même rang, les systèmes circulaires correspondant à ceux qui sont dans un quelconque des trois derniers cas ont, sur toutes les adjointes suivantes, même origine, même tangente et mêmes nombres caractéristiques.

Les systèmes circulaires correspondant à ceux qui sont dans le premier cas suivent la loi marquée par le théorème XIX.

Voici maintenant une remarque qu'il est essentiel de faire pour établir entre les transformées, obtenues au moyen d'une conique toujours la même, et les adjointes, une différence importante. Pour les transformées, il s'introduit, à chaque rang, de nouveaux points sur la conique de transformation. Pour les adjointes, au contraire, le fait analogue ne se produit pas. En effet, le résultat du n° 19 montre qu'une branche simple ne peut conduire, pour l'adjointe, à une branche dont la tangente passe en Ω. De la sorte, les systèmes circulaires des quatre catégories mentionnées au théorème XXIII, et qui existent dans l'adjointe à partir de laquelle s'applique ce théorème, sont, à partir de cette adjointe, en nombre définitif. Pour cette raison, les degrés et les classes des adjointes successives suivent toujours une loi uniforme, ainsi que je vais le prouver.

Pour y parvenir, on pourrait appliquer aux adjointes les calculs

faits précédemment (§ III) pour les transformées, en y introduisant des modifications très simples. Au lieu de suivre cette voie, je puis, grâce à la remarque précédente, obtenir très aisément ce résultat comme il suit.

Je considère l'adjointe S à partir de laquelle s'applique le théorème. Soient m son degré, c sa classe. Le nombre total de ses intersections avec P et Q est égal à $2m$; le nombre total des tangentes qu'on peut lui mener de Ω est c. Je vais compter de même ces nombres pour la première adjointe S^1 de cette courbe, en les dénotant par $2m_1$ et c_1.

Considérons l'ensemble des systèmes circulaires de S, qui sont dans la première catégorie mentionnée au théorème XXIII. Soient R la somme de leurs ordres de multiplicité et $\mathfrak{R}$ la somme des ordres des contacts de leurs branches avec leurs tangentes. D'après le théorème XIX, les nombres analogues, pour S^1, sont $R+\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{R}$. Ces systèmes circulaires figurent, dans le nombre total des intersections de S avec P et Q, pour $2R$ unités. Leurs correspondants figurent pour $2(R+\mathfrak{R})$ unités dans le nombre total des intersections de S^1 avec P et Q. Quant aux systèmes circulaires de S, qui sont dans une des trois dernières catégories du théorème XXIII, ils figurent pour le même nombre d'unités dans les deux nombres ci-dessus. On a donc

$$2m_1 = 2m + 2\mathfrak{R}.$$

Dans le nombre total des tangentes menées de Ω à S, les systèmes circulaires $(R, \mathfrak{R})$ figurent pour $R+\mathfrak{R}$ unités. Leurs correspondants figurent pour $R+2\mathfrak{R}$ unités dans le nombre des tangentes menées de Ω à S^1. Quant aux autres, ils figurent encore pour autant d'unités dans les deux nombres; donc

$$c_1 = c + \mathfrak{R}.$$

Et, puisque le nombre $\mathfrak{R}$ se conserve dans toutes les adjointes suivantes, on a, pour l'adjointe de rang i,

$$m_i = m + i\mathfrak{R}, \qquad c_i = c + i\mathfrak{R}.$$

Ainsi :

Théorème XXIV. — *A partir d'un certain rang, les degrés et les classes des adjointes successives d'une courbe quelconque forment deux progressions arithmétiques de même raison.*

Voici une autre conséquence. Je me reporte à la formule qui donne

le nombre des points d'inflexion d'une courbe (nº 16, § III). Soit N le nombre des points d'inflexion de S, sauf ceux qui coïncident avec Ω, et soit N_i le nombre analogue pour S_i. Je trouve la relation

$$N_i = N + i\mathcal{R}.$$

Théorème XXV. — *A partir du même rang, les nombres de points d'inflexion des adjointes successives, qui ne coïncident pas avec le point d'intersection des droites de transformation, forment une progression arithmétique de même raison que les degrés et les classes de ces courbes.*

Au moyen des résultats ci-dessus, on peut calculer aussi le nombre des points doubles ordinaires qui subsistent dans une adjointe quelconque. Pour y parvenir, il suffit de faire usage d'une formule contenue dans mon *Mémoire sur les points singuliers*, et qui fournit, en fonction des nombres caractéristiques, l'abaissement que les systèmes circulaires produisent dans la classe d'une courbe. Je ne reproduirai pas ici ce calcul, et je me contenterai d'énoncer le résultat :

Théorème XXVI. — *A partir du même rang, les nombres de points doubles des adjointes successives, non situés sur les droites de transformation, forment une progression arithmétique, dont la raison est différente de celle des précédentes.*

Il y a des cas où le nombre $\mathcal{R}$, qui est la raison des précédentes progressions, est nul. Alors les degrés, les classes, les nombres de points d'inflexion sont constants. Dans ce cas aussi, comme on pouvait s'y attendre, la raison de la dernière progression est aussi nulle. Cette raison est, en effet, le produit de $\mathcal{R}$ par un nombre positif, qui dépend de plusieurs éléments assez complexes.

J'ai fait remarquer précédemment que la figure formée par une courbe et ses adjointes successives est corrélative de la figure formée par une courbe et ses développées successives. Par suite, des théorèmes XXIV, XXV et XXVI, on peut conclure le suivant, dont une partie est contenue dans mon Mémoire déjà cité :

Théorème XXVII. — *A partir d'un certain rang, les développées successives d'une courbe algébrique quelconque jouissent des propriétés suivantes :*

Leurs degrés, leurs classes, les nombres de leurs points de rebroussement non à l'infini et dont les tangentes ne sont pas isotropes, et les nombres de leurs sommets, forment quatre progressions arithmétiques de même raison.

Les nombres de leurs tangentes doubles et de leurs normales doubles, en des points non à l'infini et non isotropes, forment deux progressions arithmétiques, dont la raison commune est différente de celle des progressions précédentes.

Je vais compléter les théorèmes précédents en indiquant comment est déterminé le rang qui y figure. D'après les résultats ci-dessus, on le trouve facilement comme il suit, pour les adjointes :

Théorème XXVIII. — *Le rang de la première adjointe à partir de laquelle s'appliquent les théorèmes XXIII, XXIV, XXV et XXVI se calcule de la manière suivante :*

1° *Si la courbe initiale comprend des branches superlinéaires dont les origines ne soient pas sur une des droites de transformation* P, Q, *et dont les tangentes ne passent pas au point* Ω *d'intersection de* P *et* Q, *considérez les développements relatifs à chacune de ces branches superlinéaires et prenez, dans chacun d'eux, le premier exposant fractionnaire. Le rang cherché surpasse d'une unité l'entier contenu dans le plus grand de ces exposants.* (Ces développements doivent être faits suivant les puissances d'une des coordonnées, de telle sorte que le premier exposant ne soit pas inférieur à l'unité).

2° *Si la courbe initiale ne comprend pas de telles branches, et qu'elle ait des tangentes passant en* Ω, *dont les points de contact ne soient pas en* Ω, *et qui ne se confondent ni avec* P *ni avec* Q, *ou bien si ces tangentes se réduisent aux seules droites* P *et* Q, *mais qu'en même temps il y ait au moins une branche ayant, avec une de ces droites, un contact du premier ordre, en un point qui ne soit pas* Ω, *le rang cherché est égal à l'unité.*

3° *Dans les autres cas, le rang cherché est zéro ; les théorèmes considérés s'appliquent alors à partir de la courbe elle-même.*

Pour obtenir le rang à partir duquel s'applique le théorème XXVII, il suffit de faire usage du théorème XXVIII, en substituant à la

courbe proposée une corrélative. On obtient ainsi le résultat suivant :

Théorème XXIX. — *Le rang à partir duquel s'applique le théorème XXVII peut se calculer ainsi : considérez les points de la courbe proposée, non à l'infini, où passent des branches dont les tangentes ne soient pas isotropes et satisfaisant, en outre, à l'une des deux conditions suivantes :*

1° *Soit* $\frac{p}{q}$ *le premier nombre caractéristique de l'une de ces branches* (elle peut être simple si $q=1$); *le nombre* q *est différent de* $(p-1)$;

2° *Ou bien, si le premier nombre caractéristique est* $\frac{p'}{p'-1}$ (p' étant un entier), *la branche doit admettre au moins un second nombre caractéristique,* $\frac{p_1}{q_1}$.

Si la courbe contient de tels points, le rang cherché surpasse d'une unité le plus grand des entiers contenus dans les nombres tels que $\frac{p}{p-q}$ *et* $\left(p'+\frac{p_1}{q_1}\right)$.

Si la courbe ne contient pas de tels points et qu'elle ait des branches infinies, non paraboliques, et dont les asymptotes ne soient pas isotropes, ou bien si elle a des branches infinies dont les asymptotes soient isotropes et que ces branches aient avec ces asymptotes des contacts du premier ordre, le rang cherché est égal à l'unité.

Dans les autres cas, le rang cherché est nul. Le théorème XXVII s'applique alors à partir de la courbe proposée elle-même.

J'ajoute la remarque suivante : Si l'on considère une courbe dont les points s'associent deux à deux, de telle sorte que la normale en deux points associés soit la même, on ne doit pas appliquer à une telle courbe le théorème XXIX. L'application doit en être faite à la courbe, lieu des milieux des segments compris entre les points associés de la proposée.

SUR LA RECHERCHE DES POINTS

D'UNE

COURBE ALGÉBRIQUE PLANE,

QUI SATISFONT A UNE CONDITION
EXPRIMÉE PAR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE ALGÉBRIQUE,

ET SUR LES

QUESTIONS ANALOGUES DANS L'ESPACE.

Journal de Mathématiques, t. II, 1876, p. 257-290, 371-408.

1. Dans un grand nombre de questions géométriques, s'offrent des cas particuliers du problème suivant :

Étudier, sur une courbe algébrique plane, les points qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle algébrique donnée.

Il est immédiatement visible que ces points sont les intersections de la courbe considérée $S=0$ avec une autre courbe algébrique $\Phi=0$. L'équation de cette dernière s'obtient, en effet, en substituant, dans l'équation différentielle, aux dérivées, leurs expressions déduites de l'équation $S=0$. La formation de l'équation $\Phi=0$, si simple en théorie, présente, dans la plupart des applications, une complication très grande. Si elle est nécessaire pour une étude approfondie, elle peut, du moins, être évitée pour certains cas de la question générale. C'est ce que je me propose de montrer ici pour les deux problèmes suivants :

1° *Trouver le degré de la courbe* Φ ;

2° *Trouver le nombre des points, en tenant compte des singularités de la courbe* S.

La solution de ces deux problèmes fera l'objet du paragraphe I. Le paragraphe II sera consacré à des applications. Dans le paragraphe III, j'étendrai la solution du premier problème à l'espace. On verra, dans ce paragraphe, le problème résolu immédiatement et, pour ainsi dire, à vue dans un cas particulièrement intéressant, celui où l'équation différentielle ou aux dérivées partielles envisagée jouit de la propriété de *rester inaltérée par toute transformation homographique*. L'étude directe de telles équations, considérées en elles-mêmes, offre un sujet de recherches dont quelques points sont abordés dans le présent Mémoire. On rencontrera notamment, au paragraphe II, les deux propositions suivantes :

A l'exception de l'équation $\frac{d^2y}{dx^2}=0$, *il n'existe aucune équation différentielle algébrique du second ordre qui reste inaltérée par toute transformation homographique.*

Il n'existe aucune équation différentielle algébrique du troisième ordre qui reste inaltérée par toute transformation homographique.

I.

2. Si, de l'équation $S(x,y)=0$, on tire les expressions des dérivées successives de y par rapport à x, on démontre aisément que chacune d'elles a pour numérateur une fonction entière des dérivées partielles de S, et pour dénominateur une puissance de $\frac{\partial S}{\partial y}$. Pour la dérivée d'ordre n, l'exposant de cette puissance est $(2n-1)$; c'est ce qu'on peut exprimer en disant que :

Les variables x, y *étant liées par l'équation* $S(x,y)=0$, *la quantité* $\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^{2n-1}\frac{d^ny}{dx^n}$ *est égale à une fonction entière des dérivées partielles de* S.

Soit

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right)=0$$

une équation différentielle, *entière* par rapport à tous les arguments de f. J'y considère x et y comme du degré zéro, $\frac{dy}{dx}$ comme du premier degré, ..., $\frac{d^n y}{dx^n}$ comme du degré $(2n-1)$. Soit, à ce point de vue, k le degré de f. D'après le lemme, pour les valeurs de x et y qui satisfont à $S(x,y)=0$, la quantité $\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^k f$ est égale à une fonction entière des dérivées partielles de S.

Pour éviter toute confusion, j'indique par le symbole des congruences les égalités qui ont lieu ainsi en vertu de $S=0$. D'après cette convention, je puis dire que :

Théorème I. — *Si $S(x, y)$ est un polynome entier, il existe des exposants k et des fonctions entières $\psi(x, y)$ qui vérifient la relation*

$$(1)\qquad \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^k f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) \equiv \psi(x, y),$$

f étant une fonction entière.

Nous sommes en possession d'un procédé pour calculer une valeur de k ; mais il nous faut établir une règle pour calculer sa valeur *minima*.

3. Par $S(x, y)$, il faut actuellement entendre un polynome entier, de forme générale dans son degré, et à coefficients indéterminés. Cela étant, soit ω un point satisfaisant à $S=0$, $\frac{\partial S}{\partial y}=0$. Si la courbe $\psi=0$ passe en ω, on a identiquement

$$(2)\qquad \psi(x, y) = LS + P\frac{\partial S}{\partial y},$$

L et P étant des polynomes entiers en x et y. Car, en vertu de l'indétermination des coefficients du polynome S, si la courbe ψ passe en ω, elle passe aussi en tous les points analogues, la résultante en x des équations $S=0$, $\frac{\partial S}{\partial y}=0$ étant irréductible. Et, en outre, tous ces points étant des points simples d'intersection des courbes représentées par ces équations, l'équation (2) a lieu. D'après la convention ci-dessus, elle peut s'écrire

$$\psi(x, y) \equiv P\frac{\partial S}{\partial y}.$$

Il peut arriver que la courbe $P=0$ passe encore en ω. On répétera le même raisonnement, et l'on parviendra à une relation telle que

$$\psi(x,y)=\theta\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^q,$$

où θ est un polynome entier en x et y, tel que la courbe $\theta=0$ ne passe pas en ω. Alors la relation (1) devient

$$(3)\qquad \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^{k-q} f\left(x,y,\frac{dy}{dx},\ldots,\frac{d^n y}{dx^n}\right)=\theta(x,y).$$

Ainsi, dès que la courbe ψ passe en un point tel que ω, c'est-à-dire en un point où la tangente de S est parallèle à l'axe des y, l'exposant k peut être abaissé, et cela de telle sorte que la courbe θ, qui remplace ψ, ne passe pas en ω. L'exposant k ne peut être abaissé davantage. Soit pris, en effet, sur S, un point infiniment voisin de ω, et dont x, y soient les coordonnées. Le polynome θ a une limite finie, et, par suite, aussi le premier membre de (3). Mais $\frac{\partial S}{\partial y}$ est infiniment petit. Donc le produit du premier membre de (3) par une puissance négative de $\frac{\partial S}{\partial y}$ est infini. Donc ce produit ne peut être égal à la valeur acquise au point ω par un polynome entier. Donc :

Théorème II. — *La valeur minima de l'exposant* k (mentionné au théorème I) *est celle qui fait acquérir au premier membre de la relation* (1) *une valeur finie pour les points où la tangente de la courbe* $S=0$ *est parallèle à l'axe des* y.

4. Je désignerai par la lettre α la valeur minima de k. Le théorème II conduit à un procédé simple pour calculer α. Soient ξ, η les coordonnées de ω. Aux environs de ω, le binome $(y-\eta)$ est développable en série suivant les puissances entières et positives de $(x-\xi)^{\frac{1}{2}}$, de la manière suivante :

$$(4)\qquad y=\eta+A(x-\xi)^{\frac{1}{2}}+A'(x-\xi)+A''(x-\xi)^{\frac{3}{2}}+\ldots.$$

On aura, pour la dérivée, le développement

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}A(x-\xi)^{-\frac{1}{2}}+\ldots.$$

Ainsi, $(x-\xi)$ étant supposé infiniment petit du premier ordre, $\frac{dy}{dx}$ est d'ordre $-\frac{1}{2}$. Mais $\frac{\partial S}{\partial y}\frac{dy}{dx}$ a une limite finie, différente de zéro. Donc $\frac{\partial S}{\partial y}$ est infiniment petit d'ordre $\frac{1}{2}$. Donc $\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^\alpha$ est infiniment petit d'ordre $\frac{\alpha}{2}$. Soit maintenant σ l'ordre de la partie principale de

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right),$$

quand on y substitue à y et à ses dérivées le développement (4) et ses dérivées. Il en résulte, pour α, la valeur $\alpha = -2\sigma$.

On doit, bien entendu, pour être d'accord avec l'hypothèse faite sur S, supposer que, dans (4), ξ, η, A, A′, A″, ... sont des indéterminées. Cela étant, on verra aisément qu'il en résulte pour σ une valeur négative, et dont le double est un entier. On trouvera donc, pour α, un entier positif, comme cela doit être.

5. Le nombre α, ainsi calculé, vérifie la relation

$$(5) \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^\alpha f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) \equiv \theta(x, y),$$

où θ est un polynome entier. Si la courbe $\theta = 0$ passe en un point de S à l'infini, on voit, en raisonnant comme au n° 3, que θ est de la forme $\Phi + LS$, L et Φ étant des polynomes entiers, et la courbe $\Phi = 0$, de degré moindre que θ, n'ayant plus aucun point commun avec S à l'infini. Par suite, au lieu de (5), on peut écrire

$$(6) \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^\alpha f \equiv \Phi.$$

Il est manifeste que tous les points d'intersection des courbes S et Φ satisfont, sur S, à la condition exprimée par l'équation différentielle $f = 0$, et réciproquement. Par suite, toute courbe plane algébrique qui passe en tous les points de S satisfaisant à cette condition a une équation de la forme $LS + P\Phi = 0$, L et P étant des polynomes entiers. Par suite, si cette courbe est distincte de S et de degré non supérieur à Φ, son équation se réduit à la forme $LS + \Phi = 0$, où le degré de L est égal à la différence de ceux de Φ et de S. On voit donc que le premier des problèmes proposés plus haut (n° 1) consiste à

déterminer le degré de la courbe Φ que nous venons de trouver par la relation (6).

Pour trouver ce degré, je cherche celui de la résultante en x des équations $\Phi = 0$, $S = 0$. J'emploie, à cet effet, un procédé d'élimination bien connu. De $S = 0$, je tire les divers développements de y suivant les puissances descendantes de x. Soit m le degré de S. J'aurai m développements procédant suivant les puissances entières de x, commençant chacun par un terme du premier degré. Soit

$$(7) \qquad y = Bx + C + \frac{D}{x} + \frac{E}{x^2} + \ldots$$

un de ces développements, dont on doit supposer les coefficients indéterminés, suivant l'hypothèse faite sur S. Pour obtenir la résultante, il faut substituer à y, dans $\Phi(x, y)$, successivement les m développements analogues, et faire le produit des résultats. Le degré de la résultante est la somme des degrés de chacune de ces valeurs de Φ, c'est-à-dire ici m fois le degré de l'une d'elles.

Ce procédé d'élimination fait disparaître les solutions infinies, s'il y en a. Mais, comme par hypothèse il n'en existe pas, le degré de la résultante est le produit des degrés de S et de Φ. Donc le degré de Φ est précisément égal au degré de la valeur obtenue pour Φ quand on y substitue à y le développement (7).

Or, par hypothèse, ce développement est tiré de l'équation $S(x, y) = 0$. Donc la valeur (7) de y y fait identiquement évanouir S. Donc, au lieu de substituer cette valeur dans Φ, on peut la substituer dans le premier membre de (6) : le résultat sera le même. Soit donc β le degré qu'acquiert f par cette substitution ; le degré du premier membre de (6), et par suite le degré de Φ, est

$$M = \alpha(m - 1) + \beta.$$

6. Les résultats des nos 4 et 5 se résument dans l'énoncé suivant :

Théorème III. — *Les points d'une courbe algébrique plane* S, *de degré* m, *qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle entière*

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0,$$

sont les intersections de S avec une autre courbe algébrique, dont le degré est de la forme $\alpha(m-1)+\beta$, *les coefficients* α *et* β *ne dépendant que de l'équation différentielle. On peut calculer ces coefficients comme il suit :*

1° Substituez, dans f, à y un développement suivant les puissances entières et ascendantes de $(x-\xi)^{\frac{1}{2}}$, *commençant par une constante, et dans lequel les coefficients et la constante* ξ *soient indéterminés ; et ordonnez le résultat de la substitution suivant les mêmes puissances. L'exposant de* $(x-\xi)^{\frac{1}{2}}$, *dans le premier terme, est égal et de signe contraire à* α.

2° Substituez, dans f, à y un développement suivant les puissances entières et descendantes de x, commençant par un terme du premier degré, et à coefficients indéterminés ; et ordonnez le résultat suivant les mêmes puissances. L'exposant de x, dans le premier terme, est égal à β.

7. On peut donner au théorème III une autre forme, moins commode, il est vrai, pour le calcul des coefficients α et β, mais utile cependant dans quelques cas. Cette forme nouvelle se prête d'ailleurs très bien à une généralisation, comme on le verra dans la dernière partie de ce Mémoire.

Je fais une substitution homographique

$$(8)\qquad x=\frac{ax'+by'+c}{Ax'+By'+C},\qquad y=\frac{a'x'+b'y'+c'}{Ax'+By'+C}.$$

Pour abréger l'écriture, je poserai

$$(9)\qquad (Ab-Ba)\left(x'\frac{dy'}{dx'}-y'\right)-(Bc-Cb)\frac{dy'}{dx'}+Ca-Ac=R,$$

$$(10)\qquad Ax'+By'+C=z.$$

On déduit aisément de (8), par les procédés habituels pour le changement des variables, et en désignant par R′ ce que devient R quand on y accentue les lettres a, b, c,

$$(11)\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{R'}{R};$$

puis, pour $p \geqq 2$,

$$\frac{d^p y}{dx^p} = \frac{z^{p+1}}{R^{2p-1}} V, \tag{12}$$

V étant une fonction entière de x', y' et des dérivées de y', jusqu'à l'ordre n, par rapport à la nouvelle variable indépendante x', et qui n'est divisible ni par z ni par R. Je laisse au lecteur le soin de démontrer l'équation (12).

Soit maintenant

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

une équation différentielle *entière*. J'y fais le changement de variables (8). Soit

$$f'\left(x', y', \frac{dy'}{dx'}, \ldots, \frac{d^n y'}{dx'^n}\right) = 0$$

sa transformée, également sous forme entière. D'après les équations (8), (10), (11) et (12), il est manifeste que, pour former f', il n'y a qu'à substituer, dans f, les valeurs de $x, y, \ldots$, fournies par ces équations, et à supprimer un facteur de la forme $\frac{1}{R^\alpha z^\beta}$, α et β étant des entiers dont le premier est positif, et le second positif ou négatif. Or ces nombres α et β sont précisément les mêmes que précédemment, comme je vais le démontrer : c'est en cela que consiste la nouvelle forme du théorème III.

8. En désignant par K une constante, on a, en vertu des équations (8), ainsi que je viens de l'expliquer, une identité de la forme

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = \frac{K}{R^\alpha z^\beta} f'\left(x', y', \frac{dy'}{dx'}, \ldots, \frac{d^n y'}{dx'^n}\right). \tag{13}$$

J'ai considéré précédemment une courbe S. Soit S' sa transformée par la substitution (8). Sur S', je prends un point ω' dans lequel R s'évanouisse. En ce point, f' et z ont des valeurs finies, différentes de zéro. Pour un point m', pris sur S' à distance infiniment petite d'ordre ε du point ω', R est un infiniment petit de ce même ordre. Donc, en m', la partie principale du second membre de (13), et par suite celle de f, est d'ordre $-\alpha\varepsilon$.

Au point ω' correspond, sur S, un point ω dans lequel la tangente

de S est parallèle à l'axe des y ; et, au point m', un point m, dont la distance à ω est infiniment petite d'ordre ε. Mais, aux environs de ω, la variation de l'ordonnée des points de S est proportionnelle à la racine carrée de la variation de leur abscisse. Donc, pour m, la variation de l'abscisse est d'ordre 2ε. Elle sera du premier ordre, si l'on suppose $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Ceci étant supposé, la partie principale de f est, au point m, de l'ordre $-\frac{\alpha}{2}$. Donc ce nombre α est le même qu'au théorème III.

De même, soit Ω' un point de S', dans lequel z s'évanouisse ; et soit M' un point, pris sur S' à distance infiniment petite du premier ordre de Ω'. En M', le second membre de (13) et par suite f, est infiniment grand d'ordre β. Mais à Ω' correspond, sur S, un point à l'infini. Donc, aux environs d'un point à l'infini de S, f est du degré β. Donc ce nombre β est le même qu'au théorème III. J'ai donc cette proposition :

Théorème IV. — *Si l'on effectue, sur l'équation différentielle entière $f = 0$, la substitution homographique* (8), *et que $f' = 0$ soit la transformée sous forme entière, on a identiquement, en désignant par* K *une constante, et par* R *et par z les expressions* (9) *et* (10),

$$f = \frac{K}{R^{\alpha} z^{\beta}} f'.$$

Les exposants α et β sont des entiers dont le premier est positif, le second positif ou négatif.

Les points d'une courbe algébrique plane S, *de degré* m, *qui satisfont à la condition exprimée par l'équation $f = 0$, sont les intersections de* S *et d'une autre courbe algébrique, dont le degré est $\alpha(m-1)+\beta$.*

9. Le premier des deux problèmes posés plus haut (n° 1) est résolu par le théorème III ou par le théorème IV. Avant de passer au second problème, je veux déduire de l'analyse précédente une conséquence qui sera bientôt utile.

On vient de voir (n° 8) que, si ω est un point de S, dans lequel la tangente soit parallèle à l'axe des y, et m un point de S dont la distance à ω soit infiniment petite du premier ordre (je fais ici $\varepsilon = 1$),

la partie principale de f est, au point m, de l'ordre $-\alpha$. Si, au lieu de supposer, comme jusqu'à présent, que S soit un polynome de forme générale dans son degré, et à coefficients indéterminés, nous le supposons maintenant particularisé, cette assertion peut devenir inexacte. On le voit sur la relation (13) ; car si, au point ω' qui, sur S', correspond à ω, f' s'évanouit, l'ordre de f, au point m, surpasse $-\alpha$. S'il en est ainsi, la courbe Φ passe en ω. Je vais montrer que cette circonstance particulière peut être écartée au moyen d'une transformation homographique.

Soient, en effet, ω'_1 un point de S' dans lequel la tangente de S' soit parallèle à l'axe des y', et ω_1 le point correspondant sur S. On peut manifestement choisir les constantes de la substitution de telle sorte que tous les points tels que ω_1 soient des points dans lesquels f ait des valeurs finies, différentes de zéro, sauf le cas, que j'écarte naturellement, où l'équation $S=0$ serait une intégrale de $f=0$. Les constantes étant ainsi choisies, l'ordre de f', aux environs de ω'_1, est égal à $-\alpha$. Ainsi la circonstance particulière dont il vient d'être question est écartée, si, au lieu de la courbe S et de l'équation $f=0$, j'envisage la courbe S' et l'équation $f'=0$.

On verra de même que, par cette transformation, on peut aussi faire en sorte que, pour tous les points à l'infini de la courbe S', le degré de f' soit toujours β, exactement comme dans le cas où S est un polynome indéterminé. Donc, en résumé, on peut, sans restreindre la généralité, supposer toujours que la courbe Φ ne passe en aucun des points de S à l'infini, ni en aucun de ceux où la tangente de S est parallèle à l'axe des y, sous la condition d'entendre, par la courbe S et par l'équation $f=0$, des transformées de la courbe et de l'équation proposée au moyen d'une substitution homographique.

10. Les points d'une courbe S qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle $f=0$ sont, d'après les théorèmes III et IV, les intersections de S et d'une autre courbe algébrique Φ, dont ces propositions nous enseignent à calculer le degré. Le nombre de ces points est donc, en général, égal au produit des degrés des deux courbes. Mais, dans des cas particuliers, quelques-unes des intersections de S et de Φ peuvent se réunir, notamment aux points singuliers de S. C'est dans l'étude de ces circonstances que consiste le second de nos problèmes. La question à résoudre est donc celle-ci :

Trouver le nombre des intersections des courbes S *et* Φ, *qui sont confondues en un point donné de* S.

Je rappelle d'abord comment ce nombre peut être déterminé pour deux courbes quelconques. Soit O un point (singulier ou non) d'une courbe plane algébrique S. Les branches de la courbe S se répartissent, au point O, en différents systèmes circulaires (S), (S′), (S″),... Je considère l'un d'eux (S). En désignant par ξ, η les coordonnées de O, je puis représenter (S) par deux équations telles que

$$(14) \qquad x-\xi=t^r, \qquad y-\eta=\varphi(t).$$

Dans ces équations, r est un entier positif, et $\varphi(t)$ une fonction synectique pour les petites valeurs de t, s'évanouissant avec cette variable, et qui, en outre, acquiert r valeurs distinctes quand on donne à t successivement les r valeurs qui répondent à une valeur donnée de $(x-\xi)$.

Soit maintenant $\Phi(x, y)=0$ l'équation *entière* d'une courbe algébrique passant en O. Dans le polynome entier Φ, je substitue à x et à y les valeurs tirées de (14), et j'ordonne le résultat suivant les puissances ascendantes de t. Soit n le degré de t au premier terme.

Je considère de même les autres systèmes circulaires (S′), (S″), et soient n', n'', ... les nombres analogues à n, et qui leur sont relatifs.

Le nombre des intersections de S *et* Φ, *confondues en* O, *est*

$$n+n'+n''+\ldots.$$

Pour appliquer ce procédé de calcul au cas actuel, j'observe que, par hypothèse, les valeurs de x et de y, déduites de (14), font évanouir S. Or, on a (n° 5)

$$(15) \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^\alpha f\equiv\Phi(x, y).$$

Donc, pour calculer les nombres n, n', n'', ..., on peut opérer sur le premier membre de (15), au lieu d'opérer sur Φ. Soit n_1 le nombre analogue à n, obtenu en opérant sur $\frac{\partial S}{\partial y}$ comme je viens de l'indiquer sur Φ; soit ν le nombre obtenu en opérant sur f. En opérant sur le premier membre de (15), on obtiendrait le nombre $(\alpha n_1+\nu)$. Soient de même n'_1, n''_1, ...; ν', ν'', ... les nombres analogues obtenus en opé-

rant avec les systèmes circulaires (S'), (S''), ... On aura

$$n + n' + n'' + \ldots = \alpha(n_1 + n'_1 + n''_1 + \ldots) + \nu + \nu' + \nu'' + \ldots.$$

Je poserai

$$n_1 + n'_1 + n''_1 + \ldots = G, \qquad \nu + \nu' + \nu'' + \ldots = L.$$

Le nombre des points de S, satisfaisant à la condition $f = 0$, et qui se réunissent en O, est $(\alpha G + L)$. Le nombre G se calcule, comme on le voit, indépendamment de l'équation différentielle, et le nombre L sur cette équation même. On peut donc considérer par là notre problème comme résolu. Tout ce qui va suivre constitue la discussion de notre solution. On pourrait toutefois compléter cette solution en examinant le cas où le point considéré est à l'infini. Il n'y a pas là de difficulté nouvelle, et la méthode précédente s'applique, avec une faible modification, à ce cas. Je n'en ferai pas le développement, puisqu'il a été prouvé précédemment (n° 9) que, sans nuire à la généralité, ce cas peut toujours être écarté.

11. Comme le nombre G ne dépend que de la courbe S, on est naturellement conduit à considérer successivement tous les points de S, dans lesquels G n'est pas nul. On doit penser que, dans le nombre total $\Sigma(\alpha G + L)$, la somme des nombres G sera remplacée par un élément simple de la courbe.

Pour donner au résultat sa forme la plus simple, je suppose qu'aucune asymptote, ni aucune tangente singulière de S ne soit parallèle à l'axe des y, et qu'en outre S n'ait aucune branche tangente à la droite de l'infini. Ces hypothèses ne diminuent pas la généralité, puisque, comme il a déjà été dit, nous entendons par S une transformée homographique quelconque de la courbe proposée. De ces suppositions il résulte que le nombre des tangentes de S, parallèles à l'axe des y, est égal à la *classe* de cette courbe.

Nous considérons tous les points de S dans lesquels G n'est pas nul, c'est-à-dire seulement ceux dans lesquels $\frac{\partial S}{\partial y}$ s'évanouit ; car ceux dans lesquels $\frac{\partial S}{\partial y}$ est infini sont les points à l'infini de S, et ces points ne sont pas à considérer.

Or $\frac{\partial S}{\partial y}$ s'évanouit d'abord en tous les points singuliers de S. La

somme $\sum G$, pour ces divers points, est égale (nº 10) au nombre total des intersections des courbes $S=0$, $\frac{\partial S}{\partial y}=0$, qui sont confondues en ces divers points.

Les autres points où $\frac{\partial S}{\partial y}$ s'évanouit sont ceux où la tangente de S est parallèle à l'axe des y. Leur nombre est la classe c de la courbe S. Soit m le degré de S ; celui de $\frac{\partial S}{\partial y}$ est $(m-1)$. On a donc

$$c+\sum G = m(m-1).$$

Or, pour chacun des derniers points, nous savons (nº 9) que $(\alpha G + L)$ est nul, puisque la courbe Φ n'y passe pas. Donc nous pouvons nous borner à considérer les points singuliers de S. Soit donc $\mathfrak{L}$ la somme des nombres L pour tous les points singuliers de S. Le nombre total des solutions réunies en ces points est :

$$\alpha\sum G + \mathfrak{L} = \alpha[m(m-1)-c]+\mathfrak{L}.$$

Mais le nombre total des solutions, c'est-à-dire des intersections de S et Φ, est $\alpha m(m-1)+\beta m$; donc le nombre N des solutions qui subsistent, après suppression de celles qui sont réunies aux points singuliers de S, est

$$N = \alpha c + \beta m - \mathfrak{L}. \tag{16}$$

Ainsi le calcul se réduit à celui du nombre $\mathfrak{L}$, que l'on trouvera en opérant sur l'équation différentielle elle-même exactement comme on ferait sur l'équation d'une courbe, pour trouver le nombre de ses intersections avec S, confondues aux divers points singuliers de S.

12. Le nombre $\mathfrak{L}$ dépend à la fois de la courbe et de l'équation ; on peut se demander suivant quelle loi. Il est manifeste qu'on ne saurait répondre à cette question sans supposer, entre la courbe et l'équation, une certaine indépendance. Cette réserve est analogue à celles qu'on est conduit à faire dans la théorie des *caractéristiques* des systèmes de coniques. Ce n'est pas sans dessein que je cite ici la théorie des caractéristiques : on va voir que les recherches actuelles ont avec cette théorie plus d'un rapport. En ce qui touche l'indépen-

dance que je supposerai entre la courbe et l'équation différentielle, je la préciserai entièrement comme je vais l'expliquer.

Soit, comme au n° 10, un système circulaire

$$(17) \qquad x - \xi = t^r, \qquad y - \eta = \varphi(t).$$

Je suppose d'abord que l'entier positif r et les exposants successifs de t, dans le développement de $\varphi(t)$ suivant les puissances entières et positives de t, soient des nombres donnés ; mais que ξ, η et les coefficients du développement soient indéterminés. En opérant sur f comme il a été expliqué au n° 10, on trouve un nombre ν, qui est un élément du nombre $\mathcal{L}$.

Soit maintenant donnée une courbe S, qui comprenne un système circulaire de branches représenté par les équations (17), dans lesquelles alors les constantes ne sont plus indéterminées, mais ont, au contraire, des valeurs données. En opérant de même sur f, on pourra trouver soit le nombre ν, soit un nombre supérieur. Si effectivement on trouve ν, et que la même chose ait lieu pour tous les systèmes circulaires de la courbe S en ses points singuliers, je dirai que la courbe S et l'équation différentielle sont *indépendantes*, ou que la condition exprimée par l'équation différentielle est *indépendante* de la courbe :

D'après cette définition même, et comme cas particulier, *l'élément du nombre $\mathcal{L}$, relatif à un système circulaire de branches d'une courbe, et pour une condition indépendante de cette courbe, ne dépend pas de l'origine de ce système circulaire*. [L'origine du système circulaire (17) est le point ξ, η.]

Par exemple, il est manifeste que l'élément ν du nombre $\mathcal{L}$, relatif à une branche ordinaire

$$x - \xi = t, \qquad y - \eta = At + Bt^2 + Ct^3 + \ldots$$

est nul. Donc :

Théorème V. — *Sur une courbe qui ne possède que des branches simples* (ou, suivant M. Cayley, branches *linéaires*), *le nombre des points qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle algébrique, et indépendante de la courbe, est $\alpha c + \beta m$. Les nombres c et m sont la classe et le degré de la*

courbe, les nombres α *et* β *ne dépendent que de l'équation différentielle*. (Ce sont les mêmes qu'aux théorèmes III et IV.)

13. Considérons maintenant une courbe S qui comprenne des systèmes circulaires d'une famille déterminée, et qui, en dehors de ces systèmes circulaires, ne comprenne que des branches simples. J'entends par *famille* l'ensemble des systèmes circulaires (17) dans lequel les exposants sont donnés et les coefficients indéterminés. Soit ν l'élément du nombre $\mathfrak{L}$, relatif à un système circulaire de cette famille. Si l'on suppose l'indépendance entre la courbe et l'équation différentielle, le nombre $\mathfrak{L}$ sera le produit de ν par le nombre des systèmes circulaires de la famille considérée, qui se trouvent dans S. Soit k ce nombre ; on a donc, pour le nombre des points de S qui satisfont à la condition considérée,

$$N = \alpha c + \beta m - \nu k.$$

Si, de même, je considère une courbe S comprenant deux familles déterminées de systèmes circulaires, on aura

$$N = \alpha c + \beta m - \nu k - \nu' k'.$$

Et enfin, si l'on considère une courbe comprenant q familles déterminées de systèmes circulaires, on aura

$$N = \alpha c + \beta m - \nu k - \nu' k' - \nu'' k'' - \ldots - \nu^{(q-1)} k^{(q-1)}. \tag{18}$$

Tous les termes de cette formule sont, comme les deux premiers, le produit d'un nombre dépendant de la condition par un nombre dépendant de la courbe. Ainsi :

THÉORÈME VI. — *Le nombre des points d'une courbe algébrique plane qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle algébrique et indépendante de la courbe s'exprime par une somme de termes dont chacun est le produit d'un nombre ne dépendant que de la condition par un nombre ne dépendant que de la courbe. Le nombre de ces termes est au plus égal* (on verra qu'il peut être moindre) *à celui des familles de systèmes circulaires que comprend la courbe* (en comptant les branches simples ordinaires pour une famille, et les branches simples à inflexion pour une seconde famille).

Si la courbe n'est en aucune façon précisée, le nombre des termes est-il effectivement illimité, comme semble l'indiquer ce dernier théorème? Ou plutôt dans quelle mesure faut-il préciser l'équation différentielle pour que, de ce fait, le nombre des termes se trouve limité? Telle est la question dont je vais actuellement m'occuper.

14. Je considère, en premier lieu, une équation différentielle du premier ordre

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Pour un système circulaire quelconque, à coefficients indéterminés, $x, y, \frac{dy}{dx}$ ont, à l'origine de ce système circulaire, des valeurs finies et indéterminées. Il en est de même de f. Donc, quel que soit le système circulaire, le nombre ν est nul ; dont $\mathfrak{L}$ l'est aussi. Ainsi :

Théorème VII. — *Le nombre des points d'une courbe algébrique plane quelconque, de classe* c *et de degré* m, *qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle du premier ordre algébrique, et indépendante de la courbe, est* $(\alpha c + \beta m)$, *les nombres* α *et* β *ne dépendant que de l'équation différentielle.*

Si l'on applique à la fois à la courbe et à l'équation une transformation corrélative, le nombre $(\alpha c + \beta m)$ ne change pas, tandis que les nombres c et m se permutent entre eux. Donc les nombres α et β se permutent aussi entre eux. Par suite, la signification géométrique de α se trouvera en transformant celle de β, laquelle est évidente.

Je suppose que l'intégrale générale de l'équation proposée se représente par un système de courbes planes (généralement transcendantes), que, pour abréger, je désigne par *courbes intégrales*. En supposant $m = 1$, $c = 0$, je vois que β *est le nombre de courbes intégrales qui touchent une droite*. Par suite, α *est le nombre de courbes intégrales qui passent par un point*. Suivant les conventions usitées pour les systèmes de courbes algébriques, et étendues par M. Fouret aux systèmes de courbes transcendantes [1], les nombres α et β sont les *carac-*

---

[1] *Bulletin de la Société mathématique*, t. II, p. 72.

téristiques du système formé par les courbes intégrales. Le théorème VII peut alors être énoncé comme il suit :

Dans un système dont les caractéristiques sont α *et* β, *le nombre des courbes qui touchent une courbe de classe* c *et de degré* m *est* $(\alpha c + \beta m)$ [1].

Il faut avoir soin d'ajouter, comme au théorème VII, que *la courbe doit être indépendante du système*.

15. Je considère, en second lieu, les équations différentielles du second ordre ; mais je m'occupe d'abord de la plus simple, $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, qui est celle des lignes droites, et qui, sur une courbe, en caractérise les points d'inflexion.

J'applique d'abord à cette équation le théorème III. En supposant

$$y = \eta + A(x-\xi)^{\frac{3}{2}} + \ldots,$$

je trouve

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{4}A(x-\xi)^{-\frac{1}{2}} + \ldots;$$

donc (théorème III) $\alpha = 3$. Je suppose ensuite

$$y = Bx + C + \frac{D}{x} + \ldots,$$

d'où

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{D}{x^3} + \ldots;$$

donc $\beta = -3$. La courbe Φ, qui coupe la courbe S de degré m en ses points d'inflexion, est donc de degré $3(m-1) - 3 = 3(m-2)$, ce qui est bien connu. J'arrive maintenant à l'étude du nombre $\mathfrak{L}$. Soit un système circulaire

$$(19) \qquad x - \xi = t^r, \qquad y - \eta = \varphi(t) = At^r + Bt^{r+\rho} + \ldots.$$

Dans le développement de $\varphi(t)$, j'ai supposé le premier terme du degré r. C'est en effet la condition pour que la tangente ne soit parallèle à aucun des axes des coordonnées. Pour calculer le nombre ν,

---

[1] Cette proposition, connue depuis longtemps pour les systèmes de courbes algébriques, a été étendue par M. Fouret au cas actuel.

élément de $\mathfrak{L}$ relatif au système circulaire (19), exprimons $\frac{d^2y}{dx^2}$ en fonction de t, développons suivant les puissances ascendantes de t, et prenons le premier terme. Ce premier terme est

$$(20) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho}{r}\left(1+\frac{\rho}{r}\right) B t^{\rho-r} + \ldots;$$

donc $\nu = \rho - r$. Donc le nombre des points d'inflexion d'une courbe de degré m et de classe c est $3(c-m) - \Sigma(\rho - r)$, la sommation s'appliquant à tous les systèmes circulaires formés par les branches de la courbe en ses points singuliers.

Je donne habituellement à ce résultat une autre forme. Pour une branche simple ($r=1$) et ordinaire ($\rho = 1$), le nombre $(\rho - r)$ est nul. Pour une branche simple et à inflexion ($\rho = 2$), le nombre $(\rho - 1)$ est égal à l'unité. Enfin, pour une branche simple où ρ est supérieur à 2, on voit que l'origine de cette branche compte pour $(\rho - 1)$ ou $(\rho - r)$ inflexions. Par analogie, pour un système circulaire quelconque où le nombre ρ est supérieur à r, j'ai donné au nombre $(\rho - r)$ le nom de *nombre des inflexions effectives* contenues dans les branches de ce système circulaire. Cette dénomination se justifie par diverses considérations qui ne sauraient trouver place ici. Au contraire, quand le nombre ρ est égal ou inférieur à r, je conviens de dire que le système circulaire ne contient pas d'inflexion effective. Pour donner à la formule du nombre des points d'inflexion la forme que j'ai en vue, je conserve les lettres r et ρ seulement pour les systèmes circulaires où l'on a $\rho > r$. En outre, dans la sommation $\Sigma(\rho - r)$, je fais entrer les branches simples à inflexion. Je désigne cette somme par la lettre i. Le nombre i est celui des inflexions effectives de la courbe. En second lieu, j'emploie les lettres r' et ρ' pour les systèmes circulaires où l'on a $\rho' < r'$, et je désigne par i' la somme $\Sigma(r' - \rho')$. Les systèmes circulaires, où l'on a $\rho = r$, disparaissent d'eux-mêmes, et la formule des points d'inflexion devient

$$(21) \qquad i - i' = 3(c - m).$$

Mais, par une transformation corrélative, un système circulaire tel que (19) se change en un autre où les deux nombres r et ρ sont permutés entre eux. Donc le nombre i' a, pour une courbe corrélative de

la proposée, le même sens que le nombre i pour la courbe proposée elle-même. La formule (21) peut donc être ainsi énoncée :

La différence des nombres des inflexions effectives de deux courbes corrélatives est égale au triple de la différence de leurs degrés pris en ordre inverse.

Il était nécessaire de rappeler ici la formule (21), afin de pouvoir interpréter le résultat que je vais maintenant obtenir pour les équations quelconques du second ordre.

16. Il s'agit d'étudier la composition du nombre $\mathfrak{L}$ pour une équation du second ordre

$$(22) \qquad 0 = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = \sum \psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^s.$$

L'équation proposée étant mise sous forme entière, ψ est un polynome entier et s un entier positif. De plus, parmi les diverses valeurs de l'entier s, correspondant aux divers termes de l'équation, il s'en trouve une qui est zéro, sans quoi l'équation serait divisible par $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Je considère encore le système circulaire (19). Les parties principales de x, y, $\frac{dy}{dx}$ sont ξ, η, A, qui sont des indéterminées. Donc, après substitution des valeurs qui répondent au système circulaire (19), le polynome ψ a pour partie principale une constante qui n'est pas nulle. En second lieu, la partie principale de $\frac{d^2y}{dx^2}$ est, comme on l'a vu (20), de l'ordre $(\rho - r)$. J'ai ici à distinguer trois cas, suivant le signe de $(\rho - r)$:

1° $\rho > r$. Tous les termes dans lesquels s n'est pas nul ont des parties principales de degrés positifs. Seul, le terme où s est nul a pour partie principale une constante. Donc la partie principale de f est une constante. Donc le nombre ν est nul. Donc les systèmes circulaires où l'on a $\rho > r$ n'interviennent pas dans la composition du nombre $\mathfrak{L}$.

2° $\rho = r$. Tous les termes de (22) ont pour parties principales des constantes. Il faut se demander si, entre ces divers termes, peut exister une réduction qui fasse disparaître la somme de leurs parties

principales. Or, d'après l'équation (20), la partie principale du terme $\psi\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^s$ est

$$\left(\frac{\rho}{r}\right)^s\left(1+\frac{\rho}{r}\right)^s\psi(\xi, \eta, A)B^s.$$

Elle ne peut se réduire avec la partie principale d'un autre terme : ces deux expressions contiennent, en effet, l'indéterminée B avec des exposants différents. Donc la partie principale de f est encore une constante. Donc les systèmes circulaires où l'on a $\rho=r$ n'interviennent pas non plus dans la composition du nombre $\mathfrak{L}$.

3° $\rho<r$. La partie principale de chaque terme est d'ordre négatif $-s(r-\rho)$. Soit γ la plus grande valeur de s, c'est-à-dire le degré de l'équation par rapport à $\frac{d^2y}{dx^2}$. La partie principale de f est de l'ordre $-\gamma(r-\rho)$. Tel est donc l'élément du nombre $\mathfrak{L}$ pour un système circulaire où l'on a $\rho<r$. Le nombre $\mathfrak{L}$ est donc égal à $-\gamma i'$, le nombre i' étant, comme précédemment, la somme des nombres positifs $(r-\rho)$. Donc :

Théorème VIII. — *Le nombre des points d'une courbe algébrique plane, qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle du second ordre, et indépendante de la courbe, est* $\alpha c+\beta m+\gamma i'$; *les nombres* c, m, i' *dépendent de la courbe seule, et les nombres* α, β, γ *de l'équation différentielle seule.*

Les nombres c *et* m *sont la classe et le degré de la courbe. Le nombre* i' *est celui des inflexions effectives des courbes corrélatives de la proposée.*

Il est manifeste qu'on peut, en appliquant à la courbe et à l'équation une transformation corrélative, exprimer le même nombre par la formule $\alpha' m+\beta' c+\gamma' i$, où α', β', γ' sont les nombres analogues à α, β, γ pour l'équation différentielle transformée, et où le nombre i est, comme ci-dessus, le nombre des inflexions effectives de la courbe elle-même. Mais on peut obtenir immédiatement la nouvelle formule en partant de la précédente et en faisant usage de la formule (21). Je tire de cette dernière l'expression de i', et je conclus :

$$N=\alpha c+\beta m+\gamma i'=(\beta+3\gamma)m+(\alpha-3\gamma)c+\gamma i.$$

Ainsi les coefficients α', β', γ' sont exprimés par α, β, γ comme il

suit :

$$(23)\qquad \gamma'=\gamma,\qquad \alpha'=\beta+3\gamma,\qquad \beta'=\alpha-3\gamma.$$

La troisième équation se déduit de la seconde en permutant l'accent, en sorte que ces relations sont bien, comme cela doit être, symétriques par rapport aux deux systèmes de nombres.

Quelles sont, maintenant, les significations géométriques des nombres α, β, γ, en supposant, comme au n° 14, que l'intégrale générale de l'équation différentielle se puisse représenter par une série, ici doublement infinie, de courbes que j'appelle, pour abréger, *courbes intégrales?* En premier lieu, γ *est*, comme on l'a vu, *le degré de l'équation par rapport à* $\frac{d^2y}{dx^2}\cdot$ Donc c'est le nombre des valeurs de cette dérivée qui répondent à un système de valeurs données pour $x, y, \frac{dy}{dx}\cdot$ Donc γ *est le nombre des courbes intégrales qui passent par un point donné et y touchent une droite donnée.* Sous cette forme, il est évident que le nombre γ se conserve dans les transformations corrélatives, ainsi que le montre aussi la première des équations (23).

En second lieu, si je fais $m=1$, $c=0$, $i'=0$, N se réduit à β. Donc β *est le nombre des points d'une droite qui satisfont à la condition exprimée par l'équation différentielle*, ou *le nombre des courbes intégrales qui ont une droite donnée pour tangente d'inflexion.*

Le nombre β' a la signification corrélative de celle de β. Donc, d'après (23), *le nombre* $(\alpha-3\gamma)$ *est le nombre des courbes intégrales qui ont, pour point de rebroussement, un point donné.* Au point de vue algébrique, on verra sans peine que *le même nombre* $(\alpha-3\gamma)$ *est égal au degré, par rapport à* $\frac{dy}{dx}$, *du coefficient de la plus haute puissance de* $\frac{d^2y}{dx^2}$, *dans l'équation différentielle.*

17. Revenons, pour un instant, à la considération d'une équation différentielle d'ordre quelconque, et supposons une courbe S qui ne possède, en outre de branches simples, que des systèmes circulaires d'une seule famille : le rebroussement ordinaire, lequel est caractérisé

par les équations

$$x - \xi = t^2, \qquad y - \eta = A t^2 + B t^3 + C t^4 + \ldots.$$

Reportons-nous aux résultats du n° 13, et appelons $(-\gamma)$ le nombre ν relatif à cette famille de systèmes circulaires, pour l'équation proposée. La courbe S ne possède, en fait d'inflexions effectives, que des inflexions ordinaires. Ainsi, pour cette courbe, le nombre i est (n° 15) celui de ses inflexions ordinaires. Une courbe S′, corrélative de S, ne possède également, en fait d'inflexions effectives, que des inflexions ordinaires, corrélatives des rebroussements de S. Donc le nombre i' est ici celui des rebroussements de S. Cela posé, la formule (18) du n° 13 donne, pour le nombre des points de la courbe S qui satisfont à la condition exprimée par l'équation différentielle,

$$N = \alpha c + \beta m + \gamma i'. \tag{24}$$

Cette formule est entièrement semblable à celle qui est relative à une équation du second ordre et à une courbe ayant des singularités *quelconques*. Mais il ne faut pas perdre de vue que, dans le cas actuel, la courbe S ne doit posséder que des singularités spéciales. Toutefois, comme les courbes corrélatives de S ne contiennent, elles aussi, que ces mêmes singularités, on peut aussi, de la formule (24), déduire, de même que précédemment, la formule corrélative. Donc les équations (23) ont encore lieu entre α, β, γ et les coefficients analogues α', β', γ' relatifs à l'équation différentielle, transformée de la proposée par corrélation. La signification du coefficient γ ne peut plus ici être donnée d'une manière aussi simple; quand aux autres coefficients, leur signification se modifie à peine, ainsi qu'on le verra dans cet énoncé :

Théorème IX. — *Soit une courbe ne contenant que des branches simples et des branches à rebroussement ordinaire : le nombre de ses points qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle algébrique d'ordre n, et indépendante de la courbe, est $\alpha c + \beta m + \gamma r$. Les nombres c, m, r sont : la classe, le degré, le nombre des branches à rebroussement de la courbe. Les nombres α, β, γ ne dépendent que de l'équation différentielle, et ont les significations suivantes :*

β *est le nombre des points d'une droite qui satisfont à la con-*

dition exprimée par l'équation différentielle, ou le nombre des courbes intégrales qui ont une droite donnée pour tangente de $(n-1)^{\text{uple}}$ *inflexion.*

$(\alpha-3\gamma)$ *est le nombre des courbes intégrales qui, en un point donné, se composent de* n *branches ayant, avec une même tangente, des contacts de l'ordre* $\frac{1}{n}$.

$3(\alpha+\beta)+\gamma$ *est le nombre des courbes intégrales qui ont un contact d'ordre* n *avec une courbe donnée du troisième ordre et de la troisième classe.*

On peut aussi remarquer que $2(\alpha+\beta)$ est *le nombre des courbes intégrales qui ont, avec une conique donnée, un contact d'ordre* n. Ceci rend évident que le nombre $(\alpha+\beta)$ se conserve dans les transformations corrélatives, ainsi que le montrent aussi les équations (23). Cela étant, la signification du nombre $3(\alpha+\beta)+\gamma$ rend également évident que le nombre γ se conserve dans les transformations corrélatives.

Sous une forme géométrique, on peut énoncer le théorème IX (et la même remarque s'applique au théorème VIII) en disant que *le nombre des courbes d'une série* ∞^n *dans un plan, qui ont, avec une courbe donnée, un contact d'ordre* n, *est* $\alpha c+\beta m+\gamma r$, *pourvu que cette dernière ne contienne que des singularités ordinaires.*

Les interprétations précédentes des coefficients donnent, dans certains cas, des résultats d'apparence paradoxale, dont il est nécessaire de dire quelques mots. On ne doit pas perdre de vue que, dans tout le cours de cette analyse, il a été supposé (n° 9) que la courbe S ne fournit pas une intégrale de l'équation différentielle considérée. Il n'est donc pas permis d'appliquer les résultats acquis aux cas où cette supposition n'est pas vérifiée. Par exemple, si β est négatif, l'interprétation de ce nombre n'a plus aucun sens. On en peut conclure que les lignes droites fournissent des intégrales de l'équation. Si $(\alpha+\beta)$ est négatif, c'est que les coniques sont dans le même cas, etc. Je tire de là cette conséquence, qui me sera utile plus loin : *le nombre* $(\alpha+\beta)$ *ne peut être négatif que si l'équation différentielle est au moins du cinquième ordre.*

18. Dans l'énoncé du théorème VIII, qu'on peut rapprocher du

théorème IX, une circonstance doit attirer l'attention : si, au lieu de considérer une courbe S, de degré m, de classe c et possédant des singularités quelconques, on avait envisagé une courbe de degré m, possédant i' rebroussements ordinaires et, en outre, des points doubles ordinaires en nombre tel que, joints aux i' rebroussements, ils produisent l'abaissement $m(m-1)-c$ de la classe de la courbe, la formule $\alpha c+\beta m+\gamma i'$ n'aurait pas été changée. Ainsi, au point de vue de cette formule, toutes les singularités de la courbe produisent le même effet que i' rebroussements, et $\delta=\frac{1}{2}[m(m-1)-c-3i']$ points doubles. Si, en outre, on envisage, en même temps, la formule corrélative $(\beta+3\gamma)m+(\alpha-3\gamma)c+\gamma i$, on voit que les mêmes singularités produisent le même effet que i tangentes d'inflexion et

$$\delta'=\frac{1}{2}[c(c-1)-m-3i]$$

tangentes doubles. Nous sommes ainsi conduits à nous placer à un point de vue que les équations de *Plücker* et un Mémoire bien connu de M. *Cayley* ont rendu familier aux géomètres : nous nous trouvons en présence d'une catégorie de questions dans lesquelles toutes les singularités d'une courbe plane algébrique quelconque sont entièrement représentées par des nombres déterminés de points doubles, de points de rebroussement, de tangentes doubles et de tangentes d'inflexion.

Mais il faut se garder de donner à cette conception une extension qu'elle ne comporte pas. Ce serait, par exemple, une erreur de croire que les éléments dont je viens de parler, ou même d'autres, en nombre fini et déterminé, pourraient suffire à représenter, dans toutes les questions géométriques, les singularités d'une courbe algébrique quelconque. On s'en convaincra aisément par l'examen des circonstances qui s'offrent à l'égard des équations différentielles d'ordre supérieur au second. C'est de ce sujet que je vais maintenant m'occuper, en me bornant toutefois aux équations du troisième ordre, qui donnent une idée suffisante des résultats relatifs aux équations d'ordre plus élevé.

19. Soit une équation différentielle algébrique du troisième ordre

$$(25)\quad 0=f\left(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\frac{d^3y}{dx^3}\right)=\sum\psi\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{\lambda}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^{\mu},$$

où ψ est un polynome entier ; λ et μ sont des entiers positifs : une au moins des valeurs de λ est nulle ; de même à l'égard de μ. J'ai, comme précédemment, à étudier la composition du nombre $\mathfrak{L}$.

Soit, à cet effet, un système circulaire

$$(26) \qquad x-\xi=t^r, \qquad y-\eta=\varphi(t)=\mathrm{A}t^r+\mathrm{B}t^{r+\rho}+\mathrm{C}t^{r+\rho+\sigma}+\ldots.$$

Je distinguerai deux cas, suivant que ρ est égal r, ou en est différent. Le premier de ces cas est très simple et entièrement analogue à celui du n° 16. En supposant $\rho=r$, on trouve, pour les parties principales des dérivées de y,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2\mathrm{B}+\ldots, \qquad \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{\sigma}{r}\left(1+\frac{\sigma}{r}\right)\left(2+\frac{\sigma}{r}\right)\mathrm{C}t^{\sigma-r}+\ldots.$$

Répétant ici l'analyse du n° 16, on trouvera que le nombre ν est nul si σ est supérieur ou égal à r. Si, au contraire, σ est inférieur à r, et que δ soit le degré de f par rapport à $\frac{d^3y}{dx^3}$, le nombre ν est égal à $-\delta(r-\sigma)$. Par suite, pour l'ensemble des systèmes circulaires d'une courbe S, dans lesquels on a $\rho=r$, $\sigma<r$, l'élément du nombre $\mathfrak{L}$ est $-\delta\Sigma(r-\sigma)$.

J'arrive maintenant au cas où ρ est différent de r. D'après l'hypothèse $\rho\gtrless r$, on a, pour les parties principales, déduites de (26),

$$(27) \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\rho}{r}\left(1+\frac{\rho}{r}\right)\mathrm{B}t^{\rho-r}+\ldots, \qquad \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{\rho}{r}\left(\frac{\rho^2}{r^2}-1\right)\mathrm{B}t^{\rho-2r}+\ldots.$$

Après substitution des valeurs tirées de (26), pour $x, y, \ldots$, la partie principale du terme mis en évidence, dans (25), a pour degré

$$(28) \qquad \partial=\lambda(\rho-r)+\mu(\rho-2r)=(\lambda+\mu)\rho-(\lambda+2\mu)r.$$

Pour obtenir le degré de la partie principale de f, j'ai à chercher la plus petite des valeurs que puisse acquérir ∂ par la substitution aux lettres λ, μ de tous les systèmes de valeurs dont elles sont susceptibles dans (25). On voit immédiatement que le système (λ, μ), propre à fournir ce minimum, dépend généralement du rapport des nombres ρ et r. De là résulte une différence notable entre le cas actuel et ceux qui ont été précédemment envisagés.

La forme de l'expression (28) suggère naturellement l'idée d'employer, pour étudier ce minimum de ∂, l'artifice imaginé par *Newton* pour une question analogue. Le procédé que je vais développer est donc une imitation de la règle connue sous le nom de *parallélogramme de Newton*.

20. Le principe de cette règle se réduit à une proposition des plus simples : *Soient, dans un plan, et relativement à deux axes de coordonnées*, U, V *les coordonnées d'un point donné* M; *et* u, v *les coordonnées d'un point variable* m, *astreint à être situé dans l'intérieur d'un contour fermé et convexe* (C). *L'expression* $(uV - vU)$ *a un maximum et un minimum : on les obtient en plaçant* m *en l'un ou l'autre des deux points du contour, dans lesquels la tangente de ce contour est parallèle à la droite qui joint l'origine au point* M.

Pour distinguer le maximum et le minimum entre eux, on peut faire usage de la règle suivante : *Qu'on circonscrive au contour* C *un parallélogramme dont les côtés soient respectivement parallèles aux axes. Soient* p, q *les points de contact*, avec C, *de deux côtés consécutifs, et* Ω *le sommet du parallélogramme, point de concours de ces deux côtés, dont l'un* Ωp *est parallèle à l'axe des* u, *l'autre* Ωq *est parallèle à l'axe des* v. *La partie du contour* C, *inscrite dans l'angle* $p\Omega q$ *et tournant sa convexité vers* Ω, *sera distinguée par les signes des deux directions* Ωp, Ωq.

Cela posé, le point m, *qui rend* $(uV - vU)$ *minimum, est situé dans la partie distinguée par les signes :*

$+$	*pour* Ωp *et*	$-$	*pour* Ωq, *si* M *est dans l'angle*	$(+u, +v)$;
$+$	»	$+$	»	$(-u, +v)$;
$-$	»	$+$	»	$(-u, -v)$;
$-$	»	$-$	»	$(+u, -v)$.

Je laisse au lecteur le soin de démontrer ces règles, et je me borne à faire observer qu'elles s'appliquent aussi bien à un contour brisé qu'à un contour formé par une ligne continue. Il suffit que le contour soit toujours fermé et convexe. Quand le contour présente un angle, on doit entendre par *tangente* une droite qui, sans traverser le contour passe par le sommet de l'angle.

21. Pour appliquer à l'étude du minimum de ∂ les règles précédentes, je pose

$$(29) \qquad \lambda + \mu = u, \qquad \lambda + 2\mu = v.$$

A chaque terme de l'équation (25) correspond ainsi un point m, dont les coordonnées sont u, v. On peut unir par des lignes droites un certain nombre de ces points, de manière à tracer un polygone fermé et convexe, satisfaisant aux deux conditions suivantes : 1° tous ses sommets sont des points correspondant à des termes de (25); 2° tous les autres termes qui correspondent à des termes de (25) sont à l'intérieur de ce polygone. C'est ce polygone qui sera notre contour (C). Les coordonnées U et V du point M seront les nombres r et ρ, en sorte que (28) ∂ sera l'expression $(uV - vU)$. Comme r et ρ sont essentiellement positifs, M est dans l'angle $(+u, +v)$, en sorte que la partie *utile* du contour (C) sera uniquement celle qui est distinguée par la combinaison de signes $(+, -)$.

Soit m_j un sommet de (C) compris dans la partie utile. Ce sont les coordonnées de ce sommet qui rendent ∂ minimum si la droite menée par m_j avec le coefficient angulaire $\frac{\rho}{r}$ ne traverse pas le polygone; c'est-à-dire si $\frac{\rho}{r}$ est compris entre les coefficients angulaires des deux côtés dont l'intersection est m_j.

Soient donc $m_1, m_2, \ldots, m_k$ les sommets consécutifs de la partie utile de (C), rangés dans leur ordre naturel, et de telle sorte que les coefficients angulaires $c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}$ des côtés $m_1 m_2$, $m_2 m_3$, ... aillent en décroissant. Désignons, en général, par λ_j, μ_j les valeurs de λ et μ qui correspondent à m_j. Le minimum de ∂ est

$$(\lambda_1 + \mu_1)\rho - (\lambda_1 + 2\mu_1)r, \quad \text{si} \quad \frac{\rho}{r} > c_1,$$

$$(\lambda_2 + \mu_2)\rho - (\lambda_2 + 2\mu_2)r, \quad \text{si} \quad c_1 \geqq \frac{\rho}{r} > c_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots\ldots,$$

$$(\lambda_{k-1} + \mu_{k-1})\rho - (\lambda_{k-1} + 2\mu_{k-1})r, \quad \text{si} \quad c_{k-2} \geqq \frac{\rho}{r} > c_{k-1},$$

$$(\lambda_k + \mu_k)\rho - (\lambda_k + 2\mu_k)r, \quad \text{si} \quad c_{k-1} \geqq \frac{\rho}{r}.$$

22. Connaissant le minimum de ∂, il nous reste à établir que ce

minimum est l'ordre même de la partie principale de f. Il ne peut y avoir de doute à cet égard que si le même minimum est fourni par deux termes au moins : on pourrait, dans ce cas, craindre une réduction entre les parties principales de ces termes. Supposons donc qu'on ait, pour ces deux termes différents,

$$\partial = (\lambda + \mu)\rho - (\lambda + 2\mu)r = (\lambda' + \mu')\rho - (\lambda' + 2\mu')r.$$

En vertu de (27), les parties principales correspondantes contiennent, en facteur, la lettre B, respectivement, avec les exposants $(\lambda + \mu)$ et $(\lambda' + \mu')$. Pour que la réduction fût possible, il faudrait donc qu'on eût $\lambda + \mu = \lambda' + \mu'$. Il en résulterait donc soit $r = 0$, soit $\lambda = \lambda'$, $\mu = \mu'$, ce qui est impossible.

Donc le degré de la partie principale de f est égal au minimum de ∂.

Soit maintenant une courbe S, indépendante de l'équation différentielle. Je pose

$$\Sigma(\rho - r) = g_j, \qquad \Sigma(\rho - 2r) = h_j,$$

les sommations s'appliquant à tous les systèmes circulaires de S, où ρ et r sont différents, et où l'on a

$$c_{j-1} \geqq \frac{\rho}{r} > c_j.$$

Ces conditions s'appliquent aux valeurs 1, 2, ..., k du nombre j, à condition de supposer

$$c_0 = +\infty, \qquad c_k = 0.$$

Il résulte, de l'analyse précédente, que la partie du nombre $\mathfrak{L}$, relative à tous les systèmes circulaires de S, où ρ et r sont différents, est ainsi

$$(30) \qquad \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \ldots + \lambda_k g_k + \mu_1 h_1 + \mu_2 h_2 + \ldots + \mu_k h_k.$$

Cette expression contient $2k$ termes ; mais un des coefficients, au moins, est toujours nul. En effet, d'après (29), on a $2u - v = \lambda$. Comme λ est toujours positif et qu'au moins une de ses valeurs est nulle, on voit qu'un, au moins, des sommets utiles du polygone (c) correspond à une valeur nulle de λ. Donc un des coefficients λ, dans l'expression (30), s'évanouit. D'autre part, par un raisonnement analogue, on verra qu'aucune des valeurs nulles de μ ne correspond

à un sommet utile du polygone. Par suite, l'expression (30) se réduit, en général, à $(2k-1)$ ou $(2k-2)$ termes. Il peut y avoir encore une autre réduction dans le nombre des termes. Car la même valeur de λ peut appartenir à deux sommets différents de la partie utile du polygone ; et de même pour les nombres μ. On voit ainsi que *le nombre des termes distincts de l'expression* (30) *a pour limite inférieure le nombre des sommets utiles du polygone, diminué d'une unité.*

D'après (29), on a $u-v=-\mu$. Donc $(u-v)$ est minimum quand μ est maximum. Donc, parmi les sommets utiles de (c), se trouve un sommet répondant à une valeur de μ égale au degré de l'équation par rapport à $\frac{d^3y}{dx^3}$. C'est ce degré que j'ai précédemment désigné par δ (nº 19). Or on a vu que l'ensemble des systèmes circulaires de S, où les nombres ρ et r sont égaux, fournit au nombre $\mathfrak{L}$ l'élément $-\delta\Sigma(r-\sigma)$. Le coefficient δ de cet élément étant un des nombres μ de (30), il en résulte que $\mathfrak{L}$ se réduit lui-même, en tenant compte de toutes les réductions, à une somme de termes des deux formes λg et μh, où λ et μ sont des exposants de (25) correspondant à des sommets utiles de (c), et g et h des nombres dépendant de la courbe S.

23. Je résume ces résultats dans l'énoncé suivant :

Théorème X. — *Le nombre des points d'une courbe algébrique plane qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle algébrique du troisième ordre, et indépendante de la courbe, s'exprime par une somme de termes dont chacun est le produit d'un coefficient ne dépendant que de la condition par un nombre ne dépendant que de la courbe.*

Deux de ces termes sont αc, βm, *les mêmes qu'au théorème IX.*

Soit

$$0=\sum\psi\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^\lambda\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^\mu$$

l'équation différentielle proposée, sous forme entière. Dans les autres termes, les coefficients qui ne dépendent que de la condition sont, quelques-uns des exposants λ, μ, *définis comme il suit :*

A chaque terme de l'équation, faites correspondre, dans un

plan, un point m dont les coordonnées rectilignes soient $u = \lambda + \mu$, $v = \lambda + 2\mu$. *Tracez le polygone fermé et convexe, dont les sommets soient choisis parmi ces points, et qui enveloppe tous les autres. Considérez, parmi les sommets, ceux auxquels aboutissent des côtés dont les coefficients angulaires sont positifs, et qui, en outre, appartiennent à la partie du polygone dont la convexité est tournée vers l'axe des* v.

Les exposants λ *et* μ *qui correspondent à ces derniers sommets sont les coefficients dont il s'agit.*

On voit, par cette dernière proposition, que, contrairement à ce qui se passe pour les équations du premier et du second ordre, il ne suffit pas de savoir que la condition considérée est exprimée par une équation différentielle algébrique du troisième ordre pour en pouvoir conclure le nombre des termes auxquels se réduit la formule (18) du n° 13. Pour connaître une limite supérieure du nombre de ces termes, la courbe S restant indéterminée, il sera nécessaire de savoir d'avance que les exposants λ, μ sont renfermés dans de certaines limites. Par exemple, si l'on connaît le degré de l'équation différentielle par rapport à $\frac{d^2y}{dx^2}$ et $\frac{d^3y}{dx^3}$, on pourra manifestement assigner une limite supérieure au nombre des termes considérés. En effet, le polygone auxiliaire se trouvera renfermé dans un parallélogramme donné, et l'on connaîtra une limite supérieure du nombre de ses sommets. Mais il est également visible qu'on peut toujours choisir une équation différentielle du troisième ordre, de manière que le nombre des termes soit plus grand que tout nombre donné.

On a vu, au n° 13, que si la courbe que l'on considère est astreinte à ne posséder que des singularités appartenant à des familles déterminées, en nombre fini, le nombre de ces mêmes termes est, par là, déterminé, quel que soit l'ordre de l'équation différentielle. On voit donc, par ce rapprochement, qu'il est impossible de trouver un nombre limité de familles de singularités qui, dans les problèmes dépendant des éléments infinitésimaux du troisième ordre, représentent les singularités d'une courbe quelconque. C'est, comme nous l'avons vu précédemment, le contraire qui a lieu dans les problèmes dépendant des éléments infinitésimaux du premier et du second ordre.

Je n'examinerai pas ici les questions analogues pour les équations

différentielles d'ordre supérieur au troisième. La méthode suivie précédemment s'y applique cependant, mais avec quelques complications nouvelles. Laissant donc, quant à présent, ces questions à l'écart, je terminerai ce paragraphe en montrant comment, des coefficients λ, μ qui entrent dans l'expression de $\mathfrak{L}$ pour une équation différentielle du troisième ordre donnée, on peut déduire les analogues pour l'équation transformée par corrélation.

24. Je remarque, en premier lieu, que pour une branche simple, à inflexion simple ($r=1$, $\rho=2$), l'élément du nombre $\mathfrak{L}$, savoir, le minimum de

$$\partial = \lambda(\rho - r) + \mu(\rho - 2r),$$

est nul. Car ∂ se réduit à λ, dont le minimum est zéro. Il en est autrement pour un rebroussement ordinaire ($r=2$, $\rho=1$). D'après le n° 21, soit

$$c_{s-1} \geqq \frac{1}{2} > c_s;$$

l'élément de $\mathfrak{L}$, pour un rebroussement ordinaire, sera $-(\lambda_s + 3\mu_s)$. En employant la même notation qu'au n° 17, je poserai

$$\lambda_s + 3\mu_s = \gamma.$$

Entre α, β, γ et les coefficients correspondants pour la transformée de l'équation proposée par corrélation, ont lieu les équations (23) du n° 16, ainsi que je l'ai prouvé au n° 17. Ces équations sont

$$(31) \qquad \gamma' = \gamma, \qquad \alpha' = \beta + 3\gamma, \qquad \alpha = \beta' + 3\gamma.$$

Soit maintenant une courbe S comprenant ι rebroussements ordinaires, ι' inflexions ordinaires, enfin un système circulaire ($r, \rho, \rho \lesseqgtr r$). On a (n° 15)

$$(32) \qquad \iota' - \iota - (r - \rho) = 3(c - m).$$

Soient λ, μ les nombres qui correspondent au sommet du polygone (C), dont les côtés comprennent la direction $\frac{\rho}{r}$; j'ai (n° 22), pour le nombre des points de S qui satisfont à la condition exprimée par l'équation considérée,

$$N = \alpha c + \beta m + \gamma\iota + \lambda(r - \rho) + \mu(2r - \rho).$$

En remplaçant, dans cette dernière équation, ι par son expression déduite de (32), j'obtiens

$$(33)\quad N=(\alpha-3\gamma)c+(\beta+3\gamma)m+\gamma\iota'+(\gamma-3\mu-\lambda)(\rho-r)+\mu(2\rho-r).$$

D'ailleurs, pour une courbe S′, corrélative de S, les nombres m, c, ι, r, ρ se changent en c, m, ι', ρ, r. Les coefficients α', β', γ', analogues à α, β, γ, se déduisent des trois premiers termes de (33). On a ainsi les équations (31). Soient maintenant λ', μ' les nombres qui correspondent, dans l'équation transformée, aux systèmes circulaires (ρ, r). On a, d'après les derniers termes de (33),

$$(34)\qquad \lambda'+\lambda+3\mu=\gamma,\qquad \mu'=\mu.$$

Ce sont les relations cherchées. Elles permettent, étant donné le polygone (C), de construire le polygone (C′), relatif à l'équation transformée, ou, du moins, la partie utile de ce polygone. Cette construction est des plus simples. Soient, en effet u, v (29) les coordonnées d'un sommet utile m de (C), et u', v' les coordonnées du sommet correspondant de (C′). Les relations (34) deviennent

$$v-u=v'-u',\qquad u+v+u'+v'=2\gamma.$$

Par suite, la droite mm' est parallèle à la droite $v-u=0$, et partagée en deux parties égales par la droite $u+v=\gamma$. Si l'on suppose les axes rectangulaires, les points m, m' sont symétriques par rapport à la droite $u+v=\gamma$. Par suite, *les axes étant rectangulaires, les parties utiles des polygones* (C) *et* (C′) *sont égales.*

Je ferai enfin observer, en dernier lieu, qu'on peut imaginer des équations différentielles pour lesquelles le nombre des sommets utiles de (C) soit aussi petit qu'on voudra. Si, par exemple, on prend une équation homogène et de degré θ par rapport à $\frac{d^2y}{dx^2}$ et $\frac{d^3y}{dx^3}$, on n'aura qu'un seul sommet, lequel répond à $\lambda=0$, $\mu=\theta$. On a alors, pour toute courbe S,

$$N=\alpha c+\beta m+\theta[\Sigma(2r-\rho)+\Sigma(r-\sigma)],$$

la première sommation s'appliquant à tous les systèmes circulaires de S où r et ρ sont différents, et la seconde à tous ceux où $\rho=r$ et où σ est inférieur à r.

II.

25. Ce paragraphe sera consacré à des applications de quelques-uns des théorèmes obtenus dans le précédent. Je donnerai d'abord une application du théorème III. Celle que je choisis nous conduira à une démonstration nouvelle d'une formule qui attira, il y a quelques années, l'attention des géomètres. Au point de vue du problème posé au début de ce Mémoire, cette application présente aussi cette particularité remarquable, que non seulement il paraît presque impossible de réussir à former l'équation de la courbe Φ, dont nous allons chercher le degré, mais qu'il semble même bien difficile de mettre sous une forme entièrement explicite l'équation différentielle que je vais considérer.

Une courbe plane de degré μ est, comme on sait, déterminée par un nombre P de points,

$$P = \frac{\mu(\mu+3)}{2}.$$

Je considère l'équation différentielle des courbes de degré μ, qui, dans un plan, passent par $P - n = k$ points donnés. Les points d'une courbe S, qui satisfont à la condition exprimée par cette équation différentielle, sont ceux en lesquels il existe un contact d'ordre n entre S et une courbe de degré μ, passant par les k points donnés.

L'équation différentielle s'obtient en égalant à zéro un déterminant Δ composé : 1° de k lignes telles que

$$\text{(A)} \qquad 1,\quad x_j,\quad y_j,\quad x_j^2,\quad \ldots,\quad x_j y_j^{\mu-1},\quad y_j^{\mu} \qquad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

où x_j, y_j sont les coordonnées de l'un des k points donnés ; 2° de la ligne

$$\text{(B)} \qquad 1,\quad x,\quad y,\quad x^2,\quad \ldots,\quad xy^{\mu-1},\quad y^{\mu};$$

3° des n lignes (C) formées par les dérivées 1^{ières}, 2^{ièmes}, ..., $n^{\text{ièmes}}$ des termes de (B).

Sans développer ce déterminant, sans lui faire subir presque aucune transformation, on va voir qu'il est facile de calculer immédiatement α et β. J'aurai, pour ce calcul, besoin de faire appel à la proposition suivante, que je laisse au lecteur le soin facile de démontrer :

Soit D *un déterminant composé de la ligne*

$$z^{q_0},\quad z^{q_1},\quad z^{q_2},\quad \ldots,\quad z^{q_n}$$

et des n lignes obtenues en prenant successivement les dérivées $1^{\text{ières}}$, $2^{\text{ièmes}}, \ldots, n^{\text{ièmes}}$ *des termes de la première. Soit* Q *le produit des différences des exposants* q, *savoir :*

$$Q = (q_n - q_0)(q_{n-1} - q_0)\cdots(q_1 - q_0)(q_n - q_1)(q_{n-1} - q_1)\cdots(q_2 - q_1)\cdots(q_n - q_{n-1}),$$

on a

$$D = Q z^{\sum q - \frac{n(n+1)}{2}}.$$

26. Pour calculer α, conformément au théorème III, je substitue à y, dans Δ, un développement procédant suivant les puissances entières et ascendantes de $(x-\xi)^{\frac{1}{2}}$ et commençant par une constante, et je cherche la partie principale du résultat. Je pose $x - \xi = z$. Dans la ligne (B), chaque terme de la forme x^q, étant développé, contient toutes les puissances entières de z, depuis la puissance zéro jusqu'à la puissance q. Chaque terme de la forme $x^q y^p$ devient un développement procédant suivant les puissances ascendantes et entières de $z^{\frac{1}{2}}$ et commençant par une constante. Par des combinaisons linéaires convenables, on amènera la ligne (B) à se composer de termes dont les parties principales sont les suivantes :

$$(B') \qquad 1,\quad z^{\frac{1}{2}},\quad z,\quad z^{\frac{3}{2}},\quad z^2,\quad \ldots,\quad z^{\frac{P-1}{2}},\quad z^{\frac{P}{2}}.$$

Par ces combinaisons, les lignes (A) restent composées de constantes. Quant aux lignes (C′), transformées des lignes (C), elles se composent des dérivées des termes de la ligne (B′), prises par rapport à z; car les dérivées, prises par rapport à x ou à z, sont les mêmes. Par suite, les parties principales des termes des lignes (C′) sont les dérivées, par rapport à z, des parties principales des termes de (B′). Donc, après la substitution, la partie principale de Δ est, à un facteur constant près, celle d'un déterminant formé : 1° d'une ligne dont les termes sont $(n+1)$ termes de (B′); 2° de n lignes composées des dérivées successives des termes de la précédente. Les $(n+1)$ termes doivent être choisis dans (B′), de manière que l'ordre de la partie principale du déterminant ainsi formé soit le plus petit possible.

Or un déterminant ainsi composé est un cas particulier du déterminant D considéré au numéro précédent.

On voit immédiatement que l'ordre le plus petit possible, pour un pareil déterminant, s'obtient en prenant les $(n+1)$ termes de gauche de (B'). Cet ordre minimum ne peut s'obtenir que par cette seule combinaison, ainsi que cela résulte de la proposition ci-dessus; donc c'est bien le degré de la partie principale de Δ; par suite, le degré de la partie principale de Δ est

$$0+\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{3}{2}+\ldots+\frac{n}{2}-\frac{n(n+1)}{2}=-\frac{n(n+1)}{4}.$$

Mais, d'après le théorème III, ce degré est égal à $-\frac{\alpha}{2}$. Donc

$$\alpha=\frac{n(n+1)}{2}.$$

27. Pour calculer β, je substitue à y, dans Δ, un développement procédant suivant les puissances descendantes et entières de x, commençant par un terme du premier degré, et, conformément au théorème III, je cherche le degré de la partie principale dans le résultat. Le calcul est ici analogue au précédent. Par des combinaisons linéaires, je change la ligne (B) en une ligne (B''), composée de termes qui, ordonnés suivant les puissances descendantes de x, ont les parties principales suivantes :

$$(B'')\qquad x^{\mu-p},\quad x^{\mu-p+1},\quad \ldots,\quad x^{\mu-1},\quad x^{\mu}.$$

Les lignes (C''), transformées des lignes (C), sont composées des dérivées des termes de (B''). En répétant les raisonnements ci-dessus, on voit que le degré de Δ est celui du déterminant formé avec les $(n+1)$ derniers termes écrits dans (B'') et les dérivées de ces termes. Ce degré est donc

$$\mu+(\mu-1)+(\mu-2)+\ldots+(\mu-n)-\frac{n(n+1)}{2}=(n+1)(\mu-n).$$

D'après le théorème III, ce degré est aussi égal à β; donc

$$\beta=(n+1)(\mu-n).$$

J'ai donc la proposition suivante :

Théorème XI. — *Les points d'une courbe plane* S, *de degré* m, *en chacun desquels il existe un contact d'ordre* n *entre cette courbe et une courbe de degré* μ *passant par* $\frac{\mu(\mu+3)}{2}-n$ *points donnés dans le plan de* S, *sont les intersections de* S *avec une autre courbe dont le degré est*

$$(35) \qquad M = \frac{n(n+1)}{2}(m-1)+(n+1)(\mu-n)$$
$$= \frac{n(n+1)}{2}(m-3)+(n+1)\mu.$$

Si la courbe S n'a aucune singularité, le nombre des points considérés est mM. C'est en quoi consiste la formule remarquable à laquelle j'ai fait allusion au début de ce paragraphe (n° 25), et qui est due à M. de Jonquières [1].

28. Les résultats fournis par la formule (35) présentent, dans quelques cas, avec l'énoncé du théorème XI lui-même, des désaccords apparents, dont il ne sera peut-être pas inutile de dire quelques mots.

Je suppose, par exemple, $\mu=2$, $n=5$. La formule (35) donne alors

$$M = 15m-33.$$

Les points de la courbe S, dont il s'agit ici, sont ce qu'on appelle, d'après M. Cayley, les points *sextactiques*. Or on sait qu'ils sont les intersections de S et d'une courbe de degré

$$M' = 12m-27 \quad (^2).$$

Il y a donc là un désaccord qu'il s'agit d'expliquer. La différence $(M-M')$ est égale à $3(m-2)$. C'est le degré de la courbe *hessienne*, dont les intersections avec S sont les points d'inflexion de S. Cette circonstance suggère l'idée que, dans ce cas, la courbe de degré M se décompose peut-être en la hessienne et la courbe de degré M′. C'est, en effet, ce qui a lieu. *A priori*, on s'en rend compte en remarquant

(1) *Comptes rendus*, t, 63, 1866, p. 423. *Voyez* aussi une Note de M. Cayley, *Ibid.*, p. 666.

(2) Ce résultat est dû à M. Cayley (*Comptes rendus*, t. 62, 1866, p. 590).

qu'une tangente d'inflexion, comptée deux fois, peut être considérée comme une conique ayant, avec la courbe, six points d'intersection réunis au point d'inflexion. Au point de vue algébrique, voici comment cette circonstance est mise en évidence. Si, dans le cas actuel, on effectue le calcul du déterminant Δ, on y trouve le facteur $\frac{d^2y}{dx^2}$. Voici le résultat, où j'emploie des accents pour désigner les dérivées :

$$(36) \qquad \Delta = y'' \begin{vmatrix} \frac{y'''}{6} & \frac{y''}{2} & 0 \\ \frac{y^{\text{IV}}}{24} & \frac{y'''}{6} & \frac{y''}{2} \\ \frac{y^{\text{V}}}{120} & \frac{y^{\text{IV}}}{24} & 2\frac{y'''}{6} \end{vmatrix} = y'' f.$$

Ainsi l'équation différentielle se décompose en deux autres : $y''=0$, $f=0$; par suite aussi, la courbe de degré M se décompose en la hessienne et en une seconde courbe.

29. Je suppose, en second lieu, $\mu=3$, $n=8$, $m=3$. Il s'agit ici, non plus d'une courbe S, de degré quelconque, mais d'une courbe du troisième degré. En un quelconque ω des points considérés, une autre courbe Σ, du troisième degré, a un contact du huitième ordre avec S, tout en passant par un point donné a. Or toutes les courbes du faisceau, déterminé par S et Σ, ont en ω, avec S, des contacts du huitième ordre. On voit par là que chaque point, tel que ω, ne dépend pas du point a. Les points dont il s'agit sont ceux en lesquels *neuf points consécutifs de la courbe* S *sont les intersections de deux courbes du troisième degré*. Mais les points d'inflexion de S satisfont à cette condition ; car, si $T=0$ est l'équation d'une tangente d'inflexion, toutes les courbes du faisceau $S+\lambda T^3=0$ ont, avec S, au point d'inflexion, un contact du huitième ordre. Pour cette raison, il se présente ici, dans le calcul, une décomposition de l'équation différentielle analogue à celle du numéro précédent.

Je n'entrerai pas ici dans d'autres détails à ce sujet. Je me contente d'observer que la formule (35) donne, pour le cas actuel, $M=27$. Si l'on en retranche le degré de la hessienne qui est égal à 3, on trouve que les points ci-dessus sont les intersections de la cubique avec une

courbe du vingt-quatrième degré. Dans le cas d'une cubique de sixième classe, ils sont donc au nombre de $3 \times 24 = 72$.

30. J'applique maintenant le théorème V à l'équation différentielle du n° 25, et je conclus que :

Théorème XII. — *Sur une courbe plane, qui ne contient que des branches simples, et dont la classe et le degré sont c et m, le nombre des points en chacun desquels il existe un contact d'ordre n entre cette courbe et une autre courbe de degré μ, qui passe en $\frac{\mu(\mu+3)}{2} - n$ points donnés, est*

$$N = \frac{n(n+1)}{2}(c-2m) + (n+1)\mu m. \tag{37}$$

A cause des remarques du n° 28, pour le cas des points sextactiques, on devra retrancher $3(c-m)$, et la formule se réduit à $12c - 15m$.

A cause des remarques du n° 29, pour avoir le nombre des points ω d'une cubique de la quatrième classe, on devra retrancher celui des points d'inflexion qui est égal à 3. On trouve alors que le nombre des points ω est égal à 6 pour une cubique de quatrième classe.

31. Pour compléter la formule (37), il faudrait tenir compte des singularités quelconques des courbes S, suivant les principes exposés au n° 13. Je n'entreprendrai pas de résoudre un problème aussi difficile, et je me bornerai à tenir compte des rebroussements ordinaires, de manière à pouvoir faire l'application du théorème IX.

Un rebroussement ordinaire est représenté par

$$x - \xi = t^2, \qquad y - \eta = At^2 + Bt^3 + Ct^4 + \ldots,$$

ou, si l'on veut, par un développement de y suivant les puissances ascendantes et entières de $(x-\xi)^{\frac{1}{2}}$, commençant par une constante, mais où manque le terme en $(x-\xi)^{\frac{1}{2}}$. En employant ce développement, on voit, d'après le n° 17, que si on le substitue à y, dans Δ, la partie principale du résultat sera de l'ordre $-\frac{\gamma}{2}$. Par suite, le calcul de γ ne diffère de celui de α (n° 26) qu'en ce que, dans la ligne (B'), le terme

dont la partie principale est $z^{\frac{1}{2}}$ manque ici. L'ordre de la partie principale du résultat est, par suite, augmenté de $\frac{n}{2}$; par suite, on a

$$\gamma = \alpha - n = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Donc le théorème IX donne ici le suivant :

THÉORÈME XIII. — *Sur une courbe, de degré m, de classe c, ne contenant que des branches simples et des branches à rebroussement ordinaire, ces dernières au nombre de ι, le nombre des points en chacun desquels il existe un contact d'ordre n entre cette courbe et une autre courbe de degré μ, qui passe par $\frac{\mu(\mu+3)}{2} - n$ points donnés, est*

$$(38) \qquad N = \frac{n(n+1)}{2}(c-2m) + (n+1)\mu m + \frac{n(n-1)}{2}\iota.$$

Pour les points sextactiques, en tenant compte de la remarque faite précédemment (n° 28), la formule (38) devra être réduite à $12c - 15m + 9\iota$ [1].

Pour les points ω (n° 29), on trouvera que, sur une cubique de troisième classe, leur nombre se réduit à zéro. Ce résultat, comme on le verra plus loin, pouvait être prévu et sert de vérification (*voir* n° 32).

Connaissant les trois coefficients α, β, γ relatifs à l'équation différentielle envisagée, je puis, conformément au n° 17, trouver par les formules (23) les coefficients α', β', γ' relatifs à l'équation différentielle qui se déduit de la proposée par une transformation corrélative. J'obtiens ainsi la proposition suivante :

THÉORÈME XIV. — *Les points d'une courbe plane* S, *de degré m, en chacun desquels cette courbe a un contact d'ordre n avec une courbe de classe μ, qui touche $\frac{\mu(\mu+3)}{2} - n$ droites données, sont*

---

[1] Cette formule coïncide avec une de celles qu'a données M. Cayley (*Comptes rendus*, t. 63, p. 10). M. Zeuthen a également donné cette formule.

les intersections de S avec une autre courbe dont le degré est

$$(39)\qquad M=\left[(n+1)\mu+\frac{n(n-5)}{2}\right](m-1)-(n-2)n.$$

Si la courbe S ne contient que des branches simples et des rebroussements ordinaires, ces derniers au nombre de ι, *et que sa classe soit* c, *le nombre des points est*

$$(40)\qquad N=\left[(n+1)\mu+\frac{n(n-5)}{2}\right]c-n(n-2)m+\frac{n(n-1)}{2}\iota.$$

La formule (39) ne paraît pas donner lieu à des observations analogues à celles que j'ai faites plus haut (nos 28 et 29), à propos de la formule (35). Par exemple, pour $\mu=2$, $n=5$, elle donne bien $M=12m-27$, comme cela doit être.

Mais, pour ce cas particulier, la formule (40) donne à son tour un résultat en apparence inexact. A la décomposition Δ en deux facteurs, dont l'un est y'' (n° 28), correspond ici une diminution d'une unité dans le degré de l'équation différentielle par rapport à y''. Par suite, dans le cas envisagé, le coefficient γ n'est pas égal à 10, comme l'indique la formule (40), mais il s'abaisse à 9, comme plus haut.

32. Nous avons trouvé, dans le numéro précédent, que, sur une cubique de troisième classe, le nombre des points ω en lesquels neuf points consécutifs de la courbe sont les pivots d'un faisceau de courbes du troisième degré, se réduit à zéro. De même aussi on trouverait, d'après un autre résultat du même numéro, que, sur la même courbe, le nombre des points sextactiques est également zéro. Ces deux propriétés pouvaient être prévues. On sait, en effet, qu'une cubique de troisième classe peut être, par une infinité de transformations homographiques, changée en elle-même. On peut notamment faire en sorte qu'un point arbitraire m de la courbe (sauf le point d'inflexion et le point de rebroussement) ait pour transformé un autre point arbitraire m' de la même courbe. Si donc un point m de la cubique de troisième classe jouissait de la propriété attribuée aux points ω, ou bien encore était un point sextactique, il en serait de même de tous les points de la courbe, car ces propriétés se conservent dans toute transformation homographique. Il est donc prouvé qu'aucun point de la courbe ne peut jouir de ces propriétés. Pour la même raison, le

nombre des points d'une cubique de troisième classe, jouissant d'une propriété que n'altère aucune transformation homographique, se réduit toujours à zéro.

La même remarque s'applique à toutes les courbes susceptibles de se transformer en elles-mêmes par des transformations homographiques qui permettent de faire correspondre entre eux deux points arbitraires de la courbe. L'étude des lignes qui jouissent de cette propriété a fait l'objet de plusieurs travaux dus à MM. Klein et Lie ([1]). Parmi ces lignes se trouvent les courbes planes dont l'équation homogène est

$$x^p y^q = A z^{p+q}, \tag{41}$$

A étant une constante. Ces courbes ont été aussi considérées par M. Fouret ([2]). Quelques mots suffiront à établir la propriété dont il s'agit, à l'égard des courbes représentés par (41).

Considérons la substitution

$$x = ax', \qquad y = by', \qquad z = cz'. \tag{42}$$

La transformée de (41) est

$$x'^p y'^q = \frac{c^{p+q}}{a^p b^q} A z'^{p+q}.$$

Il suffit donc qu'on ait $c^{p+q} = a^p b^q$ pour que la transformée coïncide avec la courbe première. Dans cette transformation, le triangle de référence ne change pas, et les sommets de ce triangle sont les seuls points qui coïncident respectivement avec leurs transformés. Si dans (42) on suppose que x, y, z et x', y', z' soient les coordonnées de deux points arbitraires m, m' de la courbe (41), ces équations déterminent a, b, c, et, par suite, la transformation homographique; mais alors la condition $c^{p+q} = a^p b^q$ se trouve satisfaite. Donc on peut, par une transformation homographique, changer la courbe (41) en elle-même, de manière qu'un point arbitraire m de la courbe ait pour transformé un point arbitraire m' de la même courbe. Il y a toutefois exception pour les sommets du triangle de référence. Je n'aurai à considérer ici que les cas où la courbe (41) est algébrique. Il

([1]) *Math. Ann.*, t. 4, 1871, p. 50; *Comptes rendus*, t. 70, 1870, p. 1222 et 1275.
([2]) *Comptes rendus*, t. 78, 1874, p. 1693.

faut et il suffit pour cela que les nombres p et q soient commensurables. On peut alors, sans restreindre la généralité, les supposer *entiers*, *positifs* et *premiers entre eux*. Alors la courbe (41) passe aux deux sommets ($x=0$, $z=0$) et ($y=0$, $z=0$) du triangle de référence et non au troisième. Ces deux sommets sont des points singuliers. En ($x=0$, $z=0$), la courbe se compose d'un système circulaire de branches où l'on a $r=p$, $\rho=q$. En ($y=0$, $z=0$), on a un système circulaire $r=q$, $\rho=p$. Il est manifeste que la courbe ne possède en dehors de ces deux points ni inflexion, ni singularité, car les singularités se conservent dans toute transformation homographique.

Toutes les fois qu'on considérera une condition que n'altèrent pas les transformations homographiques, les courbes (41) pourront servir d'utile vérification ; car on devra trouver que les points satisfaisant à la condition y sont tous réunis aux deux points singuliers. Pour cette vérification, on aura besoin de connaître la classe de la courbe (41). Or cette courbe jouit encore de la propriété de se reproduire ellemême par des transformations corrélatives qui n'altèrent pas le triangle de référence. Cette propriété, qui a été signalée par les auteurs précités, se démontre aisément. Je ne m'y arrête pas. Je me borne à faire remarquer que les deux points singuliers, dans ces transformations, se permutent entre eux. Je ferai à la courbe (41) l'application des théorèmes VIII et X.

33. Pour appliquer le théorème VIII, il nous faut connaître le nombre i' relatif à la courbe (41). D'après la définition de i', ce sera $(p-q)$ ou $(q-p)$, suivant que le premier ou le second de ces nombres sera positif. Soit $q<p$, on aura

$$N=(\alpha+\beta)(p+q)+\gamma(p-q).$$

Or $(\alpha+\beta)$ est essentiellement positif, ainsi qu'on l'a vu au n° 17. Quant à γ, c'est le degré de l'équation différentielle relativement à $\frac{d^2y}{dx^2}$. Donc γ est aussi positif et ne peut être nul ; donc N ne peut jamais être nul. Rapprochant ce résultat de celui du numéro précédent, je conclus que :

A l'exception de l'équation $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ (à laquelle le théorème VIII ne s'applique pas), *il n'existe aucune équation différentielle algé-*

brique du second ordre, qui se reproduise elle-même par toute transformation homographique.

34. J'applique maintenant à la courbe (41) le théorème X, relatif à une équation différentielle du troisième ordre. Soient λ, μ et λ', μ' les coefficients qui correspondent à $\frac{\rho}{r} = \frac{q}{p}$ et à $\frac{\rho}{r} = \frac{p}{q}$. On aura (théorème X)

$$(43)\quad \mathrm{N} = (\alpha+\beta)(p+q) + \lambda(p-q) + \mu(2p-q) + \lambda'(q-p) + \mu'(2q-p).$$

Je vais chercher s'il est possible que l'équation différentielle considérée se reproduise elle-même par les transformations homographiques. Si cela est on devra, d'après le n° 32, avoir $\mathrm{N} = 0$, quels que soient p et q, entiers, positifs et premiers entre eux. On aura donc nécessairement

$$\alpha+\beta+\lambda+2\mu-\lambda'-\mu' = 0,$$
$$\alpha+\beta-\lambda-\mu+\lambda'+2\mu' = 0;$$

d'où je conclus

$$2\lambda+3\mu = 2\lambda'+3\mu'.$$

Soient m, m' les sommets du contour (C) (n° 21) dont les coordonnées sont, pour m, $u = \lambda+\mu$, $v = \lambda+2\mu$, et, pour m', $u' = \lambda'+\mu'$, $v' = \lambda'+2\mu'$. La dernière relation donne $u+v = u'+v'$. Les points m, m' doivent donc être situés sur une même parallèle à la droite $u+v=0$, ce qui ne se peut, à cause des limites de la partie utile du contour, sans que m et m' coïncident. Mais les points m, m', qui correspondent à deux valeurs réciproques de $\frac{\rho}{r}$, aussi écartées qu'on veut, puisque p et q sont arbitraires, ne peuvent coïncider que si la partie utile de (C) se réduit à un seul sommet; mais alors λ se réduit à zéro. Cette supposition, jointe à $\mu' = \mu$, réduit (43) à la forme

$$\mathrm{N} = (\alpha+\beta+\mu)(p-q).$$

Or $(\alpha+\beta)$ ne peut être négatif (n° 17); quant à μ, c'est un nombre essentiellement positif, qui ne peut être nul. C'est, en effet, le degré de l'équation par rapport à $\frac{d^3y}{dx^3}$. Donc N ne peut être nul; donc :

Il n'existe aucune équation différentielle du troisième ordre

algébrique, qui se reproduise elle-même par toute transformation homographique.

Le théorème X ne s'applique pas à l'équation $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$. Mais, comme cette équation ne se reproduit pas par les transformations homographiques, le dernier énoncé ne subit aucune restriction.

35. Dans les recherches déjà citées plus haut, MM. Klein et Lie ont eu l'occasion de s'occuper d'équations différentielles qu'une série de transformations homographiques changent en elles-mêmes. Celles dont il s'agit ici, et dont la non-existence vient d'être démontrée pour le troisième ordre, doivent se reproduire par toute transformation homographique, ainsi que cela se présente pour l'équation du second ordre des lignes droites, l'équation du cinquième ordre des coniques, etc. De même que dans la théorie des formes, la Géométrie fournit *a priori* la conception d'un nombre indéfini de telles équations. Mais la recherche directe de ces équations, dont les premiers membres, mis sous forme entière, pourraient être appelés des *invariants différentiels*, offre un sujet d'études qui ne semble pas avoir encore été abordé, et qui naturellement ne se restreint pas au cas d'une seule variable indépendante. J'espère pouvoir, dans une autre occasion, m'occuper de ce sujet. Je montrerai alors que cette théorie se rattache directement à celle des invariants des formes. Sans entrer dans des détails qui seraient ici déplacés, j'ai cru devoir solliciter l'attention sur une théorie dont, par une voie bien indirecte, les résultats des nos 33 et 34 fournissent deux propositions. J'aurai d'ailleurs encore à en parler dans la suite de ce Mémoire.

III.

36. Lemme. — *Soient $x_1, x_2, \ldots, x_k$ des variables indépendantes et y une fonction définie par l'équation*

$$S(x_1, x_2, \ldots, x_k, y) = 0.$$

Le produit d'une quelconque des dérivées $n^{\text{ièmes}}$ de y par $\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^{2n-1}$ est égal à une fonction entière des dérivées partielles de S.

Le lecteur démontrera aisément cette proposition. En répétant les raisonnements employés aux nos 2 et 3, on obtiendra la proposition suivante, qui est l'extension des théorèmes I et II :

THÉORÈME XV. — *Si* S $(x_1, x_2, \ldots, x_k, y)$ *est un polynome entier, et qu'on distingue par le signe* $\equiv$ *les égalités qui ont lieu en vertu de* $S = 0$, *il existe des exposants* α *et des polynomes entiers* ψ, *propres à vérifier la relation*

$$(44) \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^\alpha f \equiv \psi(x_1, x_2, \ldots, x_k, y),$$

f *étant une fonction entière de* $x_1, x_2, \ldots, x_k, y$ *et des dérivées de* y. *La valeur minima de* α *est celle qui fait acquérir au premier membre de cette relation une valeur finie et différente de zéro, pour tout système de valeurs des variables faisant évanouir* $\frac{\partial S}{\partial y}$.

Soit donnée, dans (44), à l'exposant α sa valeur minima, et supposons choisi, pour le polynome ψ du second membre, un de ceux, du plus petit degré possible, qui satisfont à la relation indiquée. Soit M le degré de ψ. De même qu'au n° 5, on voit que tout polynome entier, qui, égalé à zéro, définit avec $S = 0$ les systèmes de valeurs de $x_1, \ldots, x_k, y$ satisfaisant à l'équation $f = 0$, les dérivées étant prises dans l'équation $S = 0$, est de la forme $(LS + P\psi)$, L et P étant des polynomes entiers. Par suite, le degré minimum d'un tel polynome distinct de S est M ; et sa forme, pour le degré M, est $LS + \psi$, le degré de L étant égal à la différence de ceux de ψ et de S.

Par suite, si β est le degré qu'acquiert f quand on y suppose pour les variables un système de valeurs infinies, et si m est le degré de S, on aura

$$M = \alpha(m - 1) + \beta.$$

Les nombres α et β ne dépendent que de l'équation $f = 0$. On obtient donc ici le même résultat que dans le cas d'une seule variable indépendante.

Il nous faut maintenant chercher le moyen de calculer α et β. Il ne serait pas impossible d'étendre au cas actuel le théorème III ; mais, en premier lieu, pour faire cette extension, il me faudrait établir diverses propositions préparatoires dont le développement serait assez long ; en outre, je n'obtiendrais pas ainsi, pour le calcul des nombre α et β,

un procédé simple et facile comme celui qui résulte du théorème III. Je me bornerai donc à étendre au cas actuel le théorème IV, qui ne subira, comme on va le voir, pour ainsi dire aucune altération.

Cette proposition ne donne pas, il est vrai, un moyen expéditif de calculer α et β, en général ; mais il est un cas particulier, encore fort étendu, où elle donnera le résultat sous une forme immédiatement explicite.

On pourrait imiter ici le mode d'analyse employé pour la démonstration du théorème IV, et l'on n'y rencontrerait aucune difficulté nouvelle. Je préfère donner une démonstration différente qui, bien entendu, s'applique également au théorème IV lui-même. Cette proposition se trouvera ainsi démontrée de deux manières.

37. Je substitue d'abord à l'équation $S=0$ une équation homogène, par l'introduction d'une variable nouvelle z. Soit m le degré de S, je pose

$$z^m S\left(\frac{x_1}{z}, \frac{x_2}{z}, \ldots, \frac{x_k}{z}, \frac{y}{z}\right) = T(x_1, x_2, \ldots, x_k, y, z). \tag{45}$$

Soit M le degré de ψ, je pose aussi

$$z^M \psi\left(\frac{x_1}{z}, \frac{x_2}{z}, \ldots, \frac{x_k}{z}, \frac{y}{z}\right) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_k, y, z).$$

Les polynomes T et φ, des degrés m et M, sont homogènes par rapport aux $(k+2)$ variables. J'emploierai maintenant, pour les dérivées partielles, la notation usitée dans la théorie des formes

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = T_i, \qquad \frac{\partial T}{\partial y} = T_{k+1}, \qquad \frac{\partial T}{\partial z} = T_{k+2}.$$

De (45) je déduis

$$z^{m-1}\frac{\partial S}{\partial y} = T_{k+1}. \tag{46}$$

Je suppose qu'on ait remplacé également dans f les lettres $x_1, \ldots, x_k, y$ par $\frac{x_1}{z}, \ldots, \frac{x_k}{z}, \frac{y}{z}$. A cause de (46), la relation (44) devient

$$z^{M-\alpha(m-1)} T_{k+1}^{\alpha} f \equiv \varphi, \tag{47}$$

cette égalité ayant lieu en vertu de $T=0$.

Je fais maintenant une transformation homographique, c'est-à-dire, à cause de la variable complémentaire, une substitution linéaire homogène. Je distingue par des accents les nouvelles variables. Le résultat de la substitution dans f ne dépend que des rapports de $(k+1)$ variables à la $(k+2)^{\text{ième}}$. J'y prends pour variables indépendantes $\frac{x'_1}{z'}, \frac{x'_2}{z'}, \ldots, \frac{x'_k}{z'}$, et pour fonction $\frac{y'}{z'}$. J'égale à zéro le résultat, je chasse les dénominateurs, je supprime les facteurs étrangers, et j'obtiens finalement une nouvelle équation $f'=0$, mise sous forme entière, et qui est la transformée de $f=0$.

Soit T' le transformé de T. Le polynome entier T' et la fonction différentielle f' donnent lieu à une relation analogue à (47), savoir

$$z'^{M-\alpha(m-1)}\,T'^{\alpha}_{k+1}\,f' \equiv \varphi', \tag{48}$$

cette égalité ayant lieu en vertu de $T'=0$. Dans (48), j'ai admis les mêmes valeurs que dans (47) pour M et α. On pourrait craindre que cette supposition ne fût pas légitime. Pour lever cette objection, il suffit d'admettre que T et f, au lieu d'être les fonctions proposées tout d'abord, en soient des transformées par une substitution homographique quelconque ; alors T' et f', qui sont des transformées de ces dernières par une substitution homographique quelconque, le sont aussi des fonctions primitives, exactement comme T et f. Je ferai donc cette supposition, qui sera facilement écartée dans le résultat ; par suite, la relation (48) est entièrement établie.

Soit $(x_1, x_2, \ldots, y, z)$ un système de valeurs des premières variables, qui satisfasse à $T=0$ et à $\varphi=0$. D'après (47), pour ce système de valeurs et les dérivées partielles correspondantes, prises dans $T=0$, l'équation $f=0$ est satisfaite. Cette propriété se conserve dans la transformation, c'est-à-dire que, pour le système de valeurs des secondes variables, qui correspond au proposé, et les dérivées partielles correspondantes, prises dans $T'=0$, l'équation $f'=0$ est satisfaite. Si donc, dans φ, qui est une fonction à la fois de $x_1, \ldots, y, z$ et des coefficients de T et de f, je regarde les variables $x_1, \ldots, y, z$ comme exprimées en fonction de $x'_1, \ldots, y', z'$, et en même temps les coefficients de T et de f comme exprimés en fonction de ceux de T' et de f', l'équation $\varphi=0$, envisagée de ce point de vue, fournit les solutions de $T'=0$ et $f'=0$, exactement comme l'équation $\varphi'=0$. Mais le polynome φ, ainsi envisagé, est du degré M par rapport à $x'_1 \ldots y', z'$,

comme φ'; donc, suivant une remarque du numéro précédent, φ est de la forme $K\varphi + LT'$, K étant une constante, c'est-à-dire que, φ étant entendu comme je viens de le dire, on a (en vertu de $T' = 0$)

$$K\varphi' \equiv \varphi.$$

Si les substitutions qui viennent d'être faites dans φ sont faites aussi dans le premier membre de (47), cette relation a maintenant lieu en vertu de $T' = 0$. En y remplaçant alors φ par $K\varphi'$ et comparant à (48), j'obtiens

$$f \equiv K\left(\frac{z'}{z}\right)^{M-\alpha(m-1)}\left(\frac{T'_{k+1}}{T_{k+1}}\right)^{\alpha} f', \tag{49}$$

dans laquelle les premières variables sont exprimées en fonction des secondes, et en même temps les coefficients de T et de f en fonction de ceux de T' et de f'. L'égalité a lieu d'ailleurs en vertu de $T' = 0$.

En vertu de la substitution employée, on aura pour T_{k+1} une expression de la forme

$$T_{k+1} = a_1 T'_1 + a_2 T'_2 + \ldots + a_k T'_k + A T'_{k+1} + \mathcal{A} T'_{k+2}, \tag{50}$$

dans laquelle $a_1, \ldots, A, \mathcal{A}$ sont des constantes, à savoir les coefficients de y dans les expressions de $x'_1, \ldots, y', z'$ en fonction des premières variables. Mais on a

$$\frac{\partial y'}{\partial x'_i} = -\frac{T_i}{T'_{k+1}}, \qquad -z'T'_{k+2} \equiv x'_1 T'_1 + x'_2 T'_2 + \ldots + x'_k T'_k + y' T'_{k+1}.$$

Par suite, on déduit de (50), en faisant $z' = 1$,

$$\frac{T_{k+1}}{T'_{k+1}} \equiv -\left(a_1 \frac{\partial y'}{\partial x'_1} + a_2 \frac{\partial y'}{\partial x'_2} + \ldots + a_k \frac{\partial y'}{\partial x'_k}\right)$$
$$+ A + \mathcal{A}\left(x'_1 \frac{\partial y'}{\partial x'_1} + x'_2 \frac{\partial y'}{\partial x'_2} + \ldots + x'_k \frac{\partial y'}{\partial x'_k} - y'\right) = R,$$

et, en même temps, la relation (49) devient, par cette supposition,

$$f \equiv \frac{K}{R^{\alpha} z^{M-\alpha(m-1)}} f',$$

l'égalité ayant lieu en vertu de $T' = 0$. De cette relation, le polynome T' a disparu d'une manière explicite; cependant la constante K et le nombre $[M - \alpha(m-1)]$ paraissent encore en dépendre. Quant à α,

on sait déjà qu'il en est indépendant ; mais, comme la relation a lieu, quel que soit le polynome T′, on en déduira aisément que K et $M-\alpha(m-1)$ en sont indépendants, et que cette relation est une identité. En désignant $[M-\alpha(m-1)]$ par la lettre β, on a donc l'identité

$$f = \frac{K}{R^{\alpha} z^{\beta}} f' ; \tag{51}$$

d'où résulte

$$M = \alpha(m-1) + \beta.$$

38. Voici donc l'extension du théorème IV :

Lemme. — *Soient $x_1, x_2, \ldots, x_k, y$ et $x'_1, x'_2, \ldots, x'_k, y'$ deux systèmes de variables, liés par une transformation homographique,*

$$x'_1 = \frac{a_1 y + b_1 x_1 + \ldots}{\mathcal{A} y + \mathcal{B} x_1 + \ldots}, \qquad x'_2 = \frac{a_2 y + b_2 x_1 + \ldots}{\mathcal{A} y + \mathcal{B} x_1 + \ldots},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$x'_k = \frac{a_k y + b_k x_1 + \ldots}{\mathcal{A} y + \mathcal{B} x_1 + \ldots}, \qquad y' = \frac{A y + B x_1 + \ldots}{\mathcal{A} y + \mathcal{B} x_1 + \ldots},$$

et z le dénominateur commun des expressions de $x_1, \ldots, y$ en fonction de $x'_1, \ldots, y'$.

Soit $f=0$ une équation entière aux dérivées partielles entre les variables indépendantes $x_1, \ldots, x_k$ et la fonction y ; soit aussi $f'=0$ l'équation entière aux dérivées partielles entre les nouvelles variables indépendantes $x'_1, \ldots, x'_k$ et la fonction y', cette équation étant la transformée de la première. Si l'on désigne par K *une constante et par* R *la quantité*

$$R = -\left(a_1 \frac{\partial y'}{\partial x'_1} + a_2 \frac{\partial y'}{\partial x'_2} + \ldots + a_k \frac{\partial y'}{\partial x'_k}\right) + A + \mathcal{A}\left(x'_1 \frac{\partial y'}{\partial x'_1} + x'_2 \frac{\partial y'}{\partial x'_2} + \ldots + x'_k \frac{\partial y'}{\partial x'_k} - y'\right),$$

on a, entre f et f', l'identité

$$f = \frac{K}{R^{\alpha} z^{\beta}} f' ;$$

dans laquelle α et β sont des entiers, dont le premier est toujours positif.

Théorème XVI. — *Soit* S = o *une équation algébrique de degré m entre* $x_1, \ldots, x_k, y$. *Les systèmes de valeurs de ces variables, qui, avec les dérivées partielles, prises dans* S = o, *satisfont en même temps à l'équation aux dérivées partielles* $f = 0$, *sont ceux qui vérifient, avec* S = o, *une autre équation algébrique dont le degré est* $\alpha(m-1)+\beta$.

Si l'on veut emprunter le langage géométrique pour l'espace à $(k+1)$ dimensions et appeler *surface* l'être défini par *une* équation, on peut donner au théorème XVI la forme suivante :

Les points d'une surface algébrique de degré m qui satisfont à une condition exprimée par l'équation $f = 0$ *sont les intersections de cette surface avec une autre, dont le degré est* $\alpha(m-1)+\beta$.

39. Pour calculer α et β d'après le théorème XVI et le lemme qui qui le précède, il faudra, dans chaque cas, effectuer la transformation homographique. On serait ainsi entraîné dans des calculs généralement impraticables, à cause de leur longueur. On remarquera toutefois qu'il n'est pas nécessaire d'employer une transformation homographique de forme générale. Ainsi, pour calculer α, il suffira d'employer une simple substitution linéaire (changement de coordonnées). De la sorte, z se réduira à l'unité. Pour calcurer β, on pourra employer une transformation qui réduise R à une constante. C'est en procédant de la sorte que je vais faire voir comment les valeurs de α et de β peuvent être immédiatement trouvées dans un cas particulier qui offre un intérêt spécial : c'est celui où l'équation $f = 0$ se reproduit elle-même par toute substitution homographique. Je me trouve ainsi conduit à parler encore de ces *invariants différentiels* dont j'ai déjà dit quelques mots plus haut (n° 35). Je vais d'abord démontrer, au sujet d'une classe d'équations un peu plus étendue, une proposition des plus simples, que j'ai déjà eu l'occasion d'employer ailleurs [1] :

Si une équation aux dérivées partielles reste inaltérée par toute substitution linéaire, elle ne contient ni les variables, ni les dérivées du premier ordre.

---

(1) *Bulletin de la Société mathématique*, t. III, p. 31. [*Œuvres d'Halphen*, t. I, p. 321.]

1° Soit x une des variables indépendantes. Si l'on change x en $(x+\lambda)$, ce qui constitue une substitution linéaire, aucune dérivée n'est altérée : donc le seul changement que subisse l'équation est celui de x en $(x+\lambda)$; mais, par hypothèse, l'équation reste inaltérée : donc elle ne contient pas x. Le même raisonnement s'applique à y : donc l'équation ne contient ni les variables indépendantes, ni la fonction.

2° Si l'on change y en $y+\lambda x_i$, ce qui constitue une substitution linéaire, la seule dérivée $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ est altérée : donc, par le même raisonnement, et comme on sait déjà que y n'entre pas dans l'équation, on voit que $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ n'y entre pas non plus : donc la proposition est démontrée.

40. Pour le calcul de β, il est commode d'employer la transformation suivante :

$$(52)\quad \begin{cases} x'_1 = \dfrac{x_1}{1+B_1x_1+B_2x_2+\ldots+B_kx_k}, \\ x'_2 = \dfrac{x_2}{1+B_1x_1+B_2x_2+\ldots+B_kx_k}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x'_k = \dfrac{x_k}{1+B_1x_1+B_2x_2+\ldots+B_kx_k}, \\ y' = \dfrac{y}{1+B_1x_1+B_2x_2+\ldots+B_kx_k}. \end{cases}$$

D'après le lemme du n° 38, on voit que, avec cette substitution, R se réduit à l'unité. Je poserai

$$(53)\quad \begin{cases} z' = 1+B_1x_1+B_2x_2+\ldots+B_kx_k, \\ z = 1-(B_1x'_1+B_2x'_2+\ldots+B_kx'_k). \end{cases}$$

La transformation réciproque de (52) est

$$x_1 = \frac{x'_1}{z}, \qquad x_2 = \frac{x'_2}{z}, \qquad \ldots, \qquad x_k = \frac{x'_k}{z}, \qquad y = \frac{y'}{z},$$

en sorte que z désigne, comme au n° 39, le dénominateur de cette transformation. Entre z et z', on trouve aisément la relation $zz'=1$.

Je vais chercher les expressions des dérivées relatives aux variables $x_1, \ldots$ en fonction des dérivées relatives aux variables $x'_1, \ldots$. A cet

effet, j'emploie la forme de Taylor. Soient $(x'_1, \ldots, y')$ un système de valeurs des variables et $\xi'_1, \ldots, \eta'$ leurs accroissements. En posant

$$1.2.3\ldots i.u_i = \left(\frac{\partial}{\partial x'_1}\xi'_1 + \frac{\partial}{\partial x'_2}\xi'_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x'_k}\xi'_k\right)^{(i)} y',$$

j'ai, par la formule de Taylor,

$$(54)\qquad y' + \eta' = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots.$$

Soient maintenant $(x_1, \ldots, y)$ et $(\xi_1, \ldots, \eta)$ les valeurs et les accroissements des autres variables, qui correspondent aux valeurs et aux accroissements des premières, que je viens de considérer. Par (52), j'exprime $x'_1, \ldots, y'$ et $\xi'_1, \ldots, \eta'$ en fonction de $x_1, \ldots, y$ et $\xi_1, \ldots, \eta$. Je substitue dans (54). Cela fait, je mettrai le résultat sous la forme

$$(55)\qquad y + \eta = \mathrm{U}_0 + \mathrm{U}_1 + \mathrm{U}_2 + \mathrm{U}_3 + \ldots,$$

où U_i désignera une forme de degré i en $\xi_1, \ldots, \xi_k$, dont les coefficients seront des fonctions de ceux des formes u_i. De (55) je déduirai

$$1.2.3\ldots i.\,\mathrm{U}_i = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\xi_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_k}\xi_k\right)^{(i)} y.$$

Cette dernière relation me donnera les expressions des dérivées d'ordre i de y par rapport aux variables $x_1, \ldots$ en fonction des coefficients des formes u_i ou des dérivées de y' par rapport aux variables $x'_1, \ldots$.

Je désigne par ζ' l'accroissement de la variable z' (53)

$$\zeta' = \mathrm{B}_1\xi_1 + \mathrm{B}_2\xi_2 + \ldots + \mathrm{B}_k\xi_k.$$

De la dernière équation (52) je conclus

$$y' + \eta' = \frac{y + \eta}{z' + \zeta'} = z\,\frac{y + \eta}{1 + z\zeta'},$$

$$(56)\qquad y + \eta = \frac{1 + z\zeta'}{z}(u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots).$$

Dans la parenthèse du second membre de (56), il faut maintenant introduire les quantités $\xi_1, \ldots$ au lieu de $\xi'_1, \ldots$. Des équations (52) je déduis

$$(57)\qquad \xi'_i = \frac{x_i + \xi_i}{z' + \zeta'} - \frac{x_i}{z'} = \frac{z'\xi_i - x_i\zeta'}{z'(z' + \zeta')} = z\,\frac{\xi_i - x'_i\zeta'}{1 + z\zeta'}.$$

Je considère la substitution

$$(58)\quad \begin{cases} \xi'_1 = \xi_1 - x'_1\zeta' = \xi_1 - x'_1(B_1\xi_1 + \ldots + B_k\xi_k), \\ \xi'_2 = \xi_2 - x'_2\zeta' = \xi_2 - x'_2(B_1\xi_1 + \ldots + B_k\xi_k), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \xi'_k = \xi_k - x'_k\zeta' = \xi_k - x'_k(B_1\xi_1 + \ldots + B_k\xi_k). \end{cases}$$

Pour effectuer dans le second membre de (56) la substitution (57), il n'y aura qu'à effectuer dans chaque forme u_i la substitution (58) et à multiplier ensuite par $\left(\frac{z}{1+z\zeta'}\right)^i$. Soit donc v_i la forme u_i transformée par la substitution (58). On aura

$$(59)\quad y + \eta = \frac{1 + z\zeta'}{z}\left[u_0 + \frac{v_1 z}{1+z\zeta'} + \frac{v_2 z^2}{(1+z\zeta')^2} + \frac{v_3 z^3}{(1+z\zeta')^3} + \ldots\right].$$

Si l'on développe chaque terme de la parenthèse suivant les puissances ascendantes de ζ' et qu'on prenne l'ensemble des termes du degré i en $\xi_1, \ldots, \xi_k, \zeta'$, on aura U_i. J'ai donc

$$(60)\quad U_i = z^{i-1}\left[v_i - \frac{i-2}{1}v_{i-1}\zeta' + \frac{(i-2)(i-3)}{1.2}v_{i-2}\zeta'^2 - \ldots\right],$$

ce qui peut symboliquement s'écrire

$$U_i = z^{i-1}[v_2(v - \zeta')^{i-2}].$$

Je vais maintenant examiner quelles conséquences on en peut tirer dans le cas où l'on considère une équation algébrique aux différences partielles qui se reproduit elle-même par toute transformation homographique.

41. Soit $f=0$ une telle équation, mise sous forme entière. D'après le n° 39, nous savons qu'elle ne contient ni les variables, ni les dérivées du premier ordre. Si donc, comme précédemment, on désigne par U_i la forme

$$1.2.3\ldots i.U_i = \left(\xi_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \xi_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^{(i)} y,$$

on voit que f est une fonction entière des coefficients des formes U_2, $U_3, \ldots$. Considérons, pour un instant, une substitution linéaire homogène qui ne modifie que les variables indépendantes

$$(61)\quad \begin{cases} x'_1 = b_1x_1 + c_1x_2 + \ldots + l_1x_k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x'_k = b_kx_1 + c_kx_2 + \ldots + l_kx_k. \end{cases}$$

Je donne à u_i le même sens que précédemment, et appliquant dans cette forme la substitution (61) par rapport aux variables $\xi'_1, \ldots, \xi'_k$, je la change en une autre w_i. Il est manifeste qu'on a $U_i = w_i$. Ainsi, quand la transformation homographique envisagée est simplement la substitution (61), on n'a, pour passer de f à f', qu'à effectuer, dans les formes U, une substitution linéaire. Mais, par hypothèse, f' reproduit f, sauf un facteur qui (n° 38) ne dépend ici que des coefficients de la substitution (61). Donc f est une fonction des coefficients des formes U, jouissant de la propriété *d'invariance*, c'est-à-dire sur laquelle une substitution linéaire, faite dans les formes, a pour effet de la multiplier simplement par un facteur qui ne dépend que des coefficients de la substitution. Actuellement, nous ne savons pas encore si ce facteur est une puissance du déterminant de la substitution : c'est pourquoi je ne dis pas que f soit un *invariant* [1].

Pour abréger le langage, au lieu de dire : faire, dans les formes U, la substitution (61), je dirai simplement : *faire la substitution* $U_i = w_i$, c'est-à-dire déduire de cette équation et des analogues les expressions des coefficients des formes U en fonction de ceux des formes u, et les substituer dans la fonction f considérée. La propriété d'invariance consiste en ce que, à un facteur λ près, le résultat est la même fonction portant sur les coefficients des formes u. Si l'on fait la substitution $U_i = A^i w_i$, A étant une constante, c'est multiplier, dans (61), les coefficients par A ; par suite, c'est encore faire une substitution linéaire, dont l'effet est de multiplier λ par une certaine puissance de A.

La substitution $U_i = A^{i-1} w_i$ revient à faire la substitution $U_i = A_i w_i$, et à diviser ensuite chaque coefficient des formes par A. Donc, si f est homogène, la substitution $U_i = A^{i-1} w_i$ a pour effet de multiplier f par un facteur. Il n'en est rien si f n'est pas homogène. En effet, soit

$$f = \varphi + \varphi' + \varphi'' + \ldots,$$

où je suppose $\varphi, \varphi', \varphi'', \ldots$ homogènes et respectivement des degrés $\delta, \delta', \delta'', \ldots$. Il est manifeste que $\varphi, \varphi', \ldots$ doivent jouir séparément de

[1] On sait, par la théorie des formes, qu'il ne peut en être autrement. J'ai cru cependant intéressant de dispenser ici le lecteur de la connaissance de cette proposition.

la propriété d'invariance pour que f en jouisse elle-même. Par suite, si f jouit de cette propriété, il faut que la substitution $U_i = A^i w_i$ ait pour effet de multiplier $\varphi, \varphi', \ldots$ par le même facteur μ. Alors la substitution $U_i = A^{i-1} w_i$ a pour effet de multiplier $\varphi, \varphi', \ldots$ par $\mu A^{-\delta}$, $\mu A^{-\delta'}, \ldots$; donc, *pour que la substitution* $U_i = A^{i-1} w_i$ *reproduise* f, *à un facteur près, il faut et il suffit que* f *soit homogène.*

Je reviens maintenant à la considération de la transformation homographique (52). D'après nos conventions de langage et d'après la formule (60), nous obtenons le résultat de cette transformation homographique en faisant la substitution

$$(62) \qquad U_i = z^{i-1}\left[\upsilon_i - \frac{i-2}{1}\upsilon_{i-1}\zeta' + \frac{(i-2)(i-3)}{1.2}\upsilon_{i-2}\zeta'^2 - \ldots \right].$$

Par hypothèse, cette substitution a pour effet de multiplier f par un facteur θ, qui ne dépend pas des coefficients des formes $U_2, \ldots$. On remarquera que le second membre de (62) est homogène par rapport aux coefficients des formes u ; donc, si f n'est pas homogène, l'effet de la substitution (62) est de multiplier par θ chacune des fonctions partielles $\varphi, \varphi', \ldots$.

Ainsi une quelconque φ de ces fonctions se multiplie par θ, quand on fait la substitution (62). Si l'on fait la substitution plus simple $U_i = z^{i-1}\upsilon_i$, nous savons que φ se multiplie aussi par un facteur ν qui ne dépend pas non plus des coefficients des formes. Or il est manifeste que cette dernière substitution et la substitution (62) donnent lieu à certains termes qui sont entièrement les mêmes de part et d'autre : ce sont ceux qui contiennent les coefficients de la forme u d'indice le plus élevé. Donc les facteurs θ et ν sont égaux. Ainsi les fonctions $\varphi, \varphi', \ldots$ se reproduisent respectivement, multipliées par le même facteur θ, quand on fait la substitution $U_i = z^{i-1}\upsilon_i$; donc, d'après un résultat précédent, leurs degrés sont les mêmes. Donc *f est homogène.*

J'ajoute cette conclusion, qui permettra bientôt de calculer β. *Soit λ le facteur par lequel se multiplie f quand on fait la substitution $U_i = \upsilon_i$. Soient $\partial_2, \partial_3, \ldots, \partial_i, \ldots$ les degrés auxquels entrent respectivement, dans un terme de f, les coefficients des formes $U_2, U_3, \ldots, U_i, \ldots$. Quand on fait la transformation homographique* (52), *f se reproduit, multipliée par λ et par z, à la puis-*

sance $\partial_2 + 2\partial_3 + \ldots + (i-1)\partial_i + \ldots$, *nombre qui est le même, quel que soit le terme considéré dans* f.

Je vais maintenant employer une nouvelle transformation homographique, propre au calcul de α ; c'est de ce calcul combiné avec les précédents résultats que je pourrai, en dernière analyse, tirer des conclusions définitives.

42. Pour le calcul de α, je considère la substitution suivante :

$$(63)\qquad \left\{\begin{array}{l} x'_1 = a_1 y + b_1 x_1 + c_1 x_2 + \ldots + l_1 x_k, \\ x'_2 = a_2 y + b_2 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + l_2 x_k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x'_k = a_k y + b_k x_1 + c_k x_2 + \ldots + l_k x_k, \\ y' = y. \end{array}\right.$$

Je vais chercher les expressions des dérivées partielles relatives aux variables $x_1, \ldots$ en fonction des dérivées relatives aux variables $x'_1, \ldots$. Par un raisonnement analogue à celui qui a été employé pour la première partie de la proposition du n° 39, on voit que ces expressions ne contiennent pas les variables. On peut donc, sans modifier les expressions demandées, les chercher pour un système de valeurs particulières des variables, par exemple

$$x'_1 = x'_2 = \ldots = x'_k = y' = 0,$$
$$x_1 = x_2 = \ldots = x_k = y = 0.$$

Grâce à cette hypothèse, les accroissements des variables, que je désigne par les mêmes notations que précédemment, sont liés par les formules (63), où les lettres $x_1, \ldots, y$ sont remplacées par les lettres $\xi_1, \ldots, \eta$.

J'ai maintenant à traiter le même problème qu'au n° 40, à savoir : du développement

$$(64)\qquad \eta' = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots,$$

donné par la formule de Maclaurin, déduire le développement

$$\eta = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots.$$

A cet effet, je substitue dans (64) à $\xi'_1, \ldots, \eta'$ les expressions en $\xi_1, \ldots, \eta$ données par (63), je remplace ensuite η par $U_1 + U_2 + \ldots$, et j'égale, dans les deux membres, les termes du premier, du second

ordre, ... Ces égalités déterminent successivement les formes U_1, U_2, ...

Je pose, pour abréger,

$$\frac{\partial y'}{\partial x'_i} = p'_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

$$(65) \qquad 1 - (a_1 p'_1 + a_2 p'_2 + \ldots + a_k p'_k) = \text{R},$$

$$(66) \qquad \begin{cases} b_1 p'_1 + b_2 p'_2 + \ldots + b_k p'_k = \text{BR}, \\ c_1 p'_1 + c_2 p'_2 + \ldots + c_k p'_k = \text{CR}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ l_1 p'_1 + l_2 p'_2 + \ldots + l_k p'_k = \text{LR}. \end{cases}$$

Je cherche d'abord les termes du premier ordre dans les deux membres. Dans le premier, j'ai U_1, et dans le second

$$(1 - \text{R})\text{U}_1 + \text{BR}\xi_1 + \text{CR}\xi_2 + \ldots + \text{LR}\xi_k.$$

Les égalant à U_1 j'en conclus

$$(67) \qquad \text{U}_1 = \text{B}\xi_1 + \text{C}\xi_2 + \ldots + \text{L}\xi_k.$$

Je cherche les termes du second ordre. Dans le premier membre, j'ai U_2. Dans le second membre, j'ai des termes de deux sortes : 1° $(1-\text{R})\text{U}_2$; 2° la forme u_2, transformée par la substitution qu'on obtient en remplaçant dans les k premières équations (63) $x_1, \ldots$, $x'_1, \ldots$, par $\xi_1, \ldots, \xi'_1, \ldots$ et y par U_1 ; c'est-à-dire par la substitution

$$(68) \qquad \begin{cases} \xi'_1 = (b_1 + a_1\text{B})\xi_1 + (c_1 + a_1\text{C})\xi_2 + \ldots + (l_1 + a_1\text{L})\xi_k, \\ \xi'_2 = (b_2 + a_2\text{B})\xi_1 + (c_2 + a_2\text{C})\xi_2 + \ldots + (l_2 + a_2\text{L})\xi_k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \xi'_k = (b_k + a_k\text{B})\xi_1 + (c_k + a_k\text{C})\xi_2 + \ldots + (l_k + a_k\text{L})\xi_k. \end{cases}$$

Je désigne par V_2 la forme u_2 transformée par cette substitution (68). J'ai par suite

$$\text{U}_2 = (1 - \text{R})\text{U}_2 + \text{V}_2,$$

$$\text{U}_2 = \frac{1}{\text{R}}\text{V}_2.$$

Je passe maintenant aux termes du troisième ordre. Dans le premier membre, j'ai U_3. Dans le second membre, j'ai trois sortes de termes : 1° $(1-\text{R})\text{U}_3$; 2° les termes qui proviennent de u_2. Soit

$$u_2 = \varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k).$$

Désignons par $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k$ les dérivées partielles $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$, transformées par la substitution (68). Les termes du troisième ordre fournis par u_2 sont

$$(a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + \ldots + a_k\psi_k)U_2 = \frac{a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + \ldots + a_k\psi_k}{R}V_2 = \rho V_2,$$

où ρ est une fonction des dérivées du deuxième ordre, mais non pas de celles du troisième ordre ; 3° la forme u_3 transformée par la substitution (68). Je la désigne par V_3. J'ai donc

$$U_3 = (1 - R)U_3 + \rho V_2 + V_3,$$

$$(69) \qquad U_3 = \frac{1}{R}(V_3 + \rho V_2).$$

La loi est maintenant manifeste. On obtiendra, en général,

$$(70) \qquad U_i = \frac{1}{R}(V_i + \rho_1 V_{i-1} + \rho_2 V_{i-2} + \ldots + \rho_{i-2} V_2),$$

formule dans laquelle V_j désigne, en général, la forme u_j transformée par la substitution (68), et ρ_j une forme d'ordre j, dont les coefficients sont des fonctions entières de ceux des formes u dont les indices sont moindres que i, la forme u_1 exceptée.

43. La formule (70) n'est pas homogène par rapport aux coefficients des formes $u_2, u_3, \ldots$, car le premier terme y est linéaire et homogène, les autres y sont de degré supérieur à l'unité. Or, par hypothèse, f, par la substitution (70), se reproduit, multipliée par un facteur ne dépendant pas des coefficients des formes $u_2, u_3, \ldots$. J'en ai déjà conclu qne f est homogène : donc aussi je vois que la propriété de f exige que, par la substitution (70), tous les termes contenant les formes ρ disparaissent d'eux-mêmes. Donc la substitution (70) produit le même effet que la simple substitution $U_i = \frac{V_i}{R}$.

De là je tire cette première conclusion : *Soit* μ *le facteur par lequel se multiplie* f, *considérée comme fonction des coefficients des formes* $U_2, U_3, \ldots$, *quand on fait la substitution* (68) (*qui se représente par* $U_i = V_i$), *et soit* δ *le degré de* f. *Considérée comme fonction des dérivées partielles*, f *se multiplie par* $\mu R^{-\delta}$, *quand on fait la transformation* (63).

Le lemme du n° 38 nous fait connaître déjà, sous une autre forme,

ce même facteur. Ici on a $z = 1$, et la quantité désignée par R est la même. Donc $\mu R^{-\delta} = KR^{-\alpha}$, ou

(71) $$\mu = \frac{K}{R^{\alpha-\delta}}.$$

Nous ne connaissons pas l'expression de K, mais nous savons (n° 38) que cette quantité est une fonction seulement des coefficients de la transformation employée, qui est ici représentée par les formules (63). Ainsi K dépend seulement des quantités $(a_1, b_1, c_1, \ldots, l_1)$, $(a_2, b_2, c_2, \ldots, l_2)$, ..., $(a_k, b_k, c_k, \ldots, l_k)$. Quant à μ, c'est une fonction également inconnue des coefficients de la substitution (68). Dans ces coefficients entrent les quantités nouvelles B, C, ..., L. Cette circonstance va permettre de conclure de (71) la forme de la fonction μ.

La fonction μ dépend de k^2 quantités $(\beta_1, \gamma_1, \ldots, \lambda_1)$, $(\beta_2, \gamma_2, \ldots, \lambda_2)$, ... et satisfait à (71) quand on y fait

(72) $$\left\{\begin{array}{llll} \beta_1 = b_1 + a_1 B, & \gamma_1 = c_1 + a_1 C, & \ldots, & \lambda_1 = l_1 + a_1 L, \\ \beta_2 = b_2 + a_2 B, & \gamma_2 = c_2 + a_2 C, & \ldots, & \lambda_2 = l_2 + a_2 L, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\ \beta_k = b_k + a_k B, & \gamma_k = c_k + a_k C, & \ldots, & \lambda_k = l_k + a_k L. \end{array}\right.$$

Je forme le déterminant de ces k^2 quantités, et je le désigne par Δ. Soit aussi Δ_0 sa valeur quand on a fait évanouir les lettres a. On reconnaîtra sans peine, à cause des équations (65) et (66), qu'on a

$$\Delta = \frac{\Delta_0}{R}.$$

Par suite, $\Delta^{\alpha-\delta}$ est une fonction qui jouit, comme μ, de la propriété représentée par l'équation (71), c'est-à-dire que $\Delta^{\alpha-\delta}$ est égal à une fonction ne dépendant pas de B, C, ..., L, divisée par la puissance $(\alpha - \delta)$ de R. Je dis qu'il en résulte $\mu = \Delta^{\alpha-\delta}$.

Je désigne par F le quotient de μ par $\Delta^{\alpha-\delta}$.

Il résulte de ce qui vient d'être dit que F, pour les valeurs (72) de ses arguments, est indépendante de B, C, ..., L. Je prends sa dérivée par rapport à B, après substitution des valeurs (72). Cette dérivée doit être identiquement nulle. J'ai donc

(73) $$a_1 \frac{\partial F}{\partial \beta_1} + a_2 \frac{\partial F}{\partial \beta_2} + \ldots + a_k \frac{\partial F}{\partial \beta_k} = 0.$$

Je fais maintenant $B = C = \ldots = L = 0$. Alors les lettres a n'entrent plus dans F, et l'identité (73) exige que chaque dérivée partielle soit identiquement nulle. On obtient des résultats analogues en prenant les dérivées par rapport à C, ..., L. Donc toutes les dérivées du premier ordre de F sont identiquement nulles ; donc F est une constante. Il suffit de considérer la substitution *unité* pour voir que cette constante est l'unité. Donc *f est un invariant des formes simultanées* $U_2, U_3, \ldots,$ *et le poids de cet invariant est* $(\alpha - \delta)$.

44. Je reviens maintenant à la conclusion du n° 41. Le déterminant de la substitution (58) est, comme on le vérifie aisément, égal à

$$z = 1 - (B_1 x'_1 + B_2 x'_2 + \ldots + B_k x'_k).$$

Donc le facteur λ, dont il s'agit dans l'énoncé qui termine le n° 41, est $z^{\alpha-\delta}$, ou, en désignant par p le poids de l'invariant, $\lambda = z^p$. Or on a

$$kp = 2\partial_2 + 3\partial_3 + \ldots + i\partial_i + \ldots;$$

par suite,

$$\partial_2 + 2\partial_3 + \ldots + (i-1)\partial_i = kp - (\partial_2 + \partial_3 + \ldots + \partial_i) = kp - \delta.$$

Donc, quand on fait la transformation homographique du n° 40 (52), f se multiplie par $z^{(k+1)p-\delta}$. Rapprochant ce résultat du théorème XVI, j'en conclus

$$\beta = -(k+1)p + \delta,$$

auquel il faut joindre

$$\alpha = p + \delta.$$

Donc, enfin, le degré $M = \alpha(m-1) + \beta$ de l'équation mentionnée au théorème XVI se met sous la forme

$$M = (p+\delta)m - (k+2)p.$$

D'où cette proposition :

Théorème XVII. — *Soit $f = 0$ une équation algébrique aux dérivées partielles entre la fonction y et les k variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_k$, qui jouisse de la propriété de rester inaltérée par toute transformation homographique. Cette équation étant mise sous forme entière, f est un invariant homogène des formes*

simultanées $U_2, U_3, \ldots,$ *définies par la relation*

$$1.2.3\ldots i.U_i = \left(\xi_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\xi_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\ldots+\xi_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^{(i)} y,$$

où $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ *sont les variables de ces formes.*

Soient p *le poids de cet invariant et* δ *son degré.*

Les points d'une surface algébrique de degré m [dans l'espace à $(k+1)$ dimensions] *qui satisfont à la condition exprimée par l'équation* $f=0$ *sont les intersections de cette surface avec une autre dont le degré est*

$$M = (p+\delta)m-(k+2)p.$$

45. Je ferai, au sujet de l'analyse précédente, une remarque. Dès qu'une fonction f des dérivées partielles ne contient ni les variables, ni les dérivées du premier ordre, il est manifeste qu'elle ne change pas quand on change x_i en $(x_i+\lambda)$ ou y en $(y+\mu)$, ou encore y en $y+\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\ldots+\lambda_k x_k+\lambda_{k+1}$. Par suite, si l'équation $f=0$ reste inaltérée par la substitution (63), elle reste inaltérée par toute substitution linéaire. En outre, la substitution composée successivement de la transformation homographique (52) et d'une substitution linéaire revient à une transformation homographique quelconque. On a donc, dans ce qui précède, les éléments pour reconnaître les conditions nécessaires et suffisantes à l'invariance d'une équation telle que $f=0$. On peut les résumer comme il suit :

1° Les conditions mentionnées au théorème XVII : f est un invariant homogène des formes simultanées $U_2, U_3, \ldots$;

2° La substitution (60)

$$U_i = z^{i-1}\left(\upsilon_i-\frac{i-2}{1}\upsilon_{i-1}\zeta'+\ldots\right)$$

y produit le même effet que la substitution $U_i = z^{i-1}\upsilon_i$;

3° La substitution (70)

$$U_i = \frac{1}{R}(V_i+\rho_1 V_{i-1}+\rho_2 V_{i-2}+\ldots)$$

y produit le même effet que la substitution $U_i=\frac{1}{R}V_i$.

Mais, pour tirer de là des conclusions explicites, il faudrait connaître

la composition des formes ρ qui entrent dans cette dernière relation. C'est en ce point que réside, je pense, toute la difficulté de la question. Je ne chercherai pas ici à lever cette difficulté, mais je ferai observer que, d'après cet aperçu, nous reconnaissons que :

Théorème XVIII. — *Si l'invariant homogène f des formes simultanées U_2, U_3, ..., ne change pas quand on y remplace U_i par*

$$U_i + \rho_1 U_{i-1} + \rho_2 U_{i-2} + \ldots + \rho_{i-2} U_2,$$

où ρ_j désigne une forme arbitraire de degré j, l'équation aux dérivées partielles $f = 0$ reste inaltérée par toute transformation homographique.

Je répète que ce théorème nous donne des conditions suffisantes, mais non pas nécessaires, pour l'invariance d'une équation aux dérivées partielles.

46. Une partie de l'énoncé XVII n'a plus de sens dans le cas d'une seule variable indépendante. Il n'y a plus, en effet, de forme U, chacune d'elles se réduisant à un seul terme. La proposition se modifie comme il suit :

Théorème XIX. — *Soit $f = 0$ une équation différentielle algébrique entre la variable indépendante x et la fonction y, qui jouisse de la propriété de rester inaltérée par toute transformation homographique. Cette équation étant mise sous forme entière, f est homogène par rapport aux dérivées de y. Soit δ son degré par rapport à ces dérivées; soit, en outre, p la puissance de la constante b par laquelle f se multiplie quand on change x en $\frac{x}{b}$.*

Les points d'une courbe plane de degré m qui satisfont à la condition exprimée par $f = 0$ sont les intersections de cette courbe avec une autre dont le degré est

$$M = (p + \delta)m - 3p.$$

Ainsi, soit $f = y''$, on a

$$\delta = 1, \qquad p = 2, \qquad M = 3m - 6.$$

Soit pour f le déterminant (36) du n° 28, on a

$$\delta = 3, \qquad p = 9, \qquad M = 12m - 27.$$

47. Je vais maintenant faire quelques applications du théorème XVII. Je prendrai, à cet effet, des équations dont la propriété d'invariance découle du théorème XVIII.

En premier lieu, ce théorème nous montre qu'on obtient une équation invariable par les transformations homographiques, en égalant à zéro le discriminant de la forme quadratique U_2. Le degré est égal à k, le poids à 2. Donc

$$M = (k+2)(m-2). \tag{74}$$

Dans le cas de deux variables indépendantes, on a ainsi $4(m-2)$ pour le degré de la surface qui coupe une surface de degré m suivant le lieu des *points paraboliques*. C'est bien, en effet, le degré de la surface hessienne qui, comme on sait, passe par ce lieu. Il est naturel, d'après (74), de penser que l'équation de degré M, qu'on trouvera dans le cas général, a pour premier membre le hessien de la fonction envisagée. Il en est ainsi effectivement ; mais ce n'est pas ici le lieu de le démontrer.

Voici une seconde application. Le *résultant* des formes $U_2, U_3, \ldots, U_{k+1}$ satisfait aux conditions du théorème XVIII. Son degré, par rapport aux coefficients de U_i, est

$$\partial_i = \frac{2.3\ldots(k+1)}{i};$$

par suite, son poids est $2.3\ldots(k+1)$.

Je pose

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{k+1} = S_{k+1}.$$

Le degré est $2.3\ldots(k+1)(S_{k+1}-1)$; par suite

$$M = 2.3\ldots(k+1)[S_{k+1}m - (k+2)].$$

Ici l'interprétation géométrique est très simple. Dans l'espace à $(k+1)$ dimensions, j'appelle *ligne droite* l'être défini par k équations linéaires. Une surface étant rapportée à des coordonnées telles qu'on ait à la fois

$$y = x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0, \qquad \frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{\partial y}{\partial x_2} = \ldots = \frac{\partial y}{\partial x_k} = 0, \tag{75}$$

c'est-à-dire l'origine étant sur la surface et le *plan* $y=0$ étant tangent

en ce point à la surface, les équations simultanées

$$y = 0, \qquad U_2 = 0, \qquad U_3 = 0, \qquad \ldots, \qquad U_k = 0$$

déterminent 2. 3. .... k droites L. On a, aux environs de l'origine,

$$y = U_2 + U_3 + \ldots + U_k + U_{k+1} + U_{k+2} + \ldots;$$

par suite, chacune des droites L a, à l'origine, un contact d'ordre k avec la surface. C'est une généralisation des asymptotes de l'indicatrice :

Dans l'espace à $(k+1)$ *dimensions, en tout point d'une surface, il existe des droites ayant en ce point avec la surface un contact d'ordre* k, *et leur nombre est* 2. 3..... k. Je les appelle *droites osculatrices.*

Si, en même temps, U_{k+1} s'évanouit quand on y met les coordonnées d'une de ces droites, cette dernière a alors avec la surface un contact d'ordre $(k+1)$. Elle est *surosculatrice ;* donc les points en lesquels une droite devient surosculatrice sont ceux en lesquels le résultant de U_2, U_3, ..., U_{k+1} s'évanouit, les coordonnées de ce point satisfaisant d'ailleurs aux relations (75). Mais cette dernière restriction disparaît, attendu qu'il est évident que la condition n'est pas altérée par les transformations homographiques. Ainsi des considérations géométriques pouvaient faire prévoir que l'équation obtenue en égalant à zéro le résultant ci-dessus restait inaltérée par les transformations homographiques.

J'ai, pour l'application envisagée, l'énoncé suivant :

Le lieu des points d'une surface de degré m [dans l'espace à $(k+1)$ dimensions], *en lesquels une droite osculatrice de la surface lui devient surosculatrice, est l'intersection de cette surface avec une autre dont le degré est*

$$(76) \qquad M = 2.3\ldots(k+1)\left[\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k+1}\right)m - (k+2)\right].$$

Pour le cas de trois dimensions, la formule (76) donne $M = 11m - 24$, résultat donné depuis longtemps par M. Salmon. J'ajoute que le pro-

cédé de démonstration employé par cet auteur s'étendrait sans aucune difficulté au cas de $(k+1)$ dimensions [1].

48. Je ferai enfin une troisième application.

Je prends les $(k-1)$ formes $U_2, U_3, \ldots, U_k$. Si on les égale à zéro et qu'on élimine $(k-2)$ variables, le premier membre de la résultante est une forme binaire. En égalant le discriminant de cette dernière à zéro, on aura l'équation dont il s'agit : $f=0$. L'invariant f coïncide avec celui que M. Cayley nomme le *tact-invariant* des formes envisagées. Il est manifeste que cet invariant satisfait à l'énoncé XVIII.

Le tact-invariant de $(k-1)$ formes des degrés $q_1, q_2, \ldots, q_{k-1}$ et à k variables est, par rapport aux coefficients de la forme de degré q_i, du degré

$$\partial_i = \frac{q_1 q_2 \ldots q_{k-1}}{q_i}(\Sigma q + q_i - k).$$

En appliquant cette formule, aisée à démontrer, au cas actuel, on trouve

$$p = 2.3\ldots k\frac{k(k-1)}{2}.$$

$$p+\delta = 2.3\ldots k\left[\frac{(k+1)(k-2)}{2}S_k + k\right],$$

S_k ayant la même signification qu'au numéro précédent. Dans le cas où l'on a $k=2$, le tact-invariant se réduit au discriminant de la forme binaire U_2, et les formules ci-dessus s'appliquent encore. On a donc ici une nouvelle généralisation du lieu des points paraboliques. C'est, en effet, ce qui résulte clairement de l'interprétation géométrique de l'équation aux dérivées partielles. Sans m'y arrêter plus longuement, je la rapporte dans cet énoncé :

Le lieu des points d'une surface de degré m [dans l'espace à $(k-1)$ dimensions], *en lesquels deux droites osculatrices se confondent, est l'intersection de cette surface avec une autre, dont le degré est*

$$M = 2.3\ldots k\left\{\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}\right)\frac{(k+1)(k-2)}{2}+k\right]m - \frac{k(k-1)(k+2)}{2}\right\},$$

formule qui, pour $k=2$, donne bien $M=4(m-2)$.

(1) SALMON FIEDLER, t. II, p. 474.

49. Dans beaucoup de questions géométriques, avec l'emploi des coordonnées homogènes, on a à considérer des équations différentielles, ou aux différences partielles, où les variables indépendantes sont indéterminées. Par exemple, ξ, η, ζ étant des coordonnées ponctuelles dans le plan, l'équation différentielle des lignes droites est

$$f = \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi' & \eta' & \zeta' \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' \end{vmatrix} = 0,$$

où ξ', ξ'', ... sont des dérivées du premier et du second ordre. Si l'on y fait $\zeta = 1$, et qu'on prenne ξ pour variable indépendante, f se réduit à η''. L'équation est ainsi ramenée à la formule habituelle $\eta'' = 0$. Mais on peut aussi revenir à cette forme en prenant pour variable indépendante et pour fonction $\frac{\xi}{\zeta}$ et $\frac{\eta}{\zeta}$. Soit $\frac{\xi}{\zeta} = x$, $\frac{\eta}{\zeta} = y$. On a, par un calcul facile,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\zeta^3}{(\zeta\xi' - \xi\zeta')^3} f.$$

En donnant au théorème IV une forme nouvelle, on peut, de cette dernière relation, déduire immédiatement $\alpha = 3$, $\beta = -3$. Voici, en effet, quelle forme on peut donner aux théorèmes IV et XVI. Je me borne à un seul énoncé comprenant le cas d'une seule variable indépendante aussi bien que celui où il y en a plusieurs.

Théorème XX. — *Soit $f = 0$ une équation entière aux dérivées partielles entre les variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_k$ et la fonction y. On prend de nouvelles variables indépendantes t_1, t_2, ..., t_k, et l'on remplace $x_1, \ldots, x_k, y$ par $\frac{\xi_1}{\zeta}, \ldots, \frac{\xi_k}{\zeta}, \frac{\eta}{\zeta}$. Soit $F = 0$ l'équation transformée, mise également sous forme entière. On a identiquement*

$$f = \frac{1}{\Delta^\alpha \zeta^\beta} F, \tag{77}$$

relation dans laquelle Δ est le déterminant $\sum \pm \zeta \frac{\partial \xi_1}{\partial t_1} \frac{\partial \xi_2}{\partial t_2} \cdots \frac{\partial \xi_k}{\partial t_k}$, et où α et β sont les mêmes nombres qu'au théorème XVI.

Pour démontrer ce théorème, j'observe d'abord que chaque dérivée

partielle de y par rapport aux premières variables indépendantes s'exprime par le quotient de deux fonctions entières des dérivées partielles relatives aux nouvelles variables. On démontrera aisément que le dénominateur est une puissance du déterminant

$$D = \sum \pm \frac{\partial x_1}{\partial t_1} \frac{\partial x_2}{\partial t_2} \cdots \frac{\partial x_k}{\partial t_k}.$$

Par suite, si $\mathfrak{F} = 0$ est la transformée, sous forme entière, qu'on obtient par le simple changement des variables indépendantes, on a $f = \frac{1}{D^a}\mathfrak{F}$, a étant un entier positif. Je fais maintenant le second changement, qui consiste à remplacer $x_1, \ldots, x_k, y$ par $\frac{\xi_1}{\zeta}, \ldots, \frac{\xi_k}{\zeta}, \frac{\eta}{\zeta}$. Soit $F = 0$ la transformée de $\mathfrak{F} = 0$, mise sous forme entière; on a manifestement, en désignant par c un entier positif, $\mathfrak{F} = \frac{1}{\zeta^c}F$. On a d'ailleurs aussi $D = \frac{\Delta}{\zeta^{2k}}$; donc enfin

$$(78) \qquad f = \frac{1}{\Delta^a \zeta^{c-2ka}} F.$$

Ainsi la liaison entre f et F est bien de la forme (77) annoncée. Il reste à faire voir que les nombres a et $(c - 2ka)$ coïncident avec les nombres α, β du théorème XVI, ou plutôt définis dans le lemme qui précède ce théorème (n° 38).

J'opère sur les quantités $\xi_1, \ldots, \xi_k, \eta, \zeta$ une substitution linéaire homogène qui les remplace par les quantités $\xi'_1, \ldots, \xi'_k, \eta', \zeta'$. Soit F' ce que devient F, exprimée avec ces nouvelles quantités, sans modifications des variables indépendantes. On a alors, au lieu de (78),

$$(79) \qquad f = \frac{1}{\Delta^a \zeta^{c-2ka}} F',$$

où je suppose aussi que dans Δ et ζ les substitutions soient faites. Dans cette opération aucun facteur variable ne s'introduit, attendu que toutes les dérivées de $\xi_1, \ldots, \eta, \zeta$ sont, comme les variables mêmes, transformées par la même substitution linéaire.

Les variables indépendantes $t_1, \ldots, t_k$ sont jusqu'à présent indéterminées. Je suppose maintenant qu'elles coïncident avec $\xi'_1, \ldots, \xi'_k$, et je fais en même temps $\zeta' = 1$. Alors F' n'est pas autre chose que le premier membre, sous forme entière, de la transformée de f au

moyen d'une substitution homographique. La variable ζ coïncide avec le dénominateur commun des expressions de $x_1, \ldots, x_k, y$ en fonction de $\xi'_1, \ldots, \xi'_k\ \eta$. En outre, on reconnaîtra sans peine que Δ coïncide avec l'expression désignée dans le lemme (38) par R; par suite, la relation (79) coïncide avec celle qui fait l'objet de ce lemme. Par suite, le théorème XX est démontré.

50. Je ne donnerai ici aucune application du théorème XX, me réservant de le faire dans une autre occasion. En terminant ce Mémoire, je ferai observer que, dans le cas où il existe plus d'une variable indépendante, je n'ai pas abordé le second des deux problèmes posés au début. Il ne me semble guère possible de le faire dans l'état actuel de nos connaisances à l'égard des singularités des surfaces.

Dans le même ordre d'idées, d'autres problèmes plus difficiles peuvent être posés. On peut chercher le nombre des points d'une courbe *gauche* algébrique qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle; le nombre des points d'une surface qui satisfont à deux conditions exprimées par deux équations aux dérivées partielles, etc. Comme on le voit, le sujet abordé dans ce Mémoire est loin d'être épuisé.

SUR LES CARACTÉRISTIQUES

DES

SYSTÈMES DES CONIQUES.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 83, 1876, p. 537.

Pour un grand nombre de cas particuliers, M. Chasles a découvert et démontré la proposition suivante :

Soient, dans un système plan de coniques, μ le nombre de ces courbes qui passent par un point et ν le nombre de celles qui touchent une droite : le nombre des coniques du système qui satisfont à une condition quelconque, indépendante de ce système, est $\alpha\mu + \beta\nu$, les nombres α et β ne dépendant que de la condition considérée.

On a été conduit à supposer ce théorème entièrement général (¹); cette extension n'est pas légitime, et je vais tout d'abord le montrer par un exemple.

Je désigne par K la condition, pour une conique, d'intercepter sur une droite un segment qui soit dans un rapport donné avec le sinus de l'angle sous lequel cette conique est vue d'un point (²).

Je considère, d'autre part, deux systèmes :

1° S, composé des coniques tangentes à une courbe donnée en deux points donnés ;

(¹) On a même tenté de le démontrer. Les démonstrations sont inexactes par suite de l'omission que je signale plus loin.

(²) J'emploie, pour en abréger l'énoncé, une condition non projective. Il n'y a aucune difficulté à la mettre sous forme projective.

2° S′, composé des coniques ayant, avec une courbe donnée, en un point donné, des contacts du troisième ordre. C'est, comme on voit, un cas particulier du précédent.

S et S′ ont les mêmes caractéristiques : $\mu = \nu = 1$.

Désignant par N (S, K) le nombre des coniques d'un système S, qui satisfont à une condition K, on aurait, si le théorème s'appliquait ici

$$N(S, K) = N(S', K) = \alpha + \beta.$$

Or, on trouve aisément

$$N(S, K) = 4, \qquad N(S', K) = 3;$$

donc le théorème ne s'applique pas au cas actuel.

Ce fait est dû à une circonstance dont on n'a pas jusqu'à présent tenu un compte suffisant. Les coniques d'un système peuvent présenter trois modes de dégénérescence : 1° le point avec deux droites passant en ce point ; 2° la droite avec deux points situés sur cette droite ; 3° la droite avec un seul point situé sur cette droite. Les deux premiers modes sont corrélatifs l'un de l'autre, le troisième est corrélatif de lui-même. C'est de ce troisième mode qu'on n'a pas suffisamment tenu compte, et c'est parce qu'il se présente dans le système S′ que le théorème ne s'applique pas à l'exemple précité.

Dans le cas le plus général, le nombre des coniques d'un système, qui satisfont à une condition, est d'une forme bien plus complexe que dans le théorème ci-dessus. L'énoncé des résultats que j'ai obtenus à ce sujet ne saurait trouver place dans cette Note, et je me contenterai de citer un nouvel exemple qui puisse donner une idée de ces résultats.

Je désigne par L une condition analogue à celle qui a été précédemment considérée ; elle consistera en ce que la $m^{\text{ième}}$ puissance du segment intercepté par la conique sur une droite soit dans un rapport donné avec la $n^{\text{ième}}$ puissance du sinus de l'angle sous lequel cette conique est vue d'un point. Les nombres m, n seront entiers et positifs. Je considère, d'autre part, le système Σ formé par les coniques ayant des contacts du quatrième ordre avec la courbe bien connue dont l'équation en coordonnées homogènes est

$$x^p y^q = z^{p+q},$$

p et q étant des entiers positifs et premiers entre eux. Les caractéristiques de Σ sont

$$\mu = \nu = 2(p+q).$$

En combinant la condition L et le système Σ et supposant $p<q$, on trouve :

1° Si $\frac{q}{p} < \frac{n}{m}$, $\quad N(\Sigma, L) = 2(m+2n)(p+q)$;

2° Si $\frac{p}{q} < \frac{n}{m} < \frac{q}{p}$, $\quad N(\Sigma, L) = 2(m+n)(p+2q)$;

3° Si $\frac{p}{q} > \frac{n}{m}$, $\quad N(\Sigma, L) = 2(n+2m)(p+q)$.

Si, au contraire, on combinait la condition L avec un système A ne contenant pas le troisième mode de dégénérescence, le théorème précité s'appliquerait, et l'on aurait

$$N(A, L) = 2(m\mu + n\nu).$$

Si l'on faisait, à tort, l'application de cette dernière formule au système Σ, on trouverait, pour $N(\Sigma, L)$, le nombre $4(m+n)(p+q)$, qui ne s'accorde avec aucun des précédents.

SUR LES ORDRES

ET LES

CLASSES DE CERTAINS LIEUX GÉOMÉTRIQUES.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 83, 1876, p. 705.

M. Chasles a donné de nombreux exemples de lieux, dans la définition desquels figurent des courbes, et dont les ordres ou les classes se déterminent simplement en fonction des ordres et des classes de ces courbes. MM. Saltel et Fouret ont généralisé plusieurs de ces exemples. M. Fouret vient notamment de publier (*Comptes rendus*, t. LXXXIII, p. 605) une élégante formule pour déterminer l'ordre du lieu des points dont les distances à des courbes sont liés par une relation donnée. Il y parvient en appliquant ce théorème : *Le nombre des courbes d'un système* (μ, ν) *qui touchent une courbe d'ordre m et de classe n est égal à* $\mu n + \nu m$. Il s'agit ici d'un système défini par une équation différentielle du premier ordre. Aussi peut-on préférer l'un des deux énoncés suivants de la même proposition : *Le nombre des points d'une courbe d'ordre m et de classe n, qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle du premier ordre et algébrique, est* $\mu n + \nu m$, *les nombres* μ, ν *dépendant seulement de l'équation différentielle ;* ou encore : *Dans un connexe* [1], *le nombre des éléments qui sont composés d'un point d'une courbe et de la tangente en ce point est égal au produit des*

[1] M. Clebsch a appelé *connexe* l'être défini par une relation entre les coordonnées d'un point l et d'une droite λ. Le degré de cette relation par rapport aux coordonnées de l est l'*ordre* du connexe ; le degré par rapport aux coordonnées de λ est la *classe*. Si l'on astreint λ à passer constamment par l, l'équation du connexe se change en une équation différentielle du premier ordre.

classes du connexe et de la courbe, augmenté du produit de leurs ordres.

Je me propose de montrer qu'au moyen du même théorème on peut encore généraliser les résultats précités. Voici le problème que je vais d'abord traiter :

Soient données k relations algébriques entre les coordonnées de k points $l_1, \ldots, l_k$ et de k droites $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, dans un plan.

Soient, d'autre part, $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ des courbes algébriques du même plan. De combien de manières peut-on astreindre simultanément chaque couple $(l_i \lambda_i)$ à être composé d'un point de la courbe φ_i de même indice et de la tangente de φ_i en ce point?

Je représente le nombre cherché par le produit symbolique $\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_k$. Si φ_i est une droite, j'emploie pour la désigner la lettre D_i; si c'est un point, la lettre P_i. Je supprime, pour un instant, la condition relative à (l_k, λ_k), les autres conditions subsistant. Alors (l_k, λ_k) décrit un connexe. Soient ν, μ l'ordre et la classe de ce connexe. D'après le théorème ci-dessus, le nombre cherché est $(\mu n_k + \nu m_k)$. Si φ_k se réduit à D_k ou à P_k, ce dernier nombre se réduit à ν ou à μ. D'après nos conventions, on a donc

$$\begin{aligned}\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_k &= \varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_{k-1} P_k n_k + \varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_{k-1} D_k n_k \\ &= \varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_{k-1} (P_k n_k + D_k n_k).\end{aligned}$$

D'où résulte immédiatement que : *Le nombre cherché est symboliquement égal au produit des k facteurs $(P_i n_i + D_i m_i)$, dans lequel chaque produit de k lettres P, D doit être remplacé par le nombre répondant à la question dans le cas où les courbes correspondantes sont des points et des droites.*

Et, en second lieu : *Si l'on supprime la condition relative à φ_k, (l_k, λ_k) décrit un connexe dont l'ordre et la classe sont représentés symboliquement par le produit des $(k-1)$ facteurs $(P_i n_i + D_i m_i)$, grâce à une convention analogue.*

Je prends ce dernier résultat et je suppose que les k relations données ne contiennent qu'un des deux éléments l_k ou λ_k. Au lieu d'un connexe, on a alors un lieu de points ou une enveloppe de droites,

dont l'énoncé précédent fournit l'ordre ou la classe. C'est, comme on le voit, la formule de M. Fouret généralisée ([1]).

J'envisage maintenant ce cas spécial où la droite λ_k ne figure pas dans les k relations données, et où l'on supprime φ_k; et je vais traiter une nouvelle question à ce sujet.

Soient données k relations entre un point l et $(k-1)$ couples $(l_i \lambda_i)$. Soient, d'autre part, $(k-1)$ courbes φ_i, relativement auxquelles on astreint les couples (l_i, λ_i) aux mêmes conditions que précédemment. Le point l décrit un lieu dont nous venons de trouver l'ordre. On demande la classe de ce lieu.

Il est un cas où la réponse est immédiate : *Si la détermination de la tangente au lieu du point l n'exige pas la connaissance des éléments du second ordre des courbes φ, la classe du lieu est encore égale au produit symbolique des $(k-1)$ facteurs $(P_i n_i + D_i m_i)$, grâce à une convention analogue aux précédentes.* Ceci s'applique notamment au lieu considéré par M. Fouret.

En général, cette simplification ne se présente pas. Alors la connaissance des ordres et des classes des courbes φ ne suffit pas. En m'appuyant sur un théorème que j'ai démontré dans un Mémoire publié récemment (*Journal de Mathématiques*, 3e série, t. II, p. 277 [*Œuvres d'Halphen*, t. I, p. 494]), j'ai trouvé la solution suivante :

Soient r, s le nombre des rebroussements et des inflexions ordinaires par lesquels sont représentées dans les équations de Plücker les singularités de la courbe φ d'ordre m et de classe n, et désignons par $2q$ les deux nombres égaux $(3n+r)$ et $(3m+s)$.

La classe du lieu du point l est symboliquement égale au produit des $(k-1)$ facteurs $\frac{1}{3}(C_i q_i - P_i r_i - D_i s_i)$, où chaque produit de $(k-1)$ lettres C, P, D doit être remplacé par la classe du lieu obtenu en supposant que les courbes φ correspondantes sont des coniques, des points et des droites.

J'ajoute qu'un produit symbolique de cette dernière forme représente aussi l'ordre d'un point lié par k relations aux points de $(k-1)$ courbes, aux tangentes et aux courbures de ces courbes en ces points.

([1]) M. Fouret a omis les indices des lettres P, D. Cette omission n'est permise que si les k relations sont symétriques par rapport aux $(k-1)$ couples $(l_i \lambda_i)$.

SUR UNE PROPOSITION GÉNÉRALE

DE LA

THÉORIE DES CONIQUES.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 83, 1876, p. 791.

Voici la proposition [1] dont il s'agit :

Théorème I. — *Si, entre deux coniques situées dans un même plan, il existe une relation projective, ne dépendant d'aucune autre figure, la relation corrélative existe aussi entre ces deux coniques prises en ordre inverse.*

C'est une conséquence immédiate d'une proposition d'Algèbre : *Tout invariant de deux formes quadratiques ternaires est une fonction rationnelle de quatre invariants distincts.* Pour le montrer, je suppose deux formes quadratiques a, a'. Je considère en même temps les formes *adjointes* (*zugehörige*) α, α'. Je désigne, suivant la notation de M. Aronhold, par a_{ij}, α_{ij}, ... les coefficients de ces formes. On sait que les quatre invariants distincts de a, a' sont les deux discriminants D, D', et les deux suivants :

$$\mathrm{T} = \Sigma a'_{ij}\alpha_{ij}, \qquad \mathrm{T}' = \Sigma a_{ij}\alpha'_{ij}.$$

Si l'on forme les mêmes invariants Δ, Δ', Θ, Θ' pour les formes adjointes α, α', on trouve les relations

$$(1) \qquad \Delta = \mathrm{D}^2, \qquad \Delta' = \mathrm{D}'^2, \qquad \Theta = \mathrm{DT}', \qquad \Theta' = \mathrm{D'T}.$$

(1) Cette proposition est contenue dans le théorème de Steiner sur la polarité réciproque de deux coniques quelconques (*Journal de Crelle*, t. 32, 1846, p. 79); *Vorlesungen über synth. Geometrie*, bearb. v. Schröter, 1847, p. 417 et ss.).

(*Note des éditeurs.*)

Soit G un invariant entier des formes a, a', homogène et de degré c par rapport aux coefficients de a, homogène et de degré c' par rapport aux coefficients de a'. Je prends un terme quelconque de G,

$$L = D^m T^n T'^{n'} D'^{m'}.$$

Entre les exposants ont lieu les relations suivantes :

$$3m + 2n + n' = c, \qquad 3m' + 2n' + n = c',$$

et j'en déduis

$$(2) \qquad 2m + n = \frac{1}{3}(2c - c') + m', \qquad 2m' + n' = \frac{1}{3}(2c' - c) + m.$$

Dans L, je remplace les coefficients de a, a' respectivement par les coefficients correspondants de α, α'. D'après les relations (1) et (2), L se change en

$$\Lambda = D^{\frac{1}{3}(2c-c')} D'^{\frac{1}{3}(2c'-c)} D^{m'} T^{n'} T'^{n} D'^{m} = D^{\frac{1}{3}(2c-c')} D'^{\frac{1}{3}(2c'-c)} L'.$$

L' ne diffère de L que par la transposition de m, m' et de n, n', c'est-à-dire par l'échange des formes a, a'. Ce résultat s'applique à tous les termes dont la somme constitue G. Donc, si dans G on remplace les formes a, a' par leurs adjointes, G se change, à un facteur près, en l'invariant G' qu'on obtient en échangeant, dans G, les formes a, a'. Donc, *si deux formes quadratiques satisfont à une relation invariante, les formes adjointes, prises en ordre inverse, y satisfont aussi.* En langage géométrique : *si la figure formée de deux coniques dans un plan satisfait à une relation projective, la figure corrélative satisfait à la même relation, les coniques y étant prises dans l'ordre inverse*. C'est, sous une autre forme, le théorème I.

Dans l'énoncé algébrique, j'ai dit *formes quadratiques* et non *formes quadratiques ternaires*, attendu que la proposition s'applique également, quel que soit le nombre des variables. En conséquence, *le théorème I s'applique aussi à deux surfaces du second ordre.*

Comme conséquence du théorème I, je signalerai la proposition suivante :

Théorème II. — *Le rapport anharmonique des quatre points d'intersection de deux coniques, considérés sur l'une d'elles, est égal au rapport anharmonique des quatre tangentes communes, considérées sur l'autre.*

Cette dernière proposition peut, sans difficulté, être démontrée directement ; et, cela fait, on en peut déduire une démonstration géométrique du théorème I, comme il suit :

Soient a, a' et b, b' deux couples de coniques telles que les rapports anharmoniques des points d'intersection de a et a' considérés successivement sur a et sur a' soient respectivement les mêmes que ceux des points d'intersection de b et b', considérés sur b et sur b'. Il est aisé de voir que la figure b, b' est une transformée homographique de la figure a, a'. Donc les deux rapports anharmoniques h, h', déterminés sur a et a' par les points d'intersection de ces coniques, caractérisent complètement l'ensemble des transformées homographiques de la figure a, a'. Donc toute relation projective à laquelle satisfait la figure a, a' s'exprime par une relation entre h et h'. Si α, α' est une figure corrélative de a, a', les nombres h et h' sont, d'après le théorème II, les rapports anharmoniques des points d'intersection de α, α' considérés sur α' et sur α. Donc les coniques α' et α satisfont à la même relation que les coniques a, a'. D'où le théorème I.

Voici quelques cas particuliers de ce théorème :

Théorème III. — *Si l'on peut inscrire dans une conique* A *des triangles conjugués par rapport à une autre conique* A', *on peut circonscrire à* A' *des triangles conjugués par rapport à* A; théorème dû à M. Smith.

Théorème IV. — *Aux points d'intersection de deux coniques* A, A' *on mène les tangentes de* A. *Ces droites rencontrent de nouveau* A' *en quatre points* m. *Par les points de contact de* A' *avec les tangentes communes de* A, A', *on mène les secondes tangentes à* A. *Le rapport anharmonique de ces quatre tangentes de* A *est égal à celui des quatre points* m *de* A'.

Théorème V. — *Si la tangente de* A *en un point commun à* A, A' *rencontre de nouveau* A' *en un point par où passe la tangente de* A *en un second point commun aux deux coniques, la seconde tangente menée à* A *par le point de contact de* A' *et d'une tangente commune rencontre de nouveau* A' *au point de contact d'une*

seconde tangente commune. C'est ce qui a lieu lorsqu'on peut inscrire dans A′ des quadrilatères circonscrits à A.

Théorème VI. — *Si deux cordes communes conjuguées de* A *et* A′ *ont même pôle, l'une par rapport à* A, *l'autre par rapport à* A′, *les huit points de contact de* A *et de* A′ *avec leurs tangentes communes sont distribués sur deux lignes droites*, etc.

SUR LES

CARACTÉRISTIQUES DES SYSTÈMES DE CONIQUES

ET DE

SURFACES DU SECOND ORDRE.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 83, 1876, p. 886.

Dans une Note récente (¹), j'ai indiqué des cas d'exception au théorème de M. Chasles concernant le nombre des coniques d'un système qui satisfont à une condition. Le problème qui consiste à déterminer ce nombre est résolu, d'une manière générale, dans le Mémoire que je soumets aujourd'hui à l'Académie. Pour faire aisément saisir la signification exacte des résultats acquis antérieurement et de la solution nouvelle, je ferai un rapprochement entre ce problème et un autre d'une nature plus simple.

Pour déterminer le nombre des points d'une courbe algébrique plane qui satisfont à une condition donnée, par exemple le nombre des sommets, des points sextactiques, etc., on fait habituellement passer la solution du problème par trois phases successives, en qualifiant d'abord la courbe par son ordre, puis par son ordre et des singularités ordinaires, enfin par son ordre et des singularités quelconques. C'est par les mêmes phases qu'a passé la solution du problème concernant les coniques, ainsi que je vais l'expliquer.

Un système de coniques peut contenir des figures singulières de trois espèces distinctes : 1° le point avec deux droites passant en ce point ; 2° la droite avec deux points situés sur cette droite ; 3° la droite avec un seul point. Je désigne, pour abréger, ces singularités

(¹) *Comptes rendus*, t. 83, 1876, p. 537. [*Œuvres d'Halphen,* t. I, p. 543.]

par les lettres A, A′, B. La première A n'est qu'une singularité tangentielle, comme sur les courbes, les inflexions et les tangentes doubles. La seconde A′ est la corrélative de A. Les singularités A et A′ sont *ordinaires ;* la troisième B est une singularité *élevée*. Cela posé, je démontre que :

Théorème I. — *Si un système ne contient que la singularité A, le nombre des coniques de ce système qui satisfont à une condition quelconque est le produit de deux nombres, dont l'un ne dépend que du système, l'autre que de la condition.* C'est le résultat trouvé par M. de Jonquières.

Théorème II. — *Si un système ne contient que les singularités ordinaires, le nombre des coniques de ce système qui satisfont à une condition quelconque est* $\alpha\mu + \beta\nu$, μ *et* ν *étant les caractéristiques du système, et* α, β *des nombres ne dépendant que de la condition.*

Si le système contient la singularité B, ce dernier théorème ne s'applique plus, à moins que la condition ne soit soumise à son tour à des restrictions. A cet égard, je démontre les deux propositions suivantes :

Théorème III. — *Si, pour une condition donnée* Φ, *le nombre* β (défini au théorème II) *est nul, le nombre des coniques d'un système* quelconque *qui satisfont à la condition* Φ *est égal à* $\alpha\mu$.

Théorème IV. — *Pour que le nombre des coniques satisfaisant à une condition donnée* Φ, *et faisant partie d'un système* quelconque (μ, ν), *soit égal à* $\alpha\mu + \beta\nu$ (α et β étant définis par le théorème II), *il faut et il suffit que le nombre des coniques satisfaisant à la condition* Φ *et ayant, en un point donné, des contacts du troisième ordre avec une courbe donnée, soit égal à* $\alpha + \beta$.

Dans tous les autres cas, le résultat est d'une forme beaucoup plus compliquée. On peut cependant en obtenir une *image*, grâce à l'artifice suivant :

Tous les éléments utiles, relatifs à un système, se trouvent représentés dans une courbe qu'on peut dire *attachée* au système. Je la préciserai plus loin, et je me borne, pour le moment, à dire qu'elle

est donnée par une équation en coordonnées rectilignes, et qu'elle passe à l'origine des coordonnées dans le seul cas où le système contient la singularité B. De même aussi, les éléments utiles, relatifs à une condition, sont représentés dans une courbe *attachée* à la condition. Cela étant, j'obtiens ce théorème :

Théorème V. — *Le nombre des coniques satisfaisant à une condition* (α, β) *et faisant partie d'un système* (μ, ν) *est inférieur à* $\alpha\mu + \beta\nu$, *et en diffère d'un nombre égal à celui des points qu'ont en commun, à l'origine des coordonnées, la courbe attachée au système et la courbe attachée à la condition.*

Cet énoncé met en évidence que les courbes *attachées* n'interviennent pas autrement que par leur forme aux environs d'un point, ordinairement singulier sur chacune d'elles. On conçoit donc qu'une infinité de courbes puissent être prises pour attachées à un système ou à une condition, par exemple :

Pour courbe attachée à un système, on peut prendre le lieu du point dont l'abscisse est proportionnelle au carré du sinus de l'angle des tangentes menées à une conique du système par un point fixe, et l'ordonnée au carré du segment que cette même conique intercepte sur une droite fixe.

Pour courbe attachée à une condition Φ, *on peut prendre la suivante : Supposez une conique conjuguée par rapport à un triangle abc, et soient m un des points où elle rencontre bc, n un de ceux où elle rencontre ab. Pour cette conique, la condition* Φ *peut s'exprimer par une relation* $\varphi(x, y) = 0$ *entre*

$$y = \left(\frac{mb}{mc}\right)^2, \qquad x = \left(\frac{na}{nb}\right)^2.$$

La courbe $\varphi(x, y) = 0$ *est* attachée *à la condition* Φ.

Je donne, dans mon Mémoire, un assez grand nombre d'exemples nouveaux des théorèmes III, IV, V ; je citerai ici les suivants :

Le nombre des coniques d'un système (μ, ν), *telles qu'on y puisse inscrire des triangles circonscrits à une conique donnée, est égal à* 2μ. *Avec des quadrilatères, le résultat est* 3μ.

Le nombre des coniques d'un système (μ, ν), *telles que les huit*

points de contact des tangentes communes à l'une quelconque d'entre elles et à une conique fixe soient distribués sur deux lignes droites, est égal à $\mu+\nu$.

Le nombre des coniques d'un système (μ, ν), *qui partagent une conique donnée dans un rapport anharmonique égal à celui dans lequel elles sont partagées elles-mêmes par une autre conique donnée, est égal à* $6(\mu+\nu)-2\omega$, ω *étant l'ordre de multiplicité de l'origine des coordonnées sur la courbe attachée au système* (¹).

Pour les surfaces du second ordre, j'obtiens des résultats analogues, au moyen d'une courbe gauche et d'une surface attachées respectivement au système et à la condition.

(¹) Dans un Mémoire ultérieur : *Sur la Théorie des caractéristiques pour les coniques* (*Proceedings of the London mathematical Society*, vol. IX, nᵒˢ 133 et 134; *Mathematiche Annalen*, t. XV, p. 16; *Œuvres d'Halphen*, t. II, p. 1), Halphen indique dans une Note (n° 25) que ce résultat doit être multiplié par 2.

(*Note des éditeurs.*)

SUR LES CORRESPONDANCES

ENTRE LES

POINTS DE DEUX COURBES.

Bulletin de la Société mathématique de France, t. V, 1875-1876, p. 7.

1. Dans ma Note *Sur la conservation du genre* (¹), j'ai montré d'une manière directe que, si deux courbes se correspondent *point par point*, elles sont du même genre. L'analyse employée m'a conduit en même temps à une relation plus générale qui a lieu entre deux courbes, lorsqu'à un point de l'une correspond un point de l'autre, et à un point de la seconde *plusieurs* points de la première. M. Zeuthen était antérieurement parvenu, pour le cas où les courbes ne possèdent que des singularités ordinaires, à une relation plus générale concernant les correspondances quelconques (²). Cette relation s'étend avec facilité au cas où les courbes possèdent des singularités élevées. L'importance de ce sujet au point de vue des applications me détermine à y revenir. L'objet de cette Note est donc de démontrer le théorème de M. Zeuthen, étendu comme je viens de le dire, et d'en donner des applications.

2. Dans ma Note précitée, j'ai envisagé deux courbes S, Σ, telles qu'à un point a de S corresponde un point α de Σ, et qu'à un point α de Σ correspondent k points a de S. Pour passer de là à une correspondance quelconque entre deux courbes Σ, Σ′, il suffit de concevoir

(¹) *Bulletin de la Société mathématique*, t. IV, 1875-1876, p. 29. [*Œuvres d'Halphen*, t. I, p. 377.]
(²) *Mathematische Annalen*, t. III, 1871, p. 150.

une courbe S à chaque point de laquelle corresponde un seul couple de points correspondants α, α' de Σ et Σ'. La courbe S peut être réalisée d'une infinité de manières, et il est inutile d'insister sur ce point. Grâce à l'intermédiaire de cette courbe S, on peut étendre, d'une manière utile, les théorèmes I et II de ma Note précitée ([1]).

Soient (S), (Σ), (Σ') trois systèmes circulaires de branches, se correspondant sur les trois courbes, et n, ν, ν' leurs ordres respectifs de multiplicité. Je suppose qu'à un point de (Σ) répondent g points de (S). D'après le théorème I, à un point a pris sur (S) à distance infiniment petite d'ordre n de l'origine de (S), répond sur (Σ) un point α à distance infiniment petite d'ordre $\sigma = g\nu$ de l'origine de (Σ). Soit g' le nombre analogue à g pour (Σ'); alors à a répond sur (Σ') un point dont la distance à l'origine de (Σ') est infiniment petite de l'ordre $\sigma' = g'\nu'$.

De là résulte, en changeant les notations :

Théorème I. — *Si entre les points de deux courbes* S, S' *existe une correspondance quelconque, et que* (S), (S') *soient des systèmes circulaires de branches se correspondant, dont les ordres de multiplicité soient respectivement n, n'; si à un point de* (S) *correspondent g points de* (S'), *et à un point de* (S') *g' points de* (S), *à un point placé sur* (S) *à distance infiniment petite d'ordre gn de l'origine de* (S) *correspondent sur* (S') *des points à distance infiniment petite d'ordre $g'n'$ de l'origine de* (S').

3. Reprenons les trois courbes S, Σ, Σ', et appliquons l'équation (16) (n° 6) du Tome IV aux couples S, Σ et S, Σ'. Nous obtenons

$$k(\gamma - 2\mu) + \Sigma\sigma = c - 2m + \Sigma n = k'(\gamma' - 2\mu') + \Sigma\sigma'.$$

Je change, comme précédemment, les notations, je remplace σ et σ' par leurs valeurs, et j'ai la proposition suivante :

Théorème II. — *Soient deux courbes* S, S' *telles qu'à un point de* S *correspondent k points de* S', *et à un point de* S', *k' points de* S. *Si l'on désigne par m, m' les ordres et par c, c' les classes de* S

([1]) *Bulletin de la Société mathématique*, t. IV, 1875-1876, p. 32. [*Œuvres d'Halphen*, t. I, p. 380.]

et de S′, *et par* g, n, g', n' *les mêmes nombres qu'au théorème I, on a*

$$(1) \qquad k(c-2m)-k'(c'-2m')=\Sigma(g'n'-gn),$$

la sommation s'étendant à tous les couples (S), (S′) *pour lesquels* $(g'n'-gn)$ *est différent de zéro.*

Dans la sommation, on peut, sans troubler l'égalité, introduire tant d'autres couples (S), (S′) qu'on voudra, pourvu qu'on n'omette aucun des précédents. J'écris (1) sous la forme

$$k(c-2m)-k'(c'-2m')+\Sigma g(n-1)-\Sigma g'(n'-1)=\Sigma(g'-g).$$

Pour évaluer séparément $\Sigma g(n-1)$, je puis, d'après la remarque précédente, adjoindre à chaque (S) tous les correspondants (S′) et par suite écrire

$$\Sigma g(n-1)=k\Sigma(n-1).$$

La même remarque s'applique à la somme suivante; j'ai donc

$$k[c-2m+\Sigma(n-1)]-k'[c'-2m'+\Sigma(n'-1)]=\Sigma(g'-g),$$

et, en désignant par p et p' les genres de S et S′,

$$(2) \qquad 2k(p-1)-2k'(p'-1)=\Sigma(g'-g).$$

C'est une autre forme de la relation (1), qu'on peut exprimer en disant :

Si a et a' sont deux points correspondants sur S *et* S′ *et qu'à un point infiniment voisin de a répondent g points infiniment voisins de a', et à un point infiniment voisin de a', g' points infiniment voisins de a; si, en outre, p et p' sont les genres des courbes* S, S′, *la relation* (2) *a lieu, le signe sommatoire s'étendant à tous les couples a, a', pour lesquels $(g'-g)$ est différent de zéro.*

C'est précisément sous cette forme que M. Zeuthen a énoncé la proposition, en la limitant au cas où les courbes S et S′ n'ont que des singularités ordinaires. Mais de ce cas particulier on peut remonter au cas général. Tous les éléments qui figurent dans (2) se conservent dans les transformations uniformes. Or on sait qu'il est possible de trouver une courbe correspondant point par point à

une courbe quelconque et qui n'ait que des singularités ordinaires. On peut même faire en sorte que la transformée n'ait que des branches simples, ainsi que je l'ai démontré de diverses manières. Donc la relation (2), démontrée pour le cas des singularités ordinaires, s'étend d'elle-même au cas général.

4. Si l'on considère deux courbes gauches dont S et S' soient les perspectives, tous les éléments ci-dessus considérés sur les courbes ou sur les perspectives ont, dans l'un et l'autre cas, les mêmes définitions. Donc :

Les théorèmes I et II s'appliquent aussi au cas où les courbes S *et* S' *sont gauches.*

Autre remarque : dans les démonstrations de ma Note *sur la conservation du genre*, et dans les déductions actuelles, rien n'empêche de supposer que les courbes S et S' soient égales. Donc :

Les théorèmes I et II s'appliquent aussi au cas où les courbes S *et* S' *coïncident.* Dans ce cas, où, bien entendu, la courbe peut être gauche, la formule (1) devient

$$(3)\qquad (k-k')(c-2m)=\Sigma(g'n'-gn).$$

5. Soient deux courbes algébriques planes ou gauches S, S' et un système de surfaces A. On peut faire correspondre les points a et a' de S, S', par la condition que les points correspondants a, a' soient sur une même surface A. Appliquant alors à cette correspondance le théorème II, on trouvera que : *le nombre des surfaces d'un système qui touchent une courbe gauche de degré m, arête de rebroussement d'une développable de degré c, est égal à* $m\nu+c\mu$, μ *étant le nombre des surfaces du système qui passent par un point, et* ν *le nombre de celles qui touchent une droite*, théorème bien connu et qui a été démontré de diverses autres manières. Je n'insiste pas ici sur cette application, à cause de l'analogie qu'elle présente avec celle que je vais faire en détail. J'y aurai recours à ce théorème même, restreint au cas où la courbe est plane, mais entendu, d'autre part, d'une manière un peu plus générale, savoir :

Théorème III. — *Le nombre des éléments d'un connexe plan*

qui sont composés d'un point d'une courbe et de la tangente en ce point, est égal au produit des ordres de la courbe et du connexe augmenté du produit de leurs classes.

Je donnerai d'ailleurs, à la fin de cette Note, une démonstration directe d'un théorème un peu plus étendu que le théorème III. Pour le moment, j'en admettrai l'exactitude.

6. On donne une série doublement infinie (A) de courbes A dans un plan, et deux courbes de ce plan S, S'. Je fais correspondre les points a, a' de S, S', par la condition qu'une courbe A touche S en a et passe en a'. Je forme alors l'équation (1).

Soit ρ le nombre des courbes A qui passent en un point et y touchent une droite. Désignant par M le degré de A, j'ai $k = \rho M m'$.

Soit μ le nombre des courbes A qui passent par deux points, et soit ν le nombre de celles qui passent par un point et touchent une droite. D'après le théorème III, j'ai

$$k' = m\nu + c\mu.$$

Il s'agit maintenant de déterminer le second membre de (1), c'est-à-dire de chercher tous les binomes $(g'n' - gn)$ qui ne sont pas nuls. A cet effet, je considère deux divisions principales, savoir : B($n = n' = 1$; g ou g' *supérieur à l'unité*) et C (n ou n' *supérieur à l'unité*). J'envisage d'abord les cas B.

Je suppose que a, a' soient deux points simples correspondants et que g soit supérieur à l'unité. Il peut arriver que, parmi les ρ courbes A qui touchent S en a, quelques-unes soient confondues en une seule. Si ce fait n'a pas lieu, quelques-unes des courbes A peuvent être réduites à des courbes plus simples comptant plusieurs fois dans le degré de A. Enfin les courbes A peuvent ne présenter aucune de ces particularités; c'est qu'alors une d'elles est tangente à S' en a'. Je réunis les deux premières circonstances en admettant que, parmi les ρ courbes A touchant S en a, il y en ait h qui se réunissent en une seule, composée elle-même de différentes courbes A_i dont l'ordre M_i compte s_i fois dans M.

Si l'on suppose la courbe S placée d'une manière arbitraire dans le plan de (A), cette circonstance ne peut se présenter que si elle a lieu pour chaque point l du plan, sous la condition qu'on adjoigne

à ce point une droite déterminée λ. On doit donc supposer que cette décomposition des courbes A a lieu toutes les fois que le point l par où on les fait passer et la droite λ qu'on leur assigne pour tangente en ce point font partie d'un certain connexe. Soient alors ν'' et μ'' l'ordre et la classe de ce connexe. Le nombre des points a de S où cette circonstance se présente est, d'après le théorème III, $m\nu'' + c\mu''$. On a alors

$$n = n' = 1, \qquad g = hs_i, \qquad g' = 1, \qquad n'g' - ng = -(hs_i - 1).$$

La courbe A_i donne lieu à $M_i m'$ points analogues a'. On a ensuite à envisager les autres courbes qui s'adjoignent à A_i pour former une courbe A. Il peut y avoir, en outre, d'autres décompositions analogues. On voit que la somme de tous les binomes $(g'n' - gn)$ qui y sont relatifs est de la forme

$$\Sigma_1 = -(m\nu_1 + c\mu_1)m',$$

ν_1 et μ_1 étant des nombres qui ne dépendent que de (A).

Le second cas où, n et n' étant égaux à l'unité, g est supérieur à l'unité est celui où A touche S et S'. Le contact avec S' est alors du premier ordre, si l'on suppose les courbes S et S' placées d'une manière arbitraire. Chacun de ces contacts donne

$$n = n' = 1, \qquad g = 2, \qquad g' = 1, \qquad n'g' - ng = -1.$$

Le théorème III fournit le nombre de ces contacts, qui est celui des courbes A touchant S et S'. D'où, pour la somme des binomes $(g'n' - gn)$, l'élément

$$\Sigma_2 = -[mm'\mu' + (mc' + m'c)\nu + cc'\mu],$$

formule dans laquelle μ' désigne le nombre des courbes A qui touchent deux droites. Cette formule, je le répète, est une conséquence facile et connue du théorème III.

Dans la division B, j'ai à considérer maintenant le cas où g' diffère de l'unité. Ce cas s'offre ou bien si le système des courbes A passant en a' présente une décomposition analogue à la précédente, ou bien si A a, avec S, un contact du second ordre. Pour le cas de décomposition, on a une somme d'éléments

$$\Sigma_3 = (m\nu_2 + c\mu_2)m',$$

qu'on trouve en raisonnant comme ci-dessus. Tout d'abord, la décomposition étant supposée avoir lieu en a', les éléments de la somme relatifs à a' sont d'une forme telle que $(m\nu_2 + c\mu_2)$. Secondement, pour que cette décomposition ait lieu en a', il faut qu'il y ait, dans le plan, un lieu de points où elle se produise; d'où le facteur m' dans l'expression de Σ_3.

Enfin, si l'on désigne par N le nombre des courbes A ayant avec S des contacts du second ordre, le second cas donne lieu à l'élément suivant de la somme cherchée :

$$\Sigma_4 = \mathrm{M}\, m' \mathrm{N}.$$

J'arrive maintenant à la division C, relative aux cas où les nombres n, n' sont différents de l'unité. A ces cas ne répond aucune des décompositions ci-dessus; en outre, un seul des nombres n, n' est supérieur à l'unité. Les hypothèses contraires répondraient à des positions particulières des courbes S, S'. Soit donc d'abord $n' > 1$. On a alors

$$n = 1, \qquad g = n', \qquad n' > 1, \qquad g' = 1, \qquad n'g' - ng = 0.$$

Ainsi ce cas ne donne lieu à aucun élément de la somme cherchée. Soit enfin $n > 1$. Ici g est l'unité; il faut déterminer g'. C'est à quoi on peut utilement employer le théorème I. Soient a, a' les points considérés sur S et S'. Si, sur une des branches de (S), système circulaire dont l'origine est en a, on prend un point a_1, à distance infiniment petite d'ordre n de a, il y correspond un point a'_1, dont l'ordre infinitésimal de la distance à a' est égal à g'. Par suite, g' est égal à l'ordre de la variation de la courbe A quand on passe de a à a_1. Soit ν l'ordre infinitésimal de l'angle dont la tangente de S a tourné quand on passe de a en a_1. La variation de la courbe A a pour ordre le plus petit des deux nombres ν, n. Donc g' est le plus petit de ces deux nombres; d'où résulte aisément ce dernier élément de la somme cherchée :

$$\Sigma_5 = -\rho \mathrm{M}\, m' \Sigma(n - \nu) = -\rho \mathrm{M}\, m' r,$$

le nombre r représentant la somme des nombres $(n - \nu)$ relatifs à tous les systèmes circulaires de branches de S pour lesquels ν est inférieur à n. Ce nombre r est donc ce que j'appelle le nombre des *inflexions effectives* des courbes corrélatives de S ; c'est aussi le

nombre des rebroussements ordinaires qui remplacent les singularités de la courbe S dans les équations de *Plücker*.

J'ai maintenant tous les éléments de l'équation (1) et je puis la former. On voit aisément que les termes contenant c' en facteur disparaissent, et que m' se trouve alors en facteur commun. Ce facteur supprimé, il ne reste plus aucun élément de la courbe S', et l'on obtient une relation de la forme

$$N = \alpha c + \beta m + \rho r, \tag{4}$$

où α, β, ainsi que ρ, ne dépendent que de la série (A). La formule (4) donne le nombre des courbes A qui ont des contacts du second ordre avec la courbe S. C'est celle que j'ai obtenue par une voie toute différente dans un autre travail, et à un point de vue un peu plus étendu ([1]). La formule elle-même fixe le sens des lettres α, β; quant à ρ, sa signification est déjà connue. De là l'énoncé suivant :

Théorème IV. — *Soit une série doublement infinie de courbes algébriques* A *dans un plan, et telle que* β *soit le nombre de ces courbes qui ont une droite pour tangente d'inflexion,* ρ *le nombre de celles qui passent par un point et y touchent une droite,* $(\alpha-3\rho)$ *le nombre de celles qui ont un point donné pour point de rebroussement : le nombre des courbes* A *qui ont un contact du second ordre avec une courbe donnée est* $(\alpha c + \beta m + \rho r)$, c *et* m *étant la classe et l'ordre de cette courbe, et* r *le nombre des rebroussements ordinaires qui représentent ses singularités dans les équations de Plücker.*

En désignant par s le nombre corrélatif de r, c'est-à-dire le nombre des inflexions qui représentent les singularités de S dans les équations de Plücker, et posant

$$2q = r + 3c = s + 3m,$$

mettant en outre les lettres P, D, initiales de *point* et *droite*, au lieu de $(\alpha - 3\rho)$ et β, et désignant par C le nombre des courbes A

([1]) Mémoire *Sur la recherche des points d'une courbe*, etc. (*Journal de Mathématiques*, 3e série, t. II, p. 277). [*Œuvres d'Halphen*, t. I, p. 494.]

qui ont des contacts du second ordre avec une conique, on peut mettre la relation (4) sous la forme

$$N = \frac{1}{3}(q\,C - r\,P - s\,D).$$

C'est sous cette forme que j'ai employé la relation (4) dans ma Note *Sur les degrés et les classes de certains lieux géométriques* (¹).

7. Au moyen de la même série (A) on peut faire correspondre de la même manière les points d'une même courbe S. Grâce à la formule (3) et au résultat précédent, on pourra ainsi calculer le nombre des courbes A qui touchent en deux points différents la courbe S. Je me borne à cette indication, la formule à laquelle on parvient étant, dans sa généralité, trop compliquée pour être utile. J'arrête ici ce qui concerne les applications de la formule de M. Zeuthen, et je vais donner une démonstration directe d'un théorème comprenant la proposition III, ainsi que je l'ai annoncé.

8. Soient, dans un plan, deux courbes S, S′ entre les points desquelles existe comme ci-dessus une correspondance (k, k'). On considère un *connexe* C du même plan, c'est-à-dire une série triplement infinie de couples, composés chacun d'un point l et d'une droite λ. Si l'on se donne λ, l décrit une courbe dont l'ordre est celui du connexe; je le désigne par ν. Si l'on se donne l, λ enveloppe une courbe dont la classe est celle du connexe; je la désigne par μ. Je vais chercher le nombre des éléments (l, λ) du connexe, qui sont composés d'un point a de S et de la tangente α' en un point a' de S′, correspondant à a.

A chaque point a' correspondent divers points a. A chacun de ces points a correspondent, dans le connexe, diverses droites α passant par a'. L'ensemble de ces droites enveloppe une courbe dont je désigne par ω la classe. Je fais correspondre, sur une droite arbitraire L, les points A où L est rencontrée par les droites α, avec les points A′ où L est rencontrée par la tangente α' en a'. Au point A correspondent ω points A′, et au point A′ correspondent $k'c'\mu$ points A.

(¹) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 83, 1876, p. 705. [*Œuvres d'Halphen*, t. I, p. 546.]

On a donc $\omega + k'c'\mu$ coïncidences, parmi lesquelles chaque point a' situé sur L en entraîne $k'\mu$. Il reste donc pour le nombre des points cherchés

$$N = \omega + c'k'\mu - m'k'\mu.$$

Il reste à déterminer ω. Soit p un point arbitraire : pour chaque droite B menée par p, je détermine les points a qui lui correspondent dans le connexe et qui sont situés sur S. Je prends les points a' correspondants sur S', et je les joins à p par des droites B'. Je considère B et B' comme des droites correspondantes de deux faisceaux issus de p. Les coïncidences répondent aux tangentes menées de p à l'enveloppe des droites α; leur nombre est donc ω.

A une droite B répondent $m\nu$ points a et par suite $mk\nu$ droites B'. A une droite B' répondent m' points a', $m'k'$ points a, $m'k'\mu$ droites B; donc

$$(5) \qquad \begin{cases} \omega = mk\nu + m'k'\mu, \\ N = c'k'\mu + mk\nu. \end{cases}$$

Théorème V. — *Si entre deux courbes* S, S' *a lieu la correspondance définie au théorème II, le nombre des éléments d'un connexe d'ordre* ν *et de classe* μ, *qui sont composés d'un point de* S *et d'une tangente correspondante de* S', *est égal à* $c'k'\mu + mk\nu$.

Si S et S' coïncident, k et k' sont égaux à l'unité, et l'on obtient comme corollaire le théorème III.

9. La conception du couple (l, λ) comme élément du plan donne lieu à celle des trois êtres géométriques : *connexe* triplement infini; *coïncidence* doublement infinie; *couple de courbes* simplement infini. A la proposition qui, dans la Géométrie plane ordinaire, fournit le nombre des points d'intersection de deux courbes, répondent ici deux propositions : la première donne le nombre des intersections d'un connexe avec un couple de courbes : c'est le théorème V. La seconde donne le nombre des intersections de deux coïncidences. Cette seconde proposition se déduit immédiatement du théorème suivant établi par M. Zeuthen [1] :

Soit donnée dans un plan une correspondance telle :

---

[1] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 78, 1874, p. 1553.

1° *Qu'à un point quelconque* X *correspondent* α' *points* X', *et à un point* X', α *points* X;

2° *Que le lieu des points* X *ou* X' *dont les homologues se trouvent sur une droite donnée soit une courbe d'ordre* β.

Alors il existe dans le plan $\alpha + \alpha' + \beta$ *points où deux points homologues* X *et* X' *coïncident.*

Soit G une coïncidence, c'est-à-dire une série doublement infinie de couples (l, λ), telle qu'à une droite λ correspondent c points l et à un point l, γ droites λ et, en outre, que h soit le nombre des couples (l, λ) dans lesquels l est sur une droite donnée et λ passe par un point donné. Je considère une seconde coïncidence analogue G', et je désigne par c', γ', h' les nombres analogues. Je fais correspondre les points l et l' par la condition que les droites correspondantes λ, λ' coïncident. Si alors l et l' coïncident en même temps, j'obtiens une intersection des deux figures G, G'. Il suffit donc d'appliquer ici la proposition de M. Zeuthen. On a évidemment

$$\alpha' = c'\gamma, \qquad \alpha = c\gamma', \qquad \beta = hh';$$

d'où, pour le nombre des intersections de G et G',

$$\text{(6)} \qquad N = c\gamma' + hh' + c'\gamma.$$

Les deux formules (5) et (6) se confondent dans un seul énoncé si l'on emploie les notations symboliques que j'ai introduites dans cet ordre de recherches et que M. Schubert a employées avec tant de succès ([1]).

Par la lettre D j'indique la condition, pour le point l, d'être situé sur une droite donnée et, par la lettre P, la condition, pour la droite λ, de passer par un point. Par D^2P^2 on indique alors le nombre des couples (l, λ) tels que l soit l'intersection de deux droites données, c'est-à-dire un point donné, et que λ soit une droite donnée. Ainsi le symbole D^2P^2 est égal à l'unité; les autres symboles du quatrième ordre sont nuls. Cela posé, j'appelle *modules* d'un connexe

---

([1]) Notamment dans son Mémoire : *Beiträge zur abzählenden Geometrie* (*Math. Annalen*, t. X, 1876, p. 1).

et d'un couple de courbes, les quantités

$$(\mu P + \nu D), \quad PD(c'k'D + mkP),$$

et *module* d'une coïncidence, la quantité

$$\gamma P^2 + hPD + cD^2.$$

On peut alors énoncer les formules (5) et (6) en disant que *l'ensemble des éléments* (l, λ) *défini par i équations* $(i = 1, 2, 3)$ *est représenté par un module, qui est une fonction homogène et d'ordre i des symboles* P, D. *Le nombre des intersections de deux pareils êtres est égal au produit symbolique de leurs modules.*

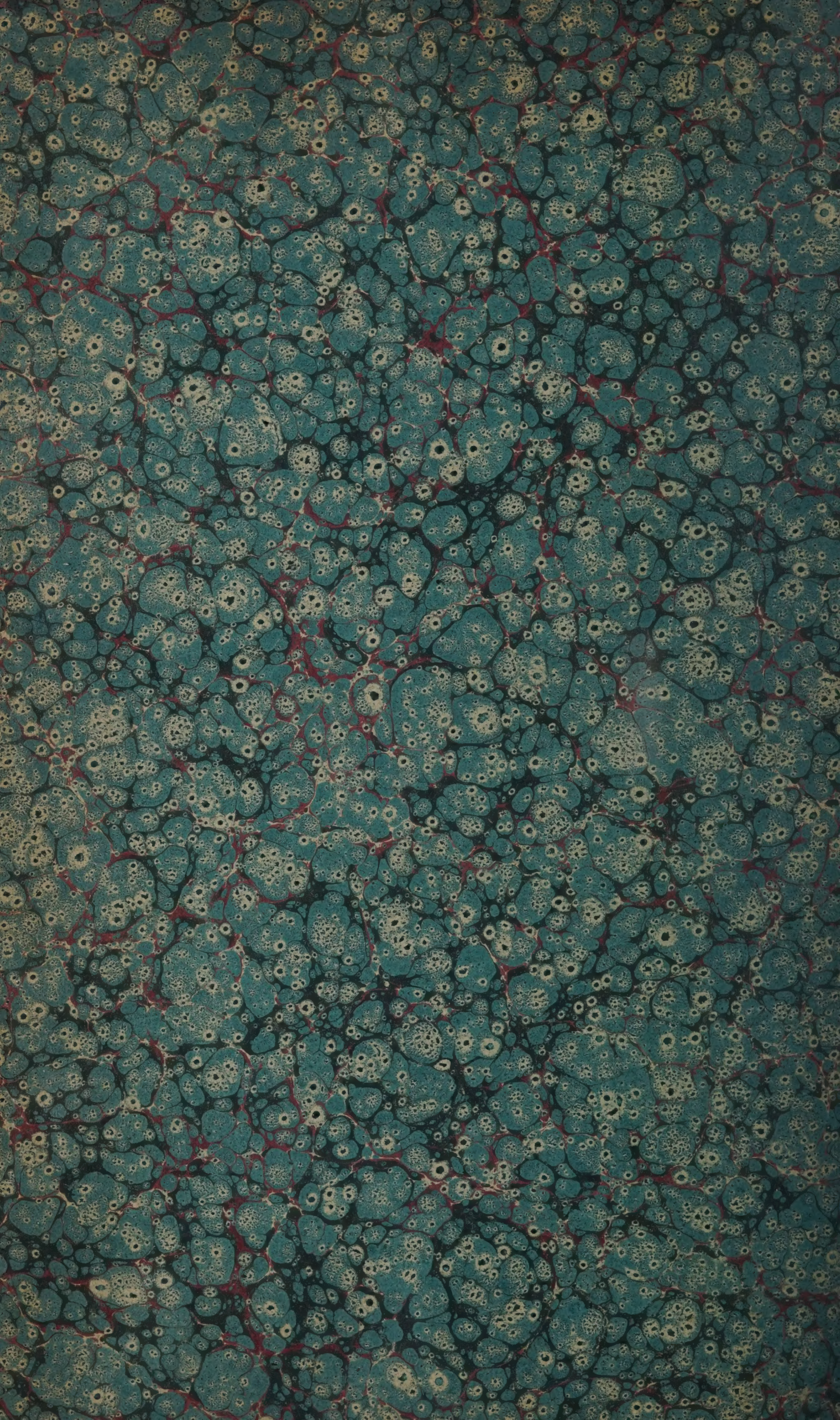
Ce théorème s'étend à la Géométrie où l'on considère comme élément de l'espace le couple formé par un point et un plan. Je le montrerai dans une autre occasion.

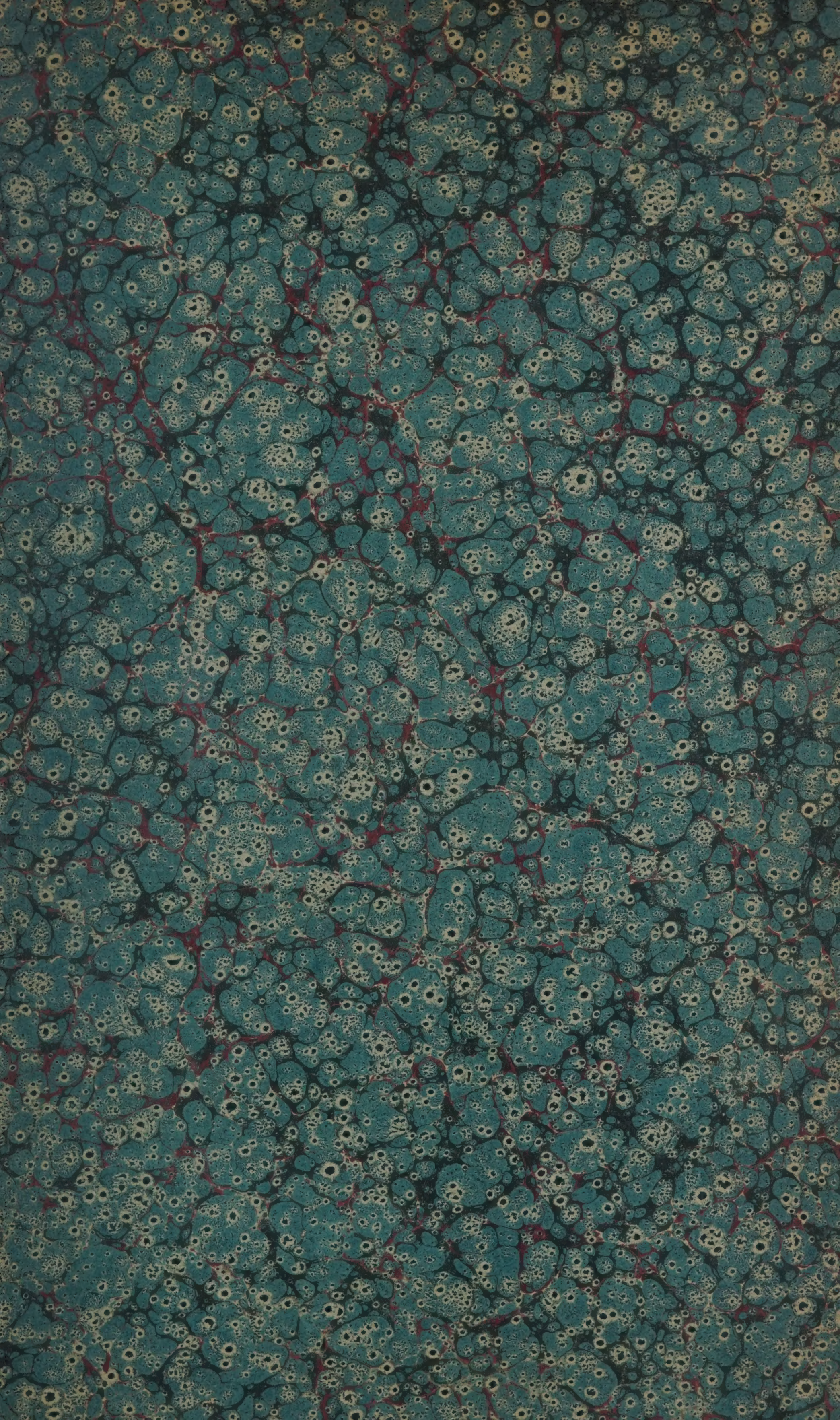
FIN DU TOME PREMIER.

TABLE DES MATIÈRES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME PREMIER.

48156 Paris. — Imp. Gauthier-Villars et Cie, quai des Grands-Augustins, 55.






UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
510H160 C001
OEUVRES
1
3 0112 016935717